LA CONJECTURE DE WHITEHEAD - REVISITÉE PAR KUHN

GEOFFREY POWELL

1. Avertissement

Ces notes sont basées exclusivement sur la lecture de la prépublication récente de Kuhn, [Kuh13]. Leur but est d'expliquer la relation entre le théorème principal, Theorem 1.1 de [Kuh13], et la conjecture de Whitehead. (Sans avoir consulté les sources d'orgine.)

La motivation pour le travail de Kuhn provient de l'article de Arone, Dwyer et Lesh [ADL08] qui renvoie également à des conjectures dans l'article de Arone et Lesh [AL07]. Voir l'Introduction de [ADL08], pages 177-179.

En particulier, la notion des *contracting homotopies* est présente dans [AL07] et dans l'article de Arone et Lesh [AL10] (voir la Section 2).

2. Éléments de la théorie d'homotopie stable

Rappeler que le foncteur suspension

$$\Sigma = S^1 \wedge - : \mathscr{T}_\bullet \to \mathscr{T}_\bullet$$

est l'adjoint à gauche de $\Omega := \mathrm{Map}_\bullet(S^1, -)$. Le foncteur Σ passe à la catégorie homotopique pointée $\mathscr{H}_\bullet$. Le foncteur $\Sigma : \mathscr{H}_\bullet \to \mathscr{H}_\bullet$ n'est pas une équivalence de catégories, mais il possède des propriétés de stabilisation (cf. le théorème de stabilisation de Freudenthal).

La *catégorie d'homotopie stable* $\mathscr{SH}$ est obtenue en *inversant* la suspension Σ, de sorte qu'on obtienne un foncteur

$$\Sigma^\infty : \mathscr{H}_\bullet \to \mathscr{SH}$$

et les propriétés suivantes sont vérifiées :

Propriétés 2.1.

1. La suspension induit une équivalence de catégories $\Sigma : \mathscr{SH} \to \mathscr{SH}$;
2. $\mathscr{SH}$ est une catégorie *additive*, en particulier $[-,-] := \hom_{\mathscr{SH}}(-,-) \in \mathscr{A}b$ (conséquence de l'isomorphisme $[X,Y] \cong [\Sigma^2 X, \Sigma^2 Y]$) ;
3. les notions de *fibration* et de *cofibration* coïncident dans $\mathscr{SH}$.

Remarque 2.2.

1. La catégorie $\mathscr{SH}$ est la catégorie homotopique associée à une structure de modèles sur la catégorie des *spectres*. Le foncteur Σ^∞ associe à un espace pointé X son *spectre des suspensions* $\Sigma^\infty X$.
2. La structure de modèles est *stable*, donc $\mathscr{SH}$ est en fait une *catégorie triangulée*, avec foncteur de décalage la suspension $\Sigma : \mathscr{SH} \to \mathscr{SH}$. Un *triangle distingué* est isomorphe à un triangle de la forme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, phantom, "\triangle", shift left=4] & & Y \arrow[dl] \\ & C_f \arrow[ul, dashed] & \end{tikzcd}$$

où C_f est le *mapping cône* d'un morphisme $f : X \to Y$ entre spectres. (Cf. le cas de la *catégorie dérivée* d'une catégorie abélienne.)

On dispose d'une adjonction :

$$\Sigma^\infty : \mathscr{H}_\bullet \rightleftarrows \mathscr{SH} : \Omega^\infty,$$

où Ω^∞ est le foncteur *espace des lacets infinis*.

Propriétés 2.3.

(1) Le foncteur Σ^∞ est compatible avec les foncteurs suspension et il envoie les suites cofibres sur des triangles distingués ;
(2) le foncteur Ω^∞ prend ses valeurs dans la catégorie des espaces des lacets infinis (ceci est presque la *définition* !) ; en particulier, pour E un spectre, $\Omega^\infty E$ possède la structure d'un H-espace commutatif : il existe un produit $\mu : \Omega^\infty \times \Omega^\infty E \to \Omega^\infty E$ qui est associatif et commutatif à homotopie près ;
(3) le foncteur Ω^∞ envoie les triangles distingués sur des fibrations *multiplicatives* : si $F \to E_1 \to E_2 \to$ est une suite cofibre de spectres, alors
$$\Omega^\infty F \to \Omega^\infty E_1 \to \Omega^\infty E_2$$
est une fibration d'espaces des lacets infinis.

