# Classes de Morita-Mumford tordues

(exposé au grp de travail 06/11/2014)

<u>but</u> : introduire des classes de cohomologie

$$h_p \in H^p(\mathrm{Aut}(F_n); H^* \otimes H^{\otimes(p+1)}) \text{ et}$$

$$\bar{h}_p \in H^p(\mathrm{Aut}(F_n); H^{\otimes p}), \quad p \geq 1$$

- la restriction à $\mathcal{M}_{g,1}$ (mapping class groupe) est proportionnel à la classe de Morita-Mumford $h_p \sim m_{0,p+2} \in H^p(\mathcal{M}_{g,1}; H^{\otimes(p+2)})$
- les classes $h_p$ peuvent être $\bar{h}_p \sim m_{1,p} \in H^p(\mathcal{M}_{g,1}; H^{\otimes p})$ représentées à l'aide d'un développement de Magnus, mais la classe n'y dépend pas.
- les classe $h_p$ s'obtiennent en appliquant le Gysin aux produits itérés de la classe $k_0$.

$$\bar{A}_n = F_n \rtimes \mathrm{Aut}(F_n), \quad H = H_1(F_n; R) = F_n^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} R$$

$$k_0 : \bar{A}_n \longrightarrow H, \quad (\gamma, \varphi) \longmapsto [\gamma]$$

$k_0$ est un 1-cocycle, i.e. $k_0((\gamma_1,\varphi_1)(\gamma_2,\varphi_2)) =$

$$= (\gamma_1,\varphi_1) \circ \underbrace{k_0(\gamma_2,\varphi_2)}_{= [\gamma_2]} + \underbrace{k_0(\gamma_1,\varphi_1)}_{= [\gamma_1]}$$

En effet, $(\gamma_1\varphi_1)\cdot(\gamma_2,\varphi_2) = (\gamma_1\, \varphi_1(\gamma_2), \varphi_1\varphi_2)$, d'où

$$k_0((\gamma_1,\varphi_1)\cdot(\gamma_2,\varphi_2)) = [\gamma_1\, \varphi_1(\gamma_2)] = [\varphi_1(\gamma_2)] + [\gamma_1]$$

$$= |\varphi_1| \cdot [\gamma_2] + [\gamma_1] = (\gamma_1,\varphi_1)\cdot k_0(\gamma_2,\varphi_2) + k_0(\gamma_1,\varphi_1)$$

On écrit encore $k_0 = [k_0] \in H^1(\bar{A}_n; H)$

$$\rightsquigarrow \quad k_0^{\otimes(p+1)} \in H^{p+1}(\bar{A}_n; H^{\otimes(p+1)})$$

Comme expliqué dans les préliminaires, l'extension (produit semidirect)

$$F_n \xrightarrow{i} \bar{A}_n \xrightarrow{\pi} \mathrm{Aut}(F_n)$$

induit une application de Gysin

$$\pi_\# : H^{p+1}(\bar{A}_n ; H^{\otimes(p+1)}) \longrightarrow H^p(\mathrm{Aut}(F_n) ; H^* \otimes H^{\otimes(p+1)})$$

où on a identifié : thm de coeff. univ. !

$$H^1(F_n ; H^{\otimes(p+1)}) \overset{\downarrow}{=} \mathrm{Hom}(H, H^{\otimes(p+1)}) = H^* \otimes H^{\otimes(p+1)}$$

<u>Définition</u>: $h_p \overset{\text{def}}{=} \pi_\#(k_0^{\otimes(p+1)}) \in H^p(\mathrm{Aut}(F_n) ; H^* \otimes H^{\otimes(p+1)})$

Pour $p = 0$, on a $\pi_\#(k_0) = i^* k_0 = 1_H \in H^0(\mathrm{Aut}(F_n) ; H^* \otimes H)$

