UNIVERSITÉ DE NANTES, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES JEAN LERAY (UMR 6629)

Méthodes fonctorielles pour l'étude de l'homologie stable des groupes

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : mathématiques

présentée et soutenue publiquement le 30 janvier 2017 par

Aurélien DJAMENT

Jury

M.	**Christian AUSONI**,	Professeur,	Paris 13.
M.	**Vincent FRANJOU**,	Professeur,	Nantes.
M.	**Benoît FRESSE**,	Professeur,	Lille.
M.	**Hans-Werner HENN**,	Professeur,	Strasbourg.
M.	**Geoffrey POWELL**,	Directeur de recherche,	Angers.
M.	**Jérôme SCHERER**,	Professeur,	Lausanne.

Rapporteurs

M.	**Stanisław BETLEY**,	Professeur,	Varsovie.
M.	**Serge BOUC**,	Directeur de recherche,	Amiens.
Mme	**Nathalie WAHL**,	Professeure,	Copenhague.

Remerciements

Je suis vivement reconnaissant à Nathalie Wahl, Serge Bouc et Stanisław Betley d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire et de leur lecture attentive. Je remercie également Jérôme Scherer, Geoffrey Powell, Hans-Werner Henn, Benoît Fresse, Vincent Franjou et Christian Ausoni d'avoir bien voulu participer au jury de cette habilitation. Je dois également à Geoffrey Powell, qui encadra, avec Lionel Schwartz, à qui je témoigne aussi ma gratitude, ma thèse de doctorat, une très grande part de mon éducation mathématique, et à Vincent Franjou de nombreuses discussions utiles sur les catégories de foncteurs et des sujets connexes, depuis près de dix ans que nous nous côtoyons au laboratoire nantais de mathématiques.

Ma chaleureuse reconnaissance s'adresse bien sûr aussi à Christine Vespa pour notre collaboration régulière, mais aussi pour nos échanges fréquents et ses encouragements amicaux au-delà de nos articles communs, à Teimuraz Pirashvili qui a exercé une influence sur mes recherches qui dépasse de beaucoup l'article que nous avons cosigné, ses travaux innombrables et féconds sur les catégories de foncteurs constituant une source d'inspiration constante. Je remercie également Gaël Collinet et James Griffin pour notre travail commun sur la stabilité homologique, qui a joué un rôle important pour me familiariser avec les foncteurs polynomiaux sur les groupes libres (non abéliens) qui sont devenus progressivement un de mes thèmes de prédilection. Cela me permet de témoigner derechef ma gratitude à Nathalie Wahl, pour le mini-cours remarquable qu'elle donna à Strasbourg en 2010 et qui constitua le point de départ de ma collaboration avec Gaël et James, ainsi que pour ses invitations à Copenhague et les discussions stimulantes auxquelles elles ont donné lieu.

De nombreux autres collègues ont nourri mes réflexions mathématiques de façon fructueuse ; à défaut de liste exhaustive, j'aimerais au moins remercier ici Nariya Kawazumi, Henning Krause, Oscar Randal-Williams, Steven Sam et Antoine Touzé. Certains mathématiciens que je n'ai jamais rencontrés ont inspiré de façon significative mes recherches, comme Andrei Suslin (notamment ses travaux sur l'excision en K-théorie algébrique, mais aussi l'appendice fondateur de [FFSS99]) et Alexander Scorichenko (dont la thèse constitue le point de départ de nombreux de mes articles) ou, par l'empreinte générale fondamentale qu'ils ont marquée sur la topologie algébrique et l'algèbre homologique, deux géants regrettés, Alexandre Grothendieck et Daniel Quillen.

Ma gratitude s'adresse également à Jacques Darné, dont j'ai encadré le mémoire de M2 et co-encadre la thèse : la qualité et la rigueur de son travail, son autonomie et la pertinence des questions qu'il soulève rendent ces tâches très stimulantes.

L'atmosphère à la fois studieuse et conviviale qui règne au laboratoire de mathématiques Jean Leray a ponctué les quelque dix années écoulées à Nantes entre mon doctorat et la présente habilitation. Je tiens notamment à remercier mon cobureau Hossein Abbaspour, l'équipe des gestionnaires, les bibliothécaires, les informaticiens et les membres de l'équipe de Topologie, Géométrie et Algèbre.

Depuis cinq ans, la collaboration avec les comédiens d'Athénor et de l'équipe des *n+1* m'apporte beaucoup, à travers tant nos interventions dans des établissements scolaires que nos discussions décalées autour du sens et de la pratique quotidienne des mathématiques. Ma

gratitude va notamment à Léo Larroche, avec qui je donne de temps à autre, avec grand plaisir, l'*impromptu mathématique* que nous avons conçu ensemble — avec Léo comme premier auteur, en dépit de la coutume qui prévaut pour la signature des articles mathématiques, dois-je ajouter.

Je tiens également à remercier mes camarades du Syndicat National des Travailleurs de la Recherche Scientifique : les discussions et analyses que nous partageons contribuent à élargir ma vision de la recherche et nos actions à défendre une conception de la science comme activité collective, désintéressée, et fondamentalement une (j'aurais envie d'écrire, par déformation professionnelle, *connexe*), conception menacée mais essentielle pour l'avenir des mathématiques.

Je remercie enfin mes parents pour le soutien moral et logistique qu'ils m'ont apporté pour mener à bien l'aventure scientifique et surtout administrative que constitue une habilitation à diriger des recherches.

Introduction

À partir de la fin des années 1990, les catégories de foncteurs se sont révélées un outil puissant pour déterminer certains groupes d'homologie stable de familles de groupes (discrets) remarquables. Ainsi Betley [Bet99] et Suslin ([FFSS99], appendice) ont-ils montré, indépendamment, que l'homologie des foncteurs entre espaces vectoriels sur un corps fini k calcule stablement l'homologie du groupe linéaire $GL_n(k)$ (le terme « stablement » signifiant *pour n assez grand*, ou, *lorsqu'on passe à la colimite sur n*) à coefficients *polynomiaux* (nous reviendrons ultérieurement sur ce terme). Scorichenko [Sco00] a étendu très rapidement ce résultat profond aux groupes linéaires sur un anneau quelconque. Peu après, Betley [Bet02] montrait une propriété analogue (d'ailleurs plus élémentaire) pour l'homologie des groupes symétriques. La majorité des travaux de recherche que j'ai menés après ma thèse de doctorat, dont ce mémoire présente une synthèse, ont consisté à étudier l'homologie stable d'autres familles de groupes à l'aide de cette approche.

Mes premières investigations dans cette voie ont concerné les groupes orthogonaux sur un corps fini. Conduites en collaboration avec Chr. Vespa et publiées dans [DV1], elles nous ont donné l'occasion de développer un cadre formel général à cette fin (voir le chapitre 3 du présent mémoire). Celui-ci donne des hypothèses sur une petite catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{C}, +, 0)$, dont on suppose que l'unité 0 est objet initial, et un objet X de $\mathcal{C}$ pour que l'homologie stable des groupes d'automorphismes $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X^{+n})$ à coefficients tordus par un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$, c'est-à-dire le groupe abélien gradué

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*(\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X^{+n}); F(X^{+n})),$$

s'exprime à partir de l'homologie stable des mêmes groupes à coefficients constants et de l'homologie $H_*(\mathcal{C}; F)$ de $\mathcal{C}$ à coefficients dans F. Plus précisément, cette homologie stable à coefficients tordus est alors naturellement isomorphe à $H_*(\mathcal{C} \times G_\infty; F)$, où le groupe stable $G_\infty := \operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X^{+n})$ opère trivialement sur F. On renvoie au théorème 3.4 pour l'énoncé précis. Ce résultat général ne constitue toutefois, la plupart du temps, qu'une première étape, car le calcul de l'homologie $H_*(\mathcal{C}; F)$ s'avère presque toujours hors d'atteinte directe, dans les cas intéressants. Pour mener des calculs effectifs ou obtenir des informations qualitatives substantielles, on cherche à comparer les homologies de différentes catégories (à travers un foncteur monoïdal qui est l'identité sur les objets et induit un isomorphisme entre groupes d'automorphismes), l'une entrant dans ce cadre formel, et l'autre se prêtant aux méthodes de détermination d'homologie des foncteurs qui ont fait leurs preuves depuis la fin des années 1980, grâce aux travaux de T. Pirashvili, notamment. Cette comparaison homologique nécessite la plupart du temps une hypothèse de *polynomialité* sur les coefficients.