Lemme 2.4. *Pour X un espace pointé et E un spectre, $[X, \Omega^\infty E]_{\mathscr{H}_\bullet}$ est un groupe abélien.*

Démonstration. Conséquence immédiate de l'adjonction $(\Sigma^\infty, \Omega^\infty)$. □

Définition 2.5. Soit $Q := \Omega^\infty \Sigma^\infty : \mathscr{H}_\bullet \to \mathscr{H}_\bullet$.

Remarque 2.6. Il est un résultat classique et fondamental que, lorsque l'espace pointé Z est connexe par arcs, on peut donner une *décomposition stable* de QZ. Autrement dit, il existe une décomposition de $\Sigma^\infty QZ$ en termes de foncteurs bien compris. (Cf. le calcul de Goodwillie.)

En particulier, ceci permet de calculer explicitement $H_*(QZ; \mathbb{F}_p)$ comme foncteur de $H_*(Z; \mathbb{F}_p)$. Ceci est un ingrédient essentiel des résultats de [Kuh13].

3. La conjecture de Whitehead

Le point de départ de la conjecture de Whitehead est le théorème de Dold-Thom. Pour X un espace topologique et $n \in \mathbb{N}$, le n-ième produit symétrique est le quotient :

$$\mathrm{SP}^n(X) := (X^n)/\mathfrak{S}_n.$$

Un point de base $* \in X$ induit $\mathrm{SP}^n(X) \to \mathrm{SP}^{n+1}(X)$ et on définit le *produit symétrique infini* :

$$\mathrm{SP}^\infty(X) := \varinjlim \mathrm{SP}^n(X).$$

Le théorème de Dold-Thom affirme que, si X est un CW-complexe connexe, alors :

$$\mathrm{SP}^\infty(X) \simeq \prod_{i \geq 1} K(\tilde{H}_i(X; \mathbb{Z}), i),$$

est un espace d'Eilenberg-MacLane généralisé. En particulier, pour $t \geq 1$, on obtient $\mathrm{SP}^\infty(S^t) \simeq K(\mathbb{Z}, t)$.

Pour Y un espace topologique, la diagonale $Y \to Y^n$ induit

$$Y \times \mathrm{SP}^n(X) \to \mathrm{SP}^n(Y \times X).$$

Ainsi, on peut construire un *spectre* à partir de la suite des espaces $\mathrm{SP}^n(S^t)$ (ou $\mathrm{SP}^\infty(S^t)$), $0 < t \in \mathbb{N}$, et donc un modèle pour le spectre d'Eilenberg-Maclane $H\mathbb{Z}$:

$$H\mathbb{Z} \simeq \mathrm{SP}^\infty(S),$$

où $S := \Sigma^\infty S^0 \in \mathscr{SH}$.

Remarque 3.1. Pour A un groupe abélien, le spectre d'Eilenberg-MacLane HA représente la cohomologie singulière à coefficients A dans $\mathscr{SH}$:

$$H^*(-;A) \cong [-, HA]_{\mathscr{SH}}.$$

En particulier, on retrouve la caractérisation de HA :

$$\pi_*(HA) \cong \begin{cases} A & * = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fixons un nombre premier p ; la suite exacte courte de groupes abéliens $\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ induit un triangle distingué

$$H\mathbb{Z} \xrightarrow{p} H\mathbb{Z} \to H\mathbb{F}_p \to,$$

tel que, en appliquant π_0 on retrouve la suite exacte courte.

Par définition de l'algèbre de Steenrod modulo p, on a $H\mathbb{F}_p^*(H\mathbb{F}_p) = \mathscr{A}$. La suite exacte longue associée au triangle montre que

$$H\mathbb{F}_p^*(H\mathbb{Z}) \cong \mathscr{A}/\mathscr{A}\beta,$$

où β est le Bockstein. La *filtration par la longueur* de l'algèbre de Steenrod $\mathscr{A}$ induit une filtration de $\mathscr{A}/\mathscr{A}\beta$.

Cette filtration est d'origine géométrique : elle est introduite par la filtration de $\mathrm{SP}^\infty(S)$

$$\ldots \to \mathrm{SP}^n(S) \to \mathrm{SP}^{n+1}(S) \to \ldots \to \mathrm{SP}^\infty(S),$$

en prenant la restriction aux termes de la forme $\mathrm{SP}^{p^k}(S)$.