$\ulcorner$ $k_0 : \bar{A}_n \to H$, $(\gamma, \varphi) \mapsto [\gamma]$ $\leadsto$ $i^* k_0 : F_n \xrightarrow{i} \bar{A}_n \xrightarrow{k_0} H$, i.e. $F_n \to H$, $\gamma \mapsto [\gamma]$ et $\pi_\#(k_0)[\gamma] = k_0(\gamma) = [\gamma]$ $\lrcorner$

En contractant les coefficients par le $Gl(H)$-homomorphisme

$$r_p : H^* \otimes H^{\otimes(p+1)} \longrightarrow H^{\otimes p}, \quad f \otimes v_0 \otimes \dots \otimes v_p \longmapsto f(v_0) v_1 \otimes \dots \otimes v_p$$

on définit

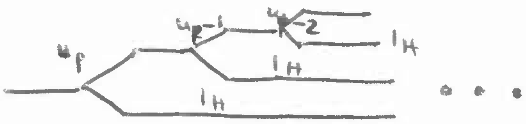
<u>Définition</u> $\bar{h}_p := r_{p*}(h_p) \in H^p(\mathrm{Aut}(F_n) ; H^{\otimes p})$

On introduit aussi le $Gl(H)$-homomorphisme

$$c_p : (H^* \otimes H^{\otimes 2})^{\otimes p} = \mathrm{Hom}(H, H^{\otimes 2})^{\otimes p} \qquad \mathrm{Hom}(H, H^{\otimes(p+1)}) = H^* \otimes H^{\otimes(p+1)}$$

$$\forall p \geq 2 : \quad c_p(u_1 \otimes \dots \otimes u_{p-1} \otimes u_p) = (u_1 \otimes 1_H^{\otimes(p-1)}) \circ \dots \circ (u_{p-1} \otimes 1_H) \circ u_p$$

avec $u_i \in \mathrm{Hom}(H, H^{\otimes 2}) = H^* \otimes H^{\otimes 2}$ $\forall 1 \leq i \leq p$




$p = 1$ : $c_1 = 1_{H^* \otimes H^{\otimes 2}}$.

<u>Théorème 4.1</u> $h_p = c_{p*}\left( [\tau_1^\vartheta]^{\otimes p} \right) \in H^p(\mathrm{Aut}(F_n); H^*\otimes H^{\otimes(p+1)})$

pour tout développement de Magnus $\vartheta \in \Theta_n$ et tout $p \geq 1$.
Pour $p=1$, on a $[\tau_1^\vartheta] = h_1 \in H^1(\mathrm{Aut}(F_n); H^*\otimes H^{\otimes 2})$
qui est donc indépendant du choix de $\vartheta$.

<u>démo</u> on définit $\tilde{\vartheta}_2 \in C^1(\bar{A}_n; H^{\otimes 2})$ par $\tilde{\vartheta}_2(\gamma,\varphi) = \vartheta_2(\gamma)$

Rappelons que $\vartheta : F_n \to 1 + \hat{T}_1$, $\vartheta(\gamma) = 1 + [\gamma] + \vartheta_2(\gamma) + \dots$

$(\hat{T}_p = \prod_{m\geq p} H^{\otimes m})$ avec $\vartheta_m(\gamma) \in H^{\otimes m}$

$\vartheta$ est un morphisme de groupes, donc

$$\vartheta(\gamma\mu) = \vartheta(\gamma)\otimes\vartheta(\mu) = (1+[\gamma]+\vartheta_2(\gamma)+\dots)\otimes(1+[\mu]+\vartheta_2(\mu)+\dots)$$

$$= 1 + [\gamma] + [\mu] + [\gamma]\otimes[\mu] + \vartheta_2(\gamma) + \vartheta_2(\mu) + \dots$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vartheta_2(\gamma\mu) = [\gamma]\otimes[\mu] + \vartheta_2(\gamma) + \vartheta_2(\mu)} \quad (*)$$

Avec cela, nous montrons

$$d\tilde{\vartheta}_2 = -(\tau_1^\vartheta \circ k_0 + k_0^{\otimes 2}) \in C^2(\bar{A}_n; H^{\otimes 2})$$