La notion de *foncteur polynomial*, introduite, entre catégories de modules, dès le début des années 1950 par Eilenberg et Mac Lane [EML54] constitue l'un des fils conducteurs de mes travaux. Le cadre usuel pour cette notion ne s'avère pas toujours suffisant, par exemple lorsqu'on s'intéresse à l'homologie des groupes de congruences ou des groupes d'automorphismes des groupes libres induisant l'identité sur l'abélianisation (cf. infra). Sur certaines catégories monoïdales dont les flèches sont des monomorphismes, il existe une notion de foncteur polynomial — en fait, il existe *plusieurs* variantes de polynomialité dans ce contexte ; la plus utile pour nous — car adaptée à l'étude de phénomènes *stables* — est celle, définie et étudiée dans mon travail [DV3] avec Vespa, de *foncteur faiblement polynomial* (voir la section 1.3).

Les différentes notions de foncteur polynomial donnent tout d'abord lieu à de nombreux problèmes de classification et de structure, apparentés à la théorie des représentations, qui sont loin d'avoir livré tous leurs mystères, même dans les cas classiques. Ces problèmes concernent la structure des foncteurs polynomiaux (ou analytiques, c'est-à-dire colimites de sous-foncteurs polynomiaux) eux-mêmes mais aussi l'étude de foncteurs plus généraux à l'aide de foncteurs polynomiaux. Nous survolons un certain nombre de ces questions au chapitre 1. L'un de ses résultats principaux, tiré de [DV3], est le théorème 1.10. Énonçons-le dans le cas particulier le plus utile dans la suite. Soient $\mathbf{ab}$ la catégorie des groupes abéliens $\mathbb{Z}^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, et $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$ la catégorie avec les mêmes objets, les morphismes étant les monomorphismes linéaires scindés, le scindement étant donné dans la structure.

Théorème 1 (avec Vespa)**.** *Le foncteur canonique* $\mathbf{S}(\mathbf{ab}) \to \mathbf{ab}^{op} \times \mathbf{ab}$ *induit, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, une équivalence entre les catégories de foncteurs faiblement polynomiaux de degré au plus* n *vers* $\mathbf{Ab}$ *modulo ceux de degré au plus* $n-1$*, et donc avec la catégorie* $\prod_{i+j=n} \mathbb{Z}[\Sigma_i \times \Sigma_j]$-$\mathbf{Mod}$.

Le fait que les foncteurs polynomiaux sur la catégorie $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$ ne se comportent pas si différemment des bifoncteurs polynomiaux sur la catégorie *additive* $\mathbf{ab}$ (c'est-à-dire des foncteurs polynomiaux sur $\mathbf{ab}^{op} \times \mathbf{ab}$), et des principes intuitifs analogues pour d'autres catégories, constituent un leitmotiv de ce mémoire, qui se décline, au-delà du théorème 1, sur le plan (co)homologique.

Les questions d'algèbre homologique sur les foncteurs polynomiaux se déclinent en trois facettes, étroitement liées (de nombreuses méthodes communes reviennent pour les aborder) :

1. calculs de groupes d'extensions (ou de torsion) entre foncteurs polynomiaux ;
2. comparaison de groupes d'extensions dans les catégories de foncteurs polynomiaux et dans les catégories de foncteurs quelconques ;
3. critères d'annulation en (co)homologie pour des foncteurs polynomiaux.

Je me suis très peu penché sur la première question ; de nombreux calculs hautement non triviaux ont été menés à partir du début des années 1990 (voir [FLS94], [FFSS99]...) pour l'aborder, qui n'ont pas peu contribué à l'essor du domaine : il apparaît clairement que *les foncteurs polynomiaux sont des objets sur lesquels on peut calculer*, au moins sur des catégories additives, ou la catégorie des groupes libres de type fini.

La deuxième question, abordée dans le chapitre 2, constitue en quelque sorte une digression dans ce mémoire, dans la mesure où les résultats présentés (correspondant aux articles [D6], qui généralise le travail [Pir93] de Pirashvili, et [DPV], avec Pirashvili et Vespa) sont indépendants des considérations ultérieures. Néanmoins, en sus de son intérêt intrinsèque et de ses relations avec diverses théories cohomologiques (pour le cas d'une catégorie source additive, la résolution de la question est consubstantielle de la compréhension des liens entre homologie des foncteurs et foncteurs dérivés stables non additifs à la Dold-Puppe ou cohomologie de Mac Lane), elle utilise des méthodes tout à fait analogues à celles mises en œuvre pour la résolution des deux autres questions susmentionnées.

Mon intérêt principal pour la troisième question provient de son rôle crucial dans la comparaison de l'homologie de différentes catégories de foncteurs à coefficients polynomiaux, pièce maîtresse du programme évoqué plus haut. Nous nous sommes fondés le plus souvent sur le critère d'annulation homologique de Scorichenko [Sco00] (voir le théorème 4.4), dont la généralité, l'efficacité et la simplicité s'avèrent remarquables. Dans le travail [D7], une version non additive de ce critère (pour des foncteurs sur la catégorie des groupes libres de rang fini) intervient de façon importante ; gageons que la méthode qu'a inaugurée Scorichenko, en changeant le point de vue sur les effets croisés (usuellement définis comme *foncteurs* entre catégories de foncteurs, Scorichenko en introduit des variantes, qui s'annulent sur les mêmes foncteurs, et qui sont des *transformations naturelles* entre endofoncteurs d'une catégorie de foncteurs), a encore quelques nouveaux résultats fructueux à fournir sur l'homologie des foncteurs.

Résultats liés aux foncteurs sur une catégorie additive : groupes linéaires, groupes unitaires, groupes de congruences

Après le travail [DV1] relatif aux groupes orthogonaux (ou symplectiques) sur un corps fini, dont la partie d'homologie des foncteurs repose sur des arguments « concrets » de foncteurs de Mackey (non généralisables à des groupes orthogonaux généraux), l'article [D4] a étendu le résultat aux groupes unitaires (ou symplectiques) sur un anneau à involution quelconque, ou plus généralement, sur une petite catégorie additive à dualité, grâce au critère de Scorichenko. Ce cadre général englobe les groupes linéaires sur un anneau arbitraire et clarifie même l'intervention de la catégorie des monomorphismes scindés, *le scindement étant fixé*, d'une catégorie additive [1], variante de l'approche originelle de Scorichenko qui permet d'en simplifier quelques aspects techniques.