Remarque 3.2. Mitchell et Priddy [MP83] considère également le morphisme *diagonal* $\mathrm{SP}^{p^k}(S) \to \mathrm{SP}^{p^{k+1}}(S)$; ceci *ne correspond pas* à la filtration par la longueur.

En cohomologie, la suite des morphismes

$$S \to \mathrm{SP}^p(S) \to \ldots \to \mathrm{SP}^{p^k}(S) \to \mathrm{SP}^{p^{k+1}}(S) \to \ldots \to \mathrm{SP}^\infty(S) \simeq H\mathbb{Z}$$

induit la filtration par la longueur (calculs de Nakaoka). En particulier, en *homologie*, le morphisme :

$$(H\mathbb{F}_p)_*(\mathrm{SP}^{p^k}(S)) \hookrightarrow (H\mathbb{F}_p)_*(\mathrm{SP}^{p^{k+1}}(S))$$

est un monomorphisme. Par contre, en homotopie, on a :

Conjecture 3.3 (Conjecture de Whitehead). Pour $* > 0$, le morphisme $\pi_*(\mathrm{SP}^{p^k}(S)) \to \pi_*(\mathrm{SP}^{p^{k+1}}(S))$ est 0.

Remarque 3.4. Le théorème d'Hurewicz montre que ces morphismes ne peuvent pas être triviaux en degré 0.

La conjecture peut être reformulée à l'aide des spectres $L(k)$:

Définition 3.5. Soient $L(0) := S$ et, pour $k \geq 1$,

$$L(k) := \Sigma^{-k}\{\mathrm{Cofibre}(\mathrm{SP}^{p^{k-1}}(S) \to \mathrm{SP}^{p^k}(S))\}$$

de sorte qu'on dispose d'un triangle distingué :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{SP}^{p^{k-1}}(S) \arrow[rr] & & \mathrm{SP}^{p^k}(S) \arrow[dl] \\
& \Sigma^k L(k) \arrow[ul, dashed] \arrow[u, phantom, "\triangle"] &
\end{tikzcd}$$

On obtient alors le morphisme $L(k+1) \stackrel{\delta_k}{\to} L(k)$ comme la composée

$$L(k+1) \to \Sigma^{-k}\mathrm{SP}^{p^k}(S) \to L(k)$$

et donc le 'complexe' $\ldots \to L(3) \to L(2) \to L(1) \to L(0) \to H\mathbb{Z}$ à partir du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "\delta_3"] & L(3) \arrow[rr, "\delta_2"] \arrow[dr] & & L(2) \arrow[rr, "\delta_1"] \arrow[dr] & & L(1) \arrow[dr, "\delta_0"] & \\
\Sigma^{-3}\mathrm{SP}^{p^3}(S) \arrow[ur] & & \Sigma^{-2}\mathrm{SP}^{p^2}(S) \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "\triangle"] & & \Sigma^{-1}\mathrm{SP}^{p}(S) \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "\triangle"] & & L(0) = S \arrow[ll, dashed] \arrow[d, dotted, "\delta_{-1}"] \arrow[ul, phantom, "\triangle"] \\
& & & & & & L(-1) := H\mathbb{Z},
\end{tikzcd}$$

où, par construction, $\delta_k\delta_{k+1} = 0$.

Remarque 3.6. La conjecture de Whitehead est alors équivalente à l'exactitude du complexe

$$\ldots \to L(3) \to L(2) \to L(1) \to L(0) \to L(-1) := H\mathbb{Z}$$

en groupes d'homotopie p-locaux. (Le $H\mathbb{Z}$ est nécessaire puisque δ_0 est trivial en π_0.)

Remarque 3.7. Par les résultats de Mitchell et Priddy [MP83] (cf. également l'approche de Arone et Dwyer [AD01]), il existe une description alternative de $L(k)$. En utilisant l'*idempotent de Steinberg* on définit l'espace $L_1(k)$ comme facteur direct de l'espace de Thom $(BV_k)^{\rho_k}$, où V_k est un p-groupe abélien élémentaire de rang k et ρ_k est la représentation régulière de V_k. Alors, pour $k \geq 1$,

$$\Sigma L(k) \simeq \Sigma^\infty L_1(k)$$

dans $\mathscr{SH}$. (Puisque ρ_k contient une représentation triviale, $(BV_k)^{\rho_k}$ est une suspension, donc $L_1(k)$ est un co-H-espace.)