En effet :

$$d\tilde{\vartheta}_2((\gamma_1,\varphi_1),(\gamma_2,\varphi_2)) \overset{\text{déf. de "}d\text{"}}{=} |\varphi_1|^{\otimes 2}\tilde{\vartheta}_2(\gamma_2,\varphi_2) - \tilde{\vartheta}_2(\gamma_1\varphi_1(\gamma_2),\varphi_1\varphi_2) + \tilde{\vartheta}_2(\gamma_1,\varphi_1)$$

$$\overset{\text{déf. de } \tilde{\vartheta}_2}{=} |\varphi_1|^{\otimes 2}\vartheta_2(\gamma_2) - \vartheta_2(\gamma_1\varphi_1(\gamma_2)) + \vartheta_2(\gamma_1)$$

$$\overset{(*)}{=} |\varphi_1|^{\otimes 2}\vartheta_2(\gamma_2) - \vartheta_2(\varphi_1(\gamma_2)) - [\gamma_1]\otimes[\varphi_1(\gamma_2)]$$

$$\underset{\text{déf de } k_0}{\overset{(2.7)}{=}} -\tau_1^\vartheta(\varphi_1)\,|\varphi_1|\,k_0(\gamma_2,\varphi_2) - k_0(\gamma_1,\varphi_1)\otimes|\varphi_1|\,k_0(\gamma_2,\varphi_2)$$

$$= -(\tau_1^\vartheta\circ k_0 + k_0^{\otimes 2})((\gamma_1,\varphi_1),(\gamma_2,\varphi_2))$$

où on a utilisé (2.7) :

$$\tau_1^\vartheta(\varphi)\,|\varphi|\,[\gamma] = \vartheta_2(\varphi(\gamma)) - |\varphi|^{\otimes 2}\vartheta_2(\gamma)$$

On définit alors $f_p \in C^{p+1}(\bar{A}_n ; H^{\otimes(p+1)})$ par

$$f_p = (c_{p*}(\tau_1^\vartheta)^{\otimes p}) \circ k_0$$
$$= (\tau_1^\vartheta \otimes 1_H^{\otimes(p-1)}) \circ (\tau_1^\vartheta \otimes 1_H^{\otimes(p-2)}) \circ \dots \circ (\tau_1^\vartheta \otimes 1_H) \circ \tau_1^\vartheta \circ k_0$$

et $g_p \in C^p(\bar{A}_n ; H^{\otimes(p+1)})$ par

$$g_p = (\tau_1^\vartheta \otimes 1_H^{\otimes(p-1)}) \circ (\tau_1^\vartheta \otimes 1_H^{\otimes(p-2)}) \circ \dots \circ (\tau_1^\vartheta \otimes 1_H) \circ \tilde{\vartheta}_2$$

$p \geq 1$

$p = 0$ : $f_0 \overset{def}{=} k_0$.

On déduit du calcul précédent que :

$$dg_p = (-1)^{p-1} (\tau_1^\vartheta \otimes 1_H^{\otimes(p-1)}) \circ \dots \circ (\tau_1^\vartheta \otimes 1_H) \circ d\tilde{\vartheta}_2$$ car $\tau_1^\vartheta$ cocycle !

$$= (-1)^p (\tau_1^\vartheta \otimes 1_H^{\otimes(p-1)}) \circ \dots \circ (\tau_1^\vartheta \otimes 1_H) \circ (\tau_1^\vartheta \circ k_0 + k_0^{\otimes 2})$$
$$= (-1)^p (f_p + f_{p-1} \otimes k_0)$$

Donc, on obtient par récurrence

$$[c_{p*}(\tau_1^\vartheta)^{\otimes p} \circ k_0] = [f_p] = -[f_{p-1} \otimes k_0]$$
$$= \dots = (-1)^{p-1} [f_1 \otimes k_0^{\otimes(p-1)}] = (-1)^p [k_0^{\otimes(p+1)}]$$