Théorème 2. *Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive à dualité, engendrée par un objet A (au sens où tout objet de $\mathcal{A}$ est isomorphe à un facteur direct de A^n pour un $n \in \mathbb{N}$) et $F : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ un foncteur analytique. Il existe un isomorphisme naturel de groupes abéliens gradués*
$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*\big(U_{n,n}(A); F(A^{2n})\big) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}\big(H_*(U_{\infty,\infty}(A);\mathbb{Z})[SD^2], F\big)$$
où $U_{n,n}(A)$ désigne le groupe unitaire associé à A^{2n} muni de la forme hermitienne hyperbolique canonique, $U_{\infty,\infty}(A) := \operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} U_{n,n}(A)$ et SD^2 désigne le foncteur contravariant de $\mathcal{A}$ vers les ensembles associant à un objet l'ensemble des formes hermitiennes éventuellement dégénérées sur celui-ci.

Cet énoncé est le corollaire 5.4 de [D4] (dans le présent mémoire, voir le théorème 4.3 et la proposition 4.2).

Si l'on suppose connue l'homologie à coefficients constants $H_*(U_{\infty,\infty}(A))$, le membre de droite de l'isomorphisme du théorème 2 est accessible au calcul pour des catégories additives $\mathcal{A}$ et des foncteurs analytiques F assez gentils. Des exemples concrets d'application sont donnés à la section 4.2 (qu'on tire de [D4], § 5.3). Le cas des groupes linéaires (théorème de Scorichenko déjà évoqué) constitue bien sûr l'un des plus importants.

Dans le cas de la catégorie des modules libres de rang fini sur un anneau commutatif $\Bbbk$, on remarque que le théorème 2 ne traite que de groupes orthogonaux hyperboliques. Il est naturel de s'intéresser à l'homologie stable d'autres suites de groupes orthogonaux, comme les groupes orthogonaux « euclidiens » $O_n(\Bbbk)$. On ne dispose pas d'un analogue général du théorème précédent dans ce cas ; toutefois, certains cas particuliers sont accessibles, comme l'énoncé suivant (théorème 4.15, tiré de la dernière section de [D4]).

Théorème 3. *Soient k un corps commutatif et F un foncteur analytique de la catégorie $\mathbf{Vec}_k$ des k-espaces vectoriels de dimension finie vers les groupes abéliens. Il existe un isomorphisme naturel de groupes abéliens gradués*
$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*\big(O_n(k); F(k^n)\big) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathbf{Vec}_k}\big(H_*(O_\infty(k);\mathbb{Z})[\mathrm{S}^2], F\big)$$
où S^2 désigne la composée de la deuxième puissance tensorielle sur k et de la dualité des k-espace vectoriels.

1. On trouvera également, au début de la section 5 de [DV3], d'autres motivations, de théorie des groupes, à l'étude des foncteurs polynomiaux sur la catégorie des groupes abéliens libres de rang fini avec monomorphismes scindés (et scindement donné). Elles constituent l'objet de la thèse de doctorat de Jacques Darné.

On s'attend à ce que l'homologie des foncteurs sur de petites catégories additives permette des avancées dans la compréhension de l'homologie stable d'autres groupes reliés aux groupes linéaires : les groupes linéaires *sur un anneau sans unité* ou, de façon équivalente, les sous-groupes de congruences des groupes linéaires (des questions analogues se posent pour les groupes unitaires, dans le cadre général évoqué précédemment). Cette question est abordée dans le chapitre 6 ; elle nécessite de revisiter l'appareil formel de [DV1] et ne constitue pour l'instant qu'un programme de recherche, lié à l'excision en K-théorie algébrique (l'origine de ce projet remonte à la découverte du travail [Sus95] de Suslin) et à la mesure de son défaut (d'une manière non homotopique). Nous nous contenterons ici de l'illustrer par la conjecture suivante, dans laquelle on se montre à dessein évasif sur la catégorie source (qui est une catégorie de monomorphismes scindés) — voir la conjecture 6.15 pour plus de précision.

Conjecture 1. *Soient I un anneau sans unité et d un entier naturel. Le foncteur*

$$\mathbb{Z}^n \mapsto H_d(GL_n(I);\mathbb{Z})$$

est faiblement polynomial de degré au plus $2d$.

Groupes d'automorphismes des groupes libres et leurs sous-groupes IA

Les groupes d'automorphismes des groupes libres, dont l'homologie fait l'objet de nombreux travaux depuis les années 1990 et surtout 2000 (voir entre autres Hatcher-Wahl [HW05], Galatius [Gal11], Satoh [Sat13]), constitue un autre exemple de famille de groupes particulièrement naturelle et intéressante s'insérant dans le formalisme mentionné au début de cette introduction ; il est discuté au chapitre 5. Si l'on note **gr** la catégorie des groupes libres de rang fini (avec les morphismes usuels — de nombreuses autres catégories de groupes libres, avec d'autres morphismes, interviennent dans les démonstrations de nos résultats, mais elles ne sont pas nécessaires pour les énoncés principaux), nous parlerons d'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients covariants (resp. contravariants, bivariants) pour désigner la colimite $\underset{n\in\mathbb{N}}{\operatorname{colim}} H_*(\mathrm{Aut}(F_n);T(F_n))$ (resp. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\operatorname{colim}} H_*(\mathrm{Aut}(F_n);U(F_n))$, $\underset{n\in\mathbb{N}}{\operatorname{colim}} H_*(\mathrm{Aut}(F_n);V(F_n,F_n))$) pour des foncteurs $T:\mathbf{gr}\to\mathbf{Ab}$, $U:\mathbf{gr}^{op}\to\mathbf{Ab}$, $V:\mathbf{gr}^{op}\times\mathbf{gr}\to\mathbf{Ab}$.

Le premier résultat obtenu à ce sujet par des méthodes fonctorielles (dont de nombreux cas particuliers avaient été obtenus auparavant par des méthodes topologiques moins directes) peut s'exprimer comme suit. C'est le théorème 5.2 de ce mémoire, tiré de l'article [DV2].

Théorème 4 (avec Vespa)**.** *L'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients covariants analytiques réduits est nulle.*

Pour des coefficients contravariants analytiques, la situation s'avère plus délicate, et l'on ne dispose pas de résultat complet sur les entiers. Néanmoins, on peut conclure rationnellement, comme le montre [D7] (voir le théorème 5.7 du présent mémoire).

Théorème 5. *Soient $T:\mathbf{gr}^{op}\to\mathbf{Vec}_{\mathbb{Q}}$ un foncteur analytique et $n\in\mathbb{N}$. Il existe un isomorphisme naturel*

$$\underset{r\in\mathbb{N}}{\operatorname{colim}} H_n(\mathrm{Aut}(F_r);T(F_r)) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Tor}_i^{\mathbf{gr}}(T,\Lambda^j_{\mathbb{Q}}\circ\mathfrak{a})$$

où $\Lambda^j_{\mathbb{Q}}$ désigne la j-ème puissance extérieure rationalisée et $\mathfrak{a}$ le foncteur d'abélianisation.

Ce résultat permet des calculs complets, grâce au travail [Ves] de Vespa, notamment lorsque T est une puissance symétrique ou extérieure du foncteur $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Q})$, confirmant les valeurs prédites par Randal-Williams dans [RW10], et tout dernièrement montrées (d'une manière indépendante de la nôtre) par ce dernier dans [RW16].

On s'attend à ce que la méthode développée pour établir le théorème ci-avant permette également une description fonctorielle de l'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients bivariants analytiques rationnels (voir le théorème 5.18, conditionné à la conjecture 5.17).

Nous pensons que l'homologie des foncteurs devrait permettre des progrès sur l'étude homologique, particulièrement difficile (on ne dispose que de très peu de renseignements à ce sujet, dès le degré 2), de la suite des groupes

$$IA_n := \operatorname{Ker}\big(\operatorname{Aut}(F_n) \twoheadrightarrow GL_n(\mathbb{Z})\big),$$

qui s'insère dans le même cadre formel que les groupes de congruences (voir la section 6.2). On termine ainsi le chapitre 6 en discutant la conjecture suivante (ouverte pour tous les $d \geq 2$), à comparer à la conjecture 1 ci-avant.