Remarque 3.8. Le morphisme $\delta_k : L(k+1) \to L(k)$ est essentiellement unique, car on sait calculer

$$[L(k+1), L(k)] \cong \mathbb{Z}_p$$

à l'aide de la *conjecture de Segal*.

De plus, on peut montrer que $[L(k+2), L(k)] = 0$. Ainsi, on n'a pas besoin d'utiliser la construction explicite des morphismes δ_k ; Kuhn fournit une caractérisation explicite de ces morphismes en termes de l'homologie modulo p.

4. Notions d'exactitude

Il existe des notions générales de *résolution* dans les catégories triangulées, dont :
— les résolutions d'Adams ;
— les résolutions d'Adams relatives (cf. [Mil81]).
On peut les considérer dans le contexte général de l'algèbre homologique relative ; en se donnant une classe de $\mathscr{I}$*-injections*.

Dans le cas actuel, on considère une 'résolution' de la forme

$$\ldots \stackrel{\delta_3}{\to} E_3 \stackrel{\delta_2}{\to} E_2 \stackrel{\delta_1}{\to} E_1 \stackrel{\delta_0}{\to} E_0 \stackrel{\delta_{-1}}{\to} E_{-1}$$

telle que $\delta_k\delta_{k+1} = 0$.

Définition 4.1. Un morphisme $F \to E$ est $\mathscr{I}$-injectif si le morphisme $\Omega^\infty F \to \Omega^\infty E$ admet un rétracte dans $\mathscr{H}_\bullet$, en particulier, il est un monomorphisme (au sens catégorique) de $\mathscr{H}_\bullet$.

Considérons un diagramme commutatif de $\mathscr{SH}$ de la forme suivante :

(1)
$$\begin{tikzcd}
 & E_{k+1} \arrow[rr, "\delta_k"] \arrow[dr, "\pi_k"] \arrow[d, phantom, "\triangle"] & & E_k \arrow[rr, "\delta_{k-1}"] \arrow[dr, "\pi_{k-1}"] \arrow[d, phantom, "\triangle"] & & E_{k-1} \\
F_{k+1} \arrow[ur, "\iota_{k+1}"] & & F_k \arrow[ll, dashed] \arrow[ur, "\iota_k"] & & F_{k-1}, \arrow[ll, dashed] \arrow[ur, "\iota_{k-1}"] &
\end{tikzcd}$$

où les triangles $\triangle$ sont distingués.

En appliquant le foncteur Ω^∞ on obtient le diagramme commutatif

(2)
$$\begin{tikzcd}
 & \Omega^\infty E_{k+1} \arrow[rr, "d_k"] \arrow[dr, "p_k"] & & \Omega^\infty E_k \arrow[rr, "d_{k-1}"] \arrow[dr, "p_{k-1}"] & & \Omega^\infty E_{k-1} \\
\Omega^\infty F_{k+1} \arrow[ur, "i_{k+1}"] & & \Omega^\infty F_k \arrow[ur, "i_k"] & & \Omega^\infty F_{k-1}, \arrow[ur, "i_{k-1}"] &
\end{tikzcd}$$

où

$$\begin{aligned}
&\Omega^\infty F_{k+1} \to \Omega^\infty E_{k+1} \to \Omega^\infty F_k \\
&\Omega^\infty F_k \quad\ \to \Omega^\infty E_k \quad\ \to \Omega^\infty F_{k-1}
\end{aligned}$$

sont des fibrations d'espaces des lacets infinis.

Le résultat suivant permet d'utiliser une *homotopie de chaînes* afin de montrer par récurrence que les morphismes $F_k \to E_k$ soient $\mathscr{I}$-injectifs.

Proposition 4.2. *Dans la situation décrite par le diagramme (1) et son diagramme associé (2), supposer en outre que :*

(1) $i_k : \Omega^\infty F_k \to \Omega^\infty E_k$ *admet un rétracte dans* $\mathscr{H}_\bullet$ *;*

(2) il existe morphismes $s_j : \Omega^\infty E_j \to \Omega^\infty E_{j+1}$ *pour* $j \in \{k, k+1\}$ *tel que*
$$d_k s_k + s_{k-1} d_{k-1} = 1_{\Omega^\infty E_k}$$
dans $\mathscr{H}_\bullet$*.*

Alors, le morphisme $t_k : \Omega^\infty F_k \to \Omega^\infty E_{k+1}$ *défini par* $t_k := s_k i_k$ *est une section de* p_k *dans* $\mathscr{H}_\bullet$*.*