D'où

$$c_{p*}(\tau_1^\vartheta)^{\otimes p} \circ k = (-1)^p k_0^{\otimes(p+1)} \in H^{p+1}(\bar{A}_n ; H^{\otimes(p+1)})$$
(comme classes)

On en déduit donc :

(def de $h_p$)

$$h_p = \pi_\#(k_0^{\otimes(p+1)}) = \pi_\#((-1)^p c_{p*}(\tau_1^\vartheta)^{\otimes p} \circ k)$$
$$= (-1)^p \pi_\#(c_{p*}(\tau_1^\vartheta)^{\otimes p} \circ k)$$
$$= (-1)^p \pi_\# f_p = c_{p*}(\tau_1^\vartheta)^{\otimes p}.$$

on va montrer cela !

En effet, $f_p \in C^{p+1}(\bar{A}_n; H^{\otimes(p+1)})$ est dans le sous-espace $A_p$ de la filtration de $C^\circ(\bar{A}_n; H^{\otimes(p+1)})$ suivant l'extension.

Ceci veut dire que $f_p((\gamma_1,\varphi_1), \ldots, (\gamma_{p+1},\varphi_{p+1})) = 0$ dès que deux éléments sont dans $F_n \subset \bar{A}_n$. Ceci est le cas par construction, car les $\tau_1^\partial$ prennent leurs arguments dans $\mathrm{Aut}(F_n)$.

L'image sous l'homomorphisme de Gysin est donc :

$$(\pi_\# f_p)(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)[\gamma] = (f_p)_1(\gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_p)$$

$$= (-1)^p \, f_p(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, (\varphi_1 \cdots \varphi_p)^{-1}(\gamma)) \quad \text{le seul facteur qui reste de la somme !}$$

$$= (-1)^p \Big( \big((\tau_1^\partial \otimes 1_H^{\otimes(p-1)}) \circ \ldots \circ (\tau_1^\partial \otimes 1_H) \circ \tau_1^\partial\big)(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)\Big)$$

$$\circ \, |\varphi_1 \cdots \varphi_p| \circ \underbrace{|\varphi_1 \cdots \varphi_p|^{-1}([\gamma])}_{= [(\varphi_1 \cdots \varphi_p)^{-1}(\gamma)]})$$

facteur provenant du cup produit (cochaînes non-homogènes !)

$$= (-1)^p \left[\left(c_{p*}(\tau_1^\partial)^{\otimes p}\right)(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)\right][\gamma] \qquad \blacksquare$$

On va illustrer comment déduire du thm. la relation IH parmi les classes de Morita-Mumford dans ce cadre :

$$p = 2 : \quad h_2 = \underset{h_1 = [\tau_1^\vartheta]}{c_{2*}(h_1)^{\otimes 2}} = (h_1 \otimes 1_H) \circ \tau_1^\vartheta = (h_1 \otimes 1_H) \circ h_1$$

Par ailleurs, on peut considérer

$$c_2' : (H^* \otimes H^{\otimes 2})^{\otimes 2} \longrightarrow H^* \otimes H^{\otimes 3}$$

$$u_1 \otimes u_2 \longmapsto (1_H \otimes u_1) \circ u_2$$

on a $\quad c'_{2*}(h_1^{\otimes 2}) = - c_{2*}(h_1^{\otimes 2}) = - h_2$.

En effet, la relation (2.6) : $-d\tau_2^\vartheta = (\tau_1^\vartheta \otimes 1 + 1 \otimes \tau_1^\vartheta) \cup \tau_1^\vartheta$ donne

$$(h_1 \otimes 1) \circ h_1 + (1_H \otimes h_1) \circ h_1 = 0 \in H^2(\mathrm{Aut}(F_n); H^* \otimes H^{\otimes 3}).$$

---

Pour clore cet exposé, nous allons montrer une sorte de primitivité des classes $h_p$ et $\bar{h}_p$ ( [Kawazumi : Twisted MM classes on braid grps] Prop. 1.2.)