Conjecture 2. *Soit d un entier naturel. Le foncteur*

$$\mathbb{Z}^n \mapsto H_d(IA_n; \mathbb{Z})$$

est faiblement polynomial de degré au plus $3d$.

Bibliographie de l'auteur

[D1] A. Djament, *Foncteurs de division et structure de $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$ dans la catégorie $\mathcal{F}$*, Annales de l'Institut Fourier **57** n°6 (2007), p. 1771-1823.

[D2] A. Djament, *Foncteurs en grassmanniennes, filtration de Krull et cohomologie des foncteurs*, Mémoire de la Société mathématique de France n°111 (2007).

[D3] A. Djament, *Le foncteur $V \mapsto \mathbb{F}_2[V]^{\otimes 3}$ entre $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels est noethérien*, Annales de l'Institut Fourier **59** n°2 (2009), p. 458-490.

[DV1] A. Djament et C. Vespa, *Sur l'homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus*, Annales scientifiques de l'ENS **43**, fascicule 3 (2010), p. 395-459.

[D4] A. Djament, *Sur l'homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux*, Journal of K-theory, Volume 10/Issue 01/August 2012, p. 87-139.

[CDG] G. Collinet, A. Djament et J. Griffin, *Stabilité homologique pour les groupes d'automorphismes des produits libres*, International Mathematics Research Notices 2013, n°19, p. 4451-4476.

[DV2] A. Djament et C. Vespa, *Sur l'homologie des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients polynomiaux*, Commentarii Mathematici Helvetici 90, n°1, p. 33-58, 2015.

[DV3] A. Djament et C. Vespa, *Foncteurs faiblement polynomiaux*, prépublication disponible sur https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00851869.

[D5] A. Djament, *Des propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux*, Fundamenta Mathematicae **233** (2016), p. 197-256.

[D6] A. Djament, *Groupes d'extensions et foncteurs polynomiaux*, Journal of the London Mathematical Society (2) **92** (2015), n°1, p. 63–88.

[DPV] A. Djament, Teimuraz Pirashvili et Christine Vespa, *Cohomologie des foncteurs polynomiaux sur les groupes libres*, Documenta Mathematica **21** (2016), p. 205-222.

[D7] A. Djament, *Décomposition de Hodge pour l'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres*, prépublication disponible sur https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01214646.

Travaux d'exposition et de synthèse

[Dhst] A. Djament, *Homologie stable des groupes à coefficients polynomiaux*, chapitre de l'ouvrage *Lectures on Functor Homology* édité par Vincent Franjou et Antoine Touzé, Progress in Mathematics n°311, Birkhäuser, 2015.

[Dbki] A. Djament *La propriété noethérienne pour les foncteurs entre espaces vectoriels [d'après A. Putman, S. Sam et A. Snowden]*, séminaire Bourbaki 2014, Astérisque **380** (2016), p. 35-60.

Chapitre 1

Généralités sur la structure des catégories de foncteurs

Dans ce chapitre, nous présentons le sujet d'étude principal de ce mémoire, à savoir les catégories de foncteurs et notamment les foncteurs polynomiaux, en mettant l'accent sur les questions de théorie des catégories abéliennes y afférentes (notamment de finitude), en lien avec la théorie des représentations. Nous discutons les constructions et résultats principaux de [DV3] et [D5], avec quelques incursions liées à [Dbki] et aux travaux plus anciens [D1], [D3] et surtout [D2]. Les travaux récents d'autres auteurs (notamment [CEFN14], [SS] et [PS]) ont permis un renouveau dans l'étude des propriétés de finitude des catégories de foncteurs ; ils ont grandement motivé la réalisation de [D5] et interviendront également en bonne place dans ce chapitre.

1.1 Notations, rappels et historique

Commençons par donner des notations qui nous serviront dans tout ce mémoire.

Si a et b sont deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$, on notera $\mathcal{C}(a,b)$ l'ensemble des morphismes de $\mathcal{C}$ de source a et de but b. On désigne par **Ens**, **Grp** et **Ab** les catégories des ensembles, des groupes et des groupes abéliens respectivement, avec les morphismes usuels. Les petites sous-catégories pleines **ens**, **gr** et **ab** ont pour objets les $\mathbf{n} := \{1,\dots,n\}$, $\mathbb{Z}^{*n}$ (l'étoile désignant le produit libre) et $\mathbb{Z}^n$ respectivement, pour $n \in \mathbb{N}$.

On s'intéressera parfois à d'autres catégories ensemblistes : Θ (notée souvent FI dans la littérature — cf. [CEF15], par exemple) et Ω sont les sous-catégories de **ens** ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont les foncteurs injectives et surjectives respectivement. On désigne par Γ la catégorie des ensembles pointés $[n] := \{0,\dots,n\}$, où 0 est le point de base, pour $n \in \mathbb{N}$ (les morphismes étant les fonctions préservant le point de base).

Si A est un anneau [1], on note A-**Mod** la catégorie des A-modules à gauche et A-**mod** la sous-catégorie pleine des A-modules libres A^n, pour $n \in \mathbb{N}$. Le symbole $\Bbbk$ désigne un anneau commutatif non nul « de base » (ainsi, les produits tensoriels non spécifiés seront pris sur $\Bbbk$, sauf mention du contraire).

Si M est un objet d'une catégorie additive $\mathcal{A}$ et E un ensemble fini, on note $M^{\oplus E}$ ou $M[E]$ la somme de copies de M indexées par E ; on étend cette notation au cas où E est un ensemble infini, lorsque $\mathcal{A}$ possède des sommes infinies. Si A est un anneau un G un monoïde, la notation $A[G]$ doit être comprise dans **Ab** et désigne ainsi la A-algèbre de G.

1. Sauf mention expresse du contraire, les anneaux sont supposés unitaires et associatifs, mais non nécessairement commutatifs.

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ sont des catégories, avec $\mathcal{C}$ petite, on note $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{A}$ (les morphismes étant les transformations naturelles). Si $\mathcal{A}$ possède des limites ou des colimites, il en est de même dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$, et celles-ci se calculent au but (cf. [ML98], qui constitue notre référence privilégiée pour les notions catégoriques générales). En particulier, si $\mathcal{A}$ est une catégorie *abélienne*, alors il en est de même pour $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$. Ce type de catégorie abélienne, ainsi que des sous-catégories de foncteurs polynomiaux, constituent le cadre principal de ce mémoire, notamment la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \Bbbk\text{-}\mathbf{Mod})$, notée aussi $\mathcal{F}(\mathcal{C}; \Bbbk)$. On notera qu'un cadre plus général (mais dans lequel les formalismes de foncteurs polynomiaux ne s'appliquent pas) est celui des catégories de foncteurs *additifs* d'une petite catégorie préadditive (i.e. enrichie sur $\mathbf{Ab}$) vers une catégorie abélienne. (On doit à l'article [Mit72] de B. Mitchell une étude systématique des propriétés de base de ces catégories abéliennes, notamment du produit tensoriel au-dessus de la catégorie préadditive source et de la notion de foncteur plat, dont l'article en question montre qu'elle se comporte comme celle de module plat.)