Donc la fibration d'espaces des lacets infinis :

$$\begin{tikzcd}
\Omega^\infty F_{k+1} \arrow[r, "i_{k+1}"'] & \Omega^\infty E_{k+1} \arrow[r, "p_k"'] & \Omega^\infty F_k \arrow[l, dotted, bend right, "t_k"']
\end{tikzcd}$$

est scindée, en particulier $\Omega^\infty E_{k+1} \simeq \Omega^\infty F_{k+1} \times \Omega^\infty F_k$ *et le morphisme* i_{k+1} *admet un rétracte.*

Démonstration. Le point essentiel est que t_k est une section de p_k ; les autres résultats en découlent immédiatement.

Puisque i_k admet un rétracte, il est un monomorphisme (au sens catégorique) de $\mathscr{H}_\bullet$, donc il suffit de montrer que $i_k(p_k t_k) = i_k$ dans $\mathscr{H}_\bullet$. Par commutativité du diagramme (2), $i_k p_k = d_k$ et, par définition, $t_k = s_k i_k$, donc
$$i_k(p_k t_k) = d_k s_k i_k = i_k - s_{k-1} d_{k-1} i_k$$
par l'hypothèse $d_k s_k + s_{k-1} d_{k-1} = 1_{\Omega^\infty E_k}$. Enfin, $d_{k-1} i_k$ est trivial dans $\mathscr{H}_\bullet$, d'où le résultat. $\square$

Remarque 4.3. L'équivalence $\Omega^\infty E_{k+1} \simeq \Omega^\infty F_{k+1} \times \Omega^\infty F_k$ n'est pas une équivalence d'espaces des lacets infinis. En particulier, on *ne dispose pas* d'une décomposition de E_{k+1} en coproduit de F_{k+1} et F_k dans $\mathscr{SH}$ en général.

Corollaire 4.4. *Supposons les hypothèses de Proposition 4.2 vérifiées $\forall k \in \mathbb{Z}$, alors, $\forall Z \in \mathrm{Ob}\mathscr{T}_\bullet$, le complexe*

$$\ldots \to [Z, \Omega^\infty E_{k+1}] \to [Z, \Omega^\infty E_k] \to [Z, \Omega^\infty E_{k-1}] \to \ldots$$

est exact. De manière équivalente,

$$\ldots \to [\Sigma^\infty Z, E_{k+1}] \to [\Sigma^\infty Z, E_k] \to [\Sigma^\infty Z, E_{k-1}] \to \ldots$$

est exact.

4.1. **La nouvelle approche de Kuhn à la conjecture de Whitehead.** Comme dans son travail avec Priddy [KP85], la démonstration est basée sur Proposition 4.2, mais en dégageant les points clés de l'argument en utilisant le lemme 4.6 ci-dessous.

Remarque 4.5. Une première observation est que, pour obtenir la conclusion de la Proposition 4.2, on n'a pas besoin de commencer avec un diagramme de la forme (1). En effet, partons du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& \Omega^\infty E_{k+1} \arrow[rr, "d_k"] \arrow[dr, dotted, "p_k"] & & \Omega^\infty E_k \arrow[rr, "d_{k-1}"] \arrow[dr, "p_{k-1}"] & & \Omega^\infty E_{k-1} \\
Y_{k+1} \arrow[ur, dotted, "i_{k+1}"] & & Y_k \arrow[ur, "i_k"] & & Y_{k-1}, \arrow[ur, "i_{k-1}"] &
\end{tikzcd}$$

où Y_k, Y_{k+1} sont des H-espaces commutatifs, les morphismes sont des morphismes de H-espaces et

$$Y_k \to \Omega^\infty E_k \to Y_{k-1}$$

est une fibration de H-espaces.

Si le morphisme i_{k-1} est un monomorphisme au sens catégorique, alors l'hypothèse $d_{k-1}d_k = *$ entraîne l'existence de p_k, qui est un morphisme de H-espaces si i_k est un monomorphisme. On définit $i_{k+1} : Y_{k+1} \to \Omega^\infty E_{k+1}$ la fibre homotopique de p_k.

Ensuite, on peut appliquer l'argument de Proposition 4.2.