$A_n := \mathrm{Aut}(F_n)$

$n_1 + n_2 \leq n \quad : \quad A_{n_2} \circlearrowright F\{x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2}\}$

$$i = i_{n_1,n_2} : A_{n_1} \times A_{n_2} \longrightarrow A_n$$

on note $\pi_1 : A_{n_1} \times A_{n_2} \longrightarrow A_{n_1}$ et $\pi_2 : A_{n_1} \times A_{n_2} \longrightarrow A_{n_2}$ les projections canoniques, et $H_{(n_1)}$, $H_{(n_2)}$ et $H_{(n-n_1-n_2)}$ les sous-modules de $H$ engendrés par $\{x_1, \dots, x_{n_1}\}$, $\{x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2}\}$ et $\{x_{n-n_1-n_2+1}, \dots, x_n\}$ resp.

On a

$$H = H_{(n_1)} \oplus H_{(n_2)} \oplus H_{(n-n_1-n_2)}$$

$k=1,2 \quad : \quad \pi_k^* : H^*\left(A_{n_k}; H^*_{(n_k)} \otimes H_{(n_k)}^{\otimes(p+1)}\right) \longrightarrow H^*\left(A_{n_1}\times A_{n_2}, H^* \otimes H^{\otimes(p+1)}\right)$

<u>Prop 1.2</u> $(p \geq 1)$

(1) $\quad i^* h_p = \pi_1^* h_p + \pi_2^* h_p \in H^p\left(A_{n_1}\times A_{n_2}; H^* \otimes H^{\otimes(p+1)}\right)$

(2) $\quad i^* \overline{h_p} = \pi_1^* \overline{h_p} + \pi_2^* \overline{h_p} \in H^p\left(A_{n_1}\times A_{n_2}; H^{\otimes p}\right)$

<u>démo</u>: On note $\tau^{(k)} \overset{\text{def}}{=} \pi_k^* \tau_1^{\text{std}} \in Z^1\left(A_{n_1}\times A_{n_2}; H^* \otimes H^{\otimes 2}\right)$

On a $\text{std}(\gamma_1) \in \prod_{p=0}^{\infty} H_{(n_1)}^{\otimes p} \subset \hat{T}$ pour tout mot $\gamma_1$ en $x_1, \dots, x_{n_1}$

et de même pour un mot $\gamma_2$ en $x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2}$, et $\gamma_3$ en $x_{n_1+n_2+1}, \dots, x_n$.

On déduit donc de la formule $\tau_1^{\theta}(\varphi)[\gamma] = \vartheta_2(\gamma) - |\varphi|^{\otimes 2}\vartheta_2(\varphi^{-1}(\gamma))$

(que l'on obtient de (2.7) en remplaçant $\gamma$ par $\varphi^{-1}(\gamma)$ !) que

$$i^* \tau_1^{\text{std}} = \tau^{(1)} + \tau^{(2)} \in Z^1\left(A_{n_1}\times A_{n_2}; H^* \otimes H^{\otimes 2}\right)$$

Par ailleurs $\quad c_{2*}\left(\tau^{(1)}\tau^{(2)}\right) = c_{2*}\left(\tau^{(2)}\tau^{(1)}\right) = 0 \in Z^2\left(A_{n_1}\times A_{n_2}; H^* \otimes H^{\otimes 3}\right)$

Ceci se déduit de $f(u) = 0$ pour $f \in H^*_{(n_1)}$ et $u \in H_{(n_2)}$.

Finalement, on déduit du thm. 4.1 :

$$i^* h_p = c_{p*}\left(i^*[\tau_1^{\text{std}}]^{\otimes p}\right) = c_{p*}\left(\left(\tau^{(1)} + \tau^{(2)}\right)^{\otimes p}\right)$$

$$= c_{p*}\left(\left(\tau^{(1)}\right)^{\otimes p}\right) + c_{p*}\left(\left(\tau^{(2)}\right)^{\otimes p}\right) = \pi_1^* h_p + \pi_2^* h_p .$$

les termes mixtes sont nuls par ce qui précède !

En appliquant $\tau_{p*}$, on obtient la relation pour $\overline{h_p}$ ∎