Une version du lemme de Yoneda fournit un isomorphisme

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})(M[\mathcal{C}(t, -)], F) \simeq \mathcal{A}(M, F(t))$$

(on suppose ici que la catégorie abélienne $\mathcal{A}$ possède des sommes directes arbitraires) naturel en les objets t, M et F de $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$ et $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ respectivement. En particulier, si $\mathcal{A}$ admet un ensemble de générateurs, il en est de même pour $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$, et les $M[\mathcal{C}(t, -)]$ engendrent cette catégorie lorsque M (resp. t) parcourt un tel ensemble (resp. l'ensemble $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ des objets de $\mathcal{C}$). Une conséquence d'usage courant est que, si $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck (c'est-à-dire une catégorie abélienne avec sommes directes arbitraires, colimites filtrantes exactes et un générateur), alors il en est de même pour $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$. Pour $\mathcal{A} = \Bbbk\text{-}\mathbf{Mod}$, on utilisera la notation

$$P_t^{\mathcal{C}} := \Bbbk[\mathcal{C}(t, -)] \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}(\mathcal{C}; \Bbbk) ;$$

ce foncteur représente l'évaluation en t, il est donc projectif et petit (ou, ce qui revient au même pour un objet projectif, de type fini).

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont des petites catégories, on note

$$\boxtimes : \mathcal{F}(\mathcal{C}; \Bbbk) \times \mathcal{F}(\mathcal{D}; \Bbbk) \to \mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}; \Bbbk)$$

le *produit tensoriel extérieur* (au-dessus de $\Bbbk$), défini par $(F \boxtimes G)(c, d) := F(c) \otimes F(d)$. Le produit tensoriel au-dessus de $\mathcal{C}$ est le foncteur

$$- \underset{\mathcal{C}}{\otimes} - : \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}; \Bbbk) \times \mathcal{F}(\mathcal{C}; \Bbbk) \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Mod}$$

composé du produit tensoriel extérieur $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}; \Bbbk) \times \mathcal{F}(\mathcal{C}; \Bbbk) \to \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}; \Bbbk)$ et du foncteur *cofin* (cf. [ML98]) $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}; \Bbbk) \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Mod}$. Ce bifoncteur commute aux colimites (et est donc en particulier exact à droite) par rapport à chaque variable ; il est *équilibré*, de sorte qu'on peut le dériver à gauche par rapport à l'une ou l'autre des variables indifféremment, obtenant un bifoncteur homologique

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{C}} : \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}; \Bbbk) \times \mathcal{F}(\mathcal{C}; \Bbbk) \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Mod}_{gr}$$

(l'indice *gr* à droite désignant les modules *gradués*).

Dans ce chapitre, nous considérerons assez peu les aspects (co)homologiques de l'étude de la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; \Bbbk)$, qui deviendront en revanche omniprésents par la suite.

L'intérêt systématique pour les catégories de foncteurs remonte probablement à l'introduction des catégories de préfaisceaux, notamment la catégorie des ensembles simpliciaux. Dans le contexte abélien qui nous préoccupe, c'est aussi la topologie algébrique qui a fourni les principaux motifs d'étude intrinsèque des foncteurs. Eilenberg et Mac Lane définirent ainsi dès le début des années 1950 les foncteurs polynomiaux entre catégories de modules dans le chapitre II de l'article [EML54], consacré à l'homologie singulière des espaces topologiques qui portent désormais leur nom. De fait, si n et i sont des entiers fixés, l'endofoncteur $V \mapsto H_i(K(V,n);\mathbb{Z})$ des groupes abéliens possède des propriétés remarquables et est accessible à de nombreux calculs, si V n'est pas trop compliqué, mais il s'agit d'un objet beaucoup plus difficile à décrire comme *foncteur*. Ce type de situation abonde en topologie algébrique. Ainsi, à partir de la correspondance de Dold-Kan, Dold et Puppe [DP61] ont étendu la définition usuelle des foncteurs dérivés (à gauche ou à droite) d'un foncteur entre catégories abéliennes raisonnables à des foncteurs *non additifs*, notion qui interagit de façon féconde avec celle de degré polynomial des foncteurs. Parmi les applications anciennes des foncteurs dérivés à la Dold-Puppe à la théorie de l'homotopie, citons la spectaculaire suite spectrale de Curtis [Cur63, Cur65] ; pour des utilisations beaucoup plus récentes, on pourra consulter par exemple l'article [BM11] de Breen et Mikhailov, ou le travail [Tou13] de Touzé. Une autre intervention des foncteurs, cette fois-ci entre espaces vectoriels sur un corps fini, en topologie algébrique est apparue à partir des années 1980-1990, où Henn, Lannes et Schwartz [HLS93] ont mis en évidence des liens profonds entre ces foncteurs et les modules instables sur l'algèbre de Steenrod, qui forment une catégorie abélienne dont la structure fine a des applications homotopiques remarquables, comme l'a montré Lannes [Lan92].

Signalons également l'utilisation des catégories de foncteurs en théorie de l'homotopie *stable* : les Γ-espaces, c'est-à-dire les foncteurs de la catégorie Γ vers les ensembles simpliciaux, constituent un modèle pour les spectres (cf. Lydakis [Lyd99] et Schwede [Sch99]). La catégorie abélienne des Γ-modules, c'est-à-dire des foncteurs $\Gamma \to \mathbf{Ab}$, a été étudiée par Pirashvili (qui a montré dans [Pir00a] son équivalence avec la catégorie des foncteurs $\Omega \to \mathbf{Ab}$) dans [Pir00b] notamment, qui en donne des applications topologiques. Celles-ci ne sont d'ailleurs pas dénuées de liens avec les motivations originelles d'Eilenberg et Mac Lane pour l'étude des foncteurs polynomiaux : dans [Pir96], Pirashvili retrouve, grâce aux Γ-modules, d'une manière remarquablement rapide et conceptuelle des phénomènes dégagés beaucoup plus laborieusement par Mac Lane une quarantaine d'années plus tôt.

L'étude des catégories de foncteurs vers une catégorie abélienne puise également des sources en théorie des représentations, notamment avec le travail d'Auslander [Aus66] sur les foncteurs cohérents. L'introduction explicite du point de vue des foncteurs *polynomiaux* dans la théorie des représentations des groupes symétriques et linéaires remonte peut-être à l'ouvrage de Macdonald [Mac79] (appendice du chapitre I). Le sujet s'est beaucoup développé en lien avec les représentations des groupes *algébriques* linéaires, depuis le travail inaugural [FS97] de Friedlander et Suslin sur les foncteurs *strictement* polynomiaux. Ceux-ci n'interviendront pas dans ce mémoire, mais ils possèdent des liens féconds avec les foncteurs polynomiaux usuels, auxquels nous nous intéresserons, comme l'illustre l'article [FFSS99] de Franjou-Friedlander-Scorichenko-Suslin.

Nous évoquerons dans les chapitres ultérieurs l'essor qu'a connu l'étude (co)homologique des catégories de foncteurs et ses interactions avec d'autres théories (co)homologiques, à partir des années 1990.

La plupart des travaux susmentionnés (à l'exception des considérations représentationnistes autour des foncteurs cohérents), ainsi que ceux présentés dans le présent mémoire, concernent des foncteurs *polynomiaux* (ou analytiques, c'est-à-dire colimites de foncteurs polynomiaux). En effet, qu'il s'agisse de résultats de classification ou de propriétés (co)homologiques, ce sont ces foncteurs qui se sont avérés les plus abordables et les plus utiles dans les applications. La structure des catégories de foncteurs (sans hypothèse polynomiale) pose également des problèmes profonds, dans lesquels les foncteurs polynomiaux ou analytiques jouent parfois un rôle crucial, au moins conjecturalement. Ainsi, dans la catégorie $\mathcal{F}(k\text{-}\mathbf{mod};k)$, traditionnellement notée $\mathcal{F}(k)$, où k est un corps *fini*, les objets localement finis sont exactement les foncteurs analytiques (voir par exemple [Kuh94]). Conjecturalement, les sous-quotients de la filtration de Krull de cette catégorie sont équivalents à des catégories de foncteurs analytiques explicites (voir [D2], § 12.2).

Une avancée remarquable a récemment été obtenue par Putman, Sam et Snowden dans les questions de structure globale des catégories de foncteurs ; à la différence des approches utilisées auparavant (cf. Piriou [Pir97], Powell [Pow98b, Pow98c, Pow98a, Pow00] et [D1, D2, D3]) pour aborder la conjecture, énoncée par Lannes et Schwartz à la fin des années 1980, selon laquelle la catégorie abélienne $\mathcal{F}(k)$ est localement noethérienne lorsque k est un corps fini, ils n'utilisent pas les techniques de foncteurs polynomiaux mais des méthodes combinatoires inspirées des bases de Gröbner (mentionnons que, quelque trente ans plus tôt, G. Richter [Ric86] avait établi des résultats très similaires à ceux de Putman-Sam-Snowden autour des bases de Gröbner, mais sans utiliser ensuite les arguments de changement de base à la source qui permettent de passer à des catégories de foncteurs beaucoup plus intéressantes). Ils montrent notamment :

Théorème 1.1 (Sam-Snowden [SS], Putman-Sam [PS])**.** *Si k est un corps fini, la catégorie $\mathcal{F}(k)$ est localement noethérienne.*

Si l'anneau $\Bbbk$ est noethérien, la catégorie $\mathcal{F}(\Gamma^{op};\Bbbk)$ est localement noéthérienne.

(Le résultat vaut également pour $\mathcal{F}(\Gamma;\Bbbk)$, mais est alors presque évident, et pour $\mathcal{F}(\Theta;\Bbbk)$, cas également abordé par Sam et Snowden mais plus facile et déjà traité dans [CEF15] lorsque $\Bbbk$ est un corps de caractéristique nulle et dans [CEFN14] dans le cas général.)

Pour une présentation plus détaillée de ces travaux et de leur contexte, on renvoie à [Dbki]. Signalons toutefois deux problèmes naturels qui leur sont liés. Le premier provient de ce que la propriété noethérienne est établie dans [PS] pour certains foncteurs par des méthodes issues des bases de Gröbner, analogues à celles de [SS], mais dans des catégories qui ne semblent *pas* de Gröbner (ni quasi-Gröbner) au sens de [SS], ce qui entraîne un certain nombre de complications techniques.

Problème 1.2. *Peut-on généraliser les notions de catégories de Gröbner et quasi-Gröbner de [SS] afin d'y inclure les catégories étudiées dans [PS] ?*

Le problème suivant, généralisation très ambitieuse du précédent, demeure un Graal dans l'étude des propriétés de finitude des catégories de foncteurs.

Problème 1.3. *Peut-on trouver une condition nécessaire et suffisante simple sur une petite catégorie $\mathcal{C}$ dans laquelle les ensembles de morphismes $\mathcal{C}(a,b)$ sont tous finis pour que $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ soit une catégorie localement noethérienne pour toute catégorie abélienne localement noethérienne $\mathcal{A}$?*

1.2 Foncteurs fortement polynomiaux

Le cadre le plus général dans lequel on peut étendre sans presque aucun changement la définition et les propriétés de base des foncteurs polynomiaux entre catégories de modules de [EML54] est celui de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$, où $\mathcal{C}$ est une petite catégorie monoïdale symétrique (dans beaucoup de cas intéressants, la structure monoïdale est la somme catégorique) dont l'unité est objet nul et $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne. On renvoie pour cela à la section 2 de [HPV15]. Néanmoins, dans de nombreuses situations, des foncteurs qui n'entrent pas dans ce cadre possèdent des propriétés analogues aux propriétés polynomiales classiques. Typiquement, les catégories sources sont monoïdales symétriques, mais sans objet nul : ce sont des catégories de monomorphismes.

Dans [DV3], on considère des catégories de foncteurs $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ où $(\mathcal{C},+,0)$ est une petite catégorie monoïdale symétrique dont l'unité 0 est objet initial et $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, qu'on supposera de Grothendieck par commodité. Pour tout objet x de $\mathcal{C}$, on note $\tau_x : \mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A}) \to \mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ le foncteur de précomposition par $x + - : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. L'unique morphisme $0 \to x$ induit une transformation naturelle $\mathrm{Id} \simeq \tau_0 \to \tau_x$ dont le conoyau et le noyau sont notés respectivement δ_x (foncteur différence associé à x) et κ_x.

Définition 1.4 (DV3)**.** Le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ est dit *fortement polynomial* de degré fort au plus d si, pour tout $(x_0, \dots, x_d) \in (\mathrm{Ob}\,\mathcal{C})^{d+1}$, on a $\delta_{x_0} \circ \cdots \circ \delta_{x_d}(F) = 0$.

On donne également, dans la section 2 de [DV3], une caractérisation des foncteurs fortement polynomiaux en termes d'*effets croisés*, qui permet de retrouver la définition usuelle dans le cas où 0 est objet nul de $\mathcal{C}$.

Exemple 1.5.

1. Les foncteurs fortement polynomiaux de degré fort au plus 0 sont exactement les quotients des foncteurs constants ([DV3], proposition 1.8).
2. La catégorie source Θ, avec la réunion disjointe comme structure monoïdale, est particulièrement favorable : tous les foncteurs de type fini de $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathcal{A})$ sont fortement polynomiaux. En fait, un foncteur est de type fini si et seulement s'il est fortement polynomial et à valeurs de type fini ; plus techniquement, un foncteur est fortement polynomial si et seulement s'il est à support fini. On renvoie à [DV3] (proposition 4.8) et [D5] (proposition 4.4) pour plus de détails sur ces propriétés élémentaires.

   Les foncteurs de $\mathcal{F}(\Theta; \mathbb{Z})$ abondent en topologie et en algèbre ; le lecteur pourra consulter [CEF15] pour de nombreux exemples et motivations.
3. Soit $\mathcal{B}$ une petite catégorie additive. On note $\mathbf{M}(\mathcal{B})$ la sous-catégorie possédant les mêmes objets et dont les morphismes sont les monomorphismes possédant un scindement. On note également $\mathbf{S}(\mathcal{B})$ la catégorie avec les mêmes objets que $\mathcal{B}$ et dont les morphismes sont les monomorphismes scindés de $\mathcal{B}$, *le scindement étant donné dans la structure*. La somme directe de $\mathcal{B}$ induit une structure monoïdale symétrique sur $\mathbf{M}(\mathcal{B})$ et $\mathbf{S}(\mathcal{B})$, dont 0 est objet initial ; les foncteurs canoniques $\mathbf{S}(\mathcal{B}) \to \mathbf{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$ (qui sont l'identité sur les objets) sont monoïdaux (au sens fort). Les foncteurs sur $\mathbf{M}(\mathcal{B})$ et surtout sur $\mathbf{S}(\mathcal{B})$ (notamment pour $\mathcal{B} = \mathbf{ab}$) constituent l'un des principaux exemples qui motivent le travail [DV3]. Certaines des raisons à cela, de nature homologique, apparaîtront clairement dans les chapitres ultérieurs de ce mémoire (on pourra également consulter [Dbki], § 1.2) ; d'autres, de nature plus algébrique (reliés à la structure des groupes d'automorphismes des groupes libres), sont détaillés dans la section 5 de [DV3].

   Pour tout entier $d \in \mathbb{N}$, $V \mapsto \mathrm{sl}(V)^{\otimes d}$ (où $\mathrm{sl}(V)$ désigne le $\Bbbk$-module des endomorphismes de V de trace nulle) définit un foncteur de $\mathcal{F}(\mathbf{S}(\Bbbk\text{-}\mathbf{mod}); \Bbbk)$ qui est fortement polynomial de degré $2d$.
4. Soit $\mathcal{D}$ une petite catégorie additive munie d'un foncteur de dualité $\mathcal{D}^{op} \to \mathcal{D}$. On peut définir la notion d'objet hermitien (non dégénéré) de $\mathcal{D}$; ces objets hermitiens forment une petite catégorie $\mathbf{H}(\mathcal{D})$, qui est monoïdale symétrique, avec l'unité 0 objet initial, pour la somme hermitienne (voir le début de la section 4.1 pour plus de précisions). Si $\mathcal{B}$ est une petite catégorie additive, la catégorie monoïdale $\mathbf{S}(\mathcal{B})$ est équivalente à $\mathbf{H}(\mathcal{B}^{op} \times \mathcal{B})$, où $\mathcal{B}^{op} \times \mathcal{B}$ est munie de la dualité canonique, qui échange les deux facteurs du produit cartésien. De nombreuses considérations de [DV3] sont effectuées dans le contexte de catégories d'objets hermitiens, qui n'est pas plus compliqué que celui des catégories $\mathbf{S}(\mathcal{B})$.

La classe des foncteurs fortement polynomiaux de degré au plus d de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est stable par quotients, extensions, colimites quelconques, mais pas, en général par sous-foncteur (contrairement à ce qui arrive dans le cas usuel où $\mathcal{C}$ a un objet nul). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur constant $\mathbb{Z}$ de $\mathcal{F}(\Theta; \mathbb{Z})$, qui est fortement polynomial de degré 0, possède un sous-foncteur $\mathbb{Z}_{\geq n}$ nul sur $\mathbf{i}$ pour $i < n$ et égal à $\mathbb{Z}$ ailleurs, dont le degré fort est exactement n. Tout cela nous conduit, dans [DV3], à introduire une autre notion de polynomialité dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$, plus maniable et plus appropriée dans la plupart des applications.

1.3 Foncteurs faiblement polynomiaux

Le changement de point de vue fondamental par rapport à la situation usuelle consiste à ne plus travailler dans la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ mais dans une catégorie quotient (cf. [Gab62], chapitre III, par exemple), notée $\mathbf{St}(\mathcal{C},\mathcal{A})$, dans laquelle on supprime les « phénomènes instables », définie, suivant [DV3], en tuant les foncteurs F *stablement nuls*, c'est-à-dire tels que la somme des sous-objets $\kappa_x(F)$, pour $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, égale F (on vérifie aisément que ces foncteurs forment une sous-catégorie *localisante* de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$; dans $\mathbf{Fct}(\Theta,\mathcal{A})$, par exemple, F est stablement nul si et seulement si $\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} F(\mathbf{n}) = 0$).

On vérifie que les endofoncteurs τ_x et δ_x de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ induisent des endofoncteurs de $\mathbf{St}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ (qu'on note encore de la même façon) ; ces foncteurs sont *exacts*, alors que, dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$, δ_x n'est généralement qu'exact à droite. C'est cette exactitude qui explique le meilleur comportement de la définition d'*objet polynomial de degré au plus* d de $\mathbf{St}(\mathcal{C},\mathcal{A})$, qui est la copie de celle de la section précédente : $X \in \operatorname{Ob}\mathbf{St}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ est polynomial de degré au plus d si $\delta_{x_0} \circ \cdots \circ \delta_{x_d}(X) = 0$ pour tout $(d+1)$-uplet $(x_0,\dots,x_d)$ d'objets de $\mathcal{C}$. On montre (proposition 1.22 de [DV3]) que la sous-catégorie pleine $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C},\mathcal{A})$ (notée simplement $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C};\Bbbk)$ pour $\mathcal{A} = \Bbbk\text{-}\mathbf{Mod}$) de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ formée de ces foncteurs est bilocalisante, c'est-à-dire épaisse et stable par limites et colimites. On montre également sans trop de peine que le foncteur canonique $\mathcal{A} \to \mathcal{P}ol_0(\mathcal{C},\mathcal{A})$ est une équivalence.

Un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ est dit *faiblement polynomial de degré faible au plus* d si son image dans $\mathbf{St}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ appartient à $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C},\mathcal{A})$. On note qu'un objet de $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C},\mathcal{A})$ peut ne posséder *aucun* représentant de degré *fort* au plus d dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$, et ce dès le degré $d = 1$ (voir [DV3], § 1.4).

Avant d'en dire davantage sur la structure de ces objets, revenons sur le cadre où les foncteurs fortement et faiblement polynomiaux sont définis, qui est susceptible de plusieurs généralisations. D'une part, on peut s'intéresser à une catégorie but non plus abélienne, mais, par exemple, *semi-abélienne*, comme la catégorie des groupes. D'autre part, on peut s'intéresser à des catégories sources plus générales. Il semble raisonnable de partir d'une petite catégorie monoïdale dont l'unité est objet initial, mais l'hypothèse de symétrie constitue une restriction gênante dès lors qu'on veut catégorifier des phénomènes portant sur les représentations des groupes de tresses ou de difféotopie, par exemple. En l'absence d'hypothèse supplémentaire sur la structure monoïdale, il semble peu probable de parvenir à des notions utiles, l'existence d'un isomorphisme $\tau_x \circ \tau_y \simeq \tau_y \circ \tau_x$ de commutation entre deux foncteurs de translation par des objets x et y de $\mathcal{C}$ étant utilisée couramment pour établir les propriétés de base des foncteurs polynomiaux. L'hypothèse d'une catégorie monoïdale source *tressée* pourrait fournir une première généralisation utile ; toutefois, dans certaines circonstances, cette condition est sans doute encore trop restrictive. Dans [RWW], Randal-Williams et Wahl dégagent la notion de catégorie monoïdale *prétressée* (qui se traduit par l'existence d'isomorphismes $x + y \simeq y + x$ vérifiant les relations de tressage mais des conditions de fonctorialité affaiblies en x et y) et montrent sa pertinence pour étudier, par exemple, la stabilité homologique à coefficients tordus pour les groupes de tresses.

Problème 1.6. *Étendre les définitions et propriétés des foncteurs fortement ou faiblement polynomiaux de [DV3] au cas de catégories* $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ *où* $\mathcal{C}$ *est une petite catégorie monoïdale symétrique prétressée dont l'unité est objet initial (*$\mathcal{A}$ *étant toujours une catégorie abélienne raisonnable).*

Notons que l'article [RWW] introduit également une notion de polynomialité (voir sa définition 4.10), plus forte que notre notion de foncteur fortement polynomial (elle met en jeu également des conditions impliquant les foncteurs κ_x). Cela rend naturelle la question suivante.

Problème 1.7. *Explorer systématiquement les différentes variantes de la notion de foncteur polynomial liées à celle de [RWW] et à celles précédemment introduites, ainsi que leurs* *interactions.*

Revenons maintenant au cas classique où $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale symétrique dont l'unité est objet *nul*. Même dans des situations particulièrement favorables, la description fine des catégories $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C};\Bbbk)$ s'avère délicate, dès le cas $d=2$, voire totalement hors de portée. (Voir [BDFP01], [HV11] et [HPV15] pour des résultats partiels.)

Remarque 1.8. L'un des seuls cas faciles est celui de la catégorie $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{ab};\mathbb{Q})$, équivalente à $\prod_{i=0}^{d}\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_i]$-**Mod**. La situation n'est pas aussi simple dans le cas non abélien de $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{gr};\mathbb{Q})$; toutefois, cette catégorie demeure raisonnable : elle est de dimension globale finie et les calculs d'extensions y sont largement accessibles (cf. [DPV], § 4), ce qui motive le problème suivant.

Problème 1.9. *Peut-on donner une description explicite « simple » des catégories $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{gr};\mathbb{Q})$?*

(Le théorème 6.3 de [HPV15] donne une description en termes de pesudo-foncteurs de Mackey, mais on peut s'attendre à disposer d'une équivalence avec une catégorie plus simple lorsque le but est la catégorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels.)

Les catégories quotients $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C},\mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ se montrent beaucoup plus souvent accessibles que $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C},\mathcal{A})$. Ainsi, lorsque la structure monoïdale sur $\mathcal{C}$ est une somme ou un produit catégorique, $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C},\mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ est équivalente à la catégorie des multifoncteurs $T:\mathcal{C}^d\to\mathcal{A}$ qui sont additifs par rapport à chacune des d variables et *symétriques*, au sens où, pour chaque élément σ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ et tous objets $x_1,\dots,x_d$ de $\mathcal{C}$, un isomorphisme $T(x_1,\dots,x_d)\simeq T(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(d)})$ est donné, ces isomorphismes étant assujettis à des conditions de compatibilité qu'on omet. Ce résultat classique se réduit, pour $\mathcal{C}=A$-**mod** (pour un anneau arbitraire A) et $\mathcal{A}=\mathbf{Ab}$, à l'équivalence de notre catégorie quotient avec celle des modules à droite sur l'algèbre de groupe tordue de $\mathfrak{S}_d$ sur l'anneau $A^{\otimes d}$ (muni de l'action canonique du groupe symétrique), résultat qui remonte à Pirashvili [Pir88b].

L'un des principaux objectifs de [DV3] consiste à étudier les catégories $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C},\mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ dans le cas où $\mathcal{C}$ est l'une des catégories mentionnées dans l'exemple 1.5. Notre approche scinde la question en deux étapes indépendantes.

Tout d'abord, $\mathcal{C}$ étant une petite catégorie monoïdale symétrique dont l'unité est objet initial, on construit une catégorie monoïdale symétrique $\tilde{\mathcal{C}}$ avec les mêmes objets, dont l'unité est objet nul et munie d'un foncteur monoïdal $\mathcal{C}\to\tilde{\mathcal{C}}$ possédant une propriété universelle. Les morphismes sont donnés par $\tilde{\mathcal{C}}(a,b)=\underset{\mathcal{C}}{\operatorname{colim}}\,\tau_b\mathcal{C}(a,-)$. (On renvoie à la section 3 de [DV3] pour les détails.) Cette construction est très similaire à celle de la catégorie notée $<\mathcal{C},\mathcal{C}>$ dans [Gra76] (p. 3), due à Quillen. On montre (théorème 3.8 de [DV3]) que le foncteur $\mathcal{C}\to\tilde{\mathcal{C}}$ induit une équivalence de catégories $\mathcal{P}ol_d(\tilde{\mathcal{C}},\mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\tilde{\mathcal{C}},\mathcal{A})\to\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C},\mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ pour chaque $d\in\mathbb{N}$.

L'étude des foncteurs polynomiaux sur $\tilde{\mathcal{C}}$ peut se mener directement pour la catégorie ensembliste $\mathcal{C}=\Theta$. En effet, le théorème de Pirashvili à la Dold-Kan implique facilement une équivalence de Morita entre $\widetilde{\Theta}$ et la catégorie des ensembles finis avec *bijections*; le degré polynomial d'un foncteur sur $\widetilde{\Theta}$ est le plus grand entier n tel que l'évaluation de son image dans la catégorie des foncteurs sur ladite catégorie de bijections soit non nulle en $\mathbf{n}$. Pour les catégories $\mathcal{C}$ du type $\mathbf{M}(\mathcal{B})$ et $\mathbf{S}(\mathcal{B})$, où $\mathcal{B}$ est une petite catégorie additive ou, plus généralement, du type $\mathbf{H}(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ est une petite catégorie additive à dualité, on s'inspire de résultats de Vespa [Ves08] pour établir que le foncteur d'oubli $\widetilde{\mathbf{H}(\mathcal{D})}\to\mathcal{D}$ induit une équivalence de catégories $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{D},\mathcal{A})\to\mathcal{P}ol_d(\widetilde{\mathbf{H}(\mathcal{D})},\mathcal{A})$ pour chaque $d\in\mathbb{N}$.

Finalement, on obtient (théorème 6.18 de [DV3]) :

Théorème 1.10 (avec Vespa)**.** *Soient $\mathcal{D}$ une petite catégorie additive à dualité, $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck et d un entier. Le foncteur d'oubli $\mathbf{H}(\mathcal{D})\to\mathcal{D}$ induit une équivalence de catégories*

$$\mathcal{P}ol_d(\mathcal{D},\mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{D},\mathcal{A})\xrightarrow{\simeq}\mathcal{P}ol_d(\mathbf{H}(\mathcal{D}),\mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathbf{H}(\mathcal{D}),\mathcal{A}).$$

Parmi les questions de classification ouvertes pour les foncteurs polynomiaux (dans le cadre général de [DV3]), signalons un problème naturel, dans une situation non additive. On anticipe ici sur le chapitre 5, qui introduira une catégorie monoïdale symétrique (avec l'unité objet initial) $\mathcal{G}$ dont les objets et la structure monoïdale sont les mêmes que dans $\mathbf{gr}$ (i.e. les groupes libres de rang fini avec le produit libre), et qui possède deux foncteurs canoniques, l'un covariant, l'autre contravariant, vers $\mathbf{gr}$ (ces foncteurs sont monoïdaux et sont l'identité sur les objets).

Problème 1.11. *Le foncteur canonique $\mathcal{G} \to \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr}$ induit-il des équivalences de catégories $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr}, \mathcal{A}) \to \mathcal{P}ol_d(\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{A})$?*

Peut-on décrire les catégories $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{G}; \Bbbk)/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{G}; \Bbbk)$?

1.4 Propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux

Dans [D5], on étudie des propriétés de finitude, notamment la propriété noethérienne, mais aussi des variantes de la présentation finie, des foncteurs fortement et faiblement polynomiaux dans le contexte précédent, ainsi que des objets de la catégorie abélienne quotient $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$. (Pour plus de détails sur les notions générales de finitude dans les catégories abéliennes, on pourra se reporter à [Gab62] ou [Pop73].) Le cas des foncteurs fortement polynomiaux ne pose pas trop de problème : sous une hypothèse légère sur $\mathcal{C}$, vérifiée dans tous les exemples usuels, un foncteur fortement polynomial qui prend des valeurs noethériennes est lui-même noethérien (proposition 5.7 de [D5]).

On montre également que, sous la même hypothèse légère sur $\mathcal{C}$, si X est un objet polynomial de $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ dont l'image dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ par le foncteur section s (l'adjoint à droite au foncteur canonique) prend des valeurs noethériennes, alors X est noethérien ([D5], corollaire 8.6). Ce résultat est plus difficile que le précédent ; il s'appuie sur la propriété fondamentale du foncteur s (proposition 6.4 de [D5], qui en constitue le cœur) qui, toujours sous la même hypothèse sur $\mathcal{C}$, assure un bon comportement de ce foncteur et de ses dérivés à droite, sur les objets polynomiaux de $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$. Précisément, cette propriété fondamentale stipule que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, il existe un objet x de $\mathcal{C}$ tel que pour tout objet X de $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C}, \mathcal{