Rappeler que, pour X un espace, l'homologie (non-réduite) $(H\mathbb{F}_p)_*(X)$ est une coalgèbre ; on écrite $P(H\mathbb{F}_p)_*(X)$ pour les primitifs par rapport à cette structure.

Lemme 4.6. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces connexes tels que $(H\mathbb{F}_p)_*(X)$, $(H\mathbb{F}_p)_*(Y)$ sont*

(1) isomorphes en tant qu'espaces vectoriels gradués ;

(2) de type fini.

Alors $(H\mathbb{F}_p)_*(f)$ est un isomorphisme si et seulement si le morphisme induit sur les primitifs

$$f_* : P(H\mathbb{F}_p)_*(X) \to P(H\mathbb{F}_p)_*(Y)$$

est injectif.

Si, de plus, X, Y sont p-complets, cette condition est équivalente à

(3) f est une équivalence d'homotopie.

Ce résultat sera appliqué lorsque $X = QU, Y = QV$ pour deux espaces connexes par arcs, donc on se ramène à l'étude de :

$$f_* : P(H\mathbb{F}_p)_*(QU) \to P(H\mathbb{F}_p)_*(QV).$$

On ne suppose pas que $f : QU \to QV$ est de la forme Qg.

On analyse de tels morphismes à l'aide du résultat suivant :

Proposition 4.7. *Soit U un co-H-espace, alors*

$$P(H\mathbb{F}_p)_*(QZ) \cong R_*(\tilde{H\mathbb{F}_p})_*(Z),$$

où R_* est une version homologique des foncteurs de Singer, exprimés dans [Kuh13] *en termes des opérations de Dyer-Lashof.*

Le résultat principal de [Kuh13], Théorème 1.1, donnent des critères sur les applications $d_k, d_{k-1}, s_k, s_{k-1}$ pour que $d_k s_k + s_{k-1} d_{k-1}$ soit une équivalence d'homotopie. La conjecture de Whitehead en découle immédiatement.

Ingrédients :

— calculs avec les algèbres de Hecke de type A ;
— la théorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod ;
— le calcul de Goodwillie.

Références

[AD01] G. Z. Arone and W. G. Dwyer, *Partition complexes, Tits buildings and symmetric products*, Proc. London Math. Soc. (3) **82** (2001), no. 1, 229–256. MR 1794263 (2002d :55003)

[ADL08] Gregory Z. Arone, William G. Dwyer, and Kathryn Lesh, *Loop structures in Taylor towers*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), no. 1, 173–210. MR 2377281 (2008m :55025)

[AL07] Gregory Arone and Kathryn Lesh, *Filtered spectra arising from permutative categories*, J. Reine Angew. Math. **604** (2007), 73–136. MR 2320314 (2008c :55013)

[AL10] Gregory Z. Arone and Kathryn Lesh, *Augmented Γ-spaces, the stable rank filtration, and a bu analogue of the Whitehead conjecture*, Fund. Math. **207** (2010), no. 1, 29–70. MR 2576278 (2011c :55025)

[KMP82] N. J. Kuhn, S. A. Mitchell, and S. B. Priddy, *The Whitehead conjecture and splitting $B(\mathbf{Z}/2)^k$*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **7** (1982), no. 1, 255–258. MR 656206 (83h :55009)

[KP85] Nicholas J. Kuhn and Stewart B. Priddy, *The transfer and Whitehead's conjecture*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **98** (1985), no. 3, 459–480. MR 803606 (87g :55030)

[Kuh82] Nicholas J. Kuhn, *A Kahn-Priddy sequence and a conjecture of G. W. Whitehead*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **92** (1982), no. 3, 467–483. MR 677471 (85f :55007a)

[Kuh84] ———, *Corrigenda : "A Kahn-Priddy sequence and a conjecture of G. W. Whitehead"*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **95** (1984), no. 1, 189–190. MR 727095 (85f :55007b)

[Kuh13] N. J. Kuhn, *The Whitehead Conjecture, the Tower of S^1 Conjecture, and Hecke algebras of type A*, ArXiv e-prints (2013).

[Mil81] Haynes R. Miller, *On relations between Adams spectral sequences, with an application to the stable homotopy of a Moore space*, J. Pure Appl. Algebra **20** (1981), no. 3, 287–312. MR 604321 (82f :55029)

[MP83] Stephen A. Mitchell and Stewart B. Priddy, *Stable splittings derived from the Steinberg module*, Topology **22** (1983), no. 3, 285–298. MR 710102 (85f :55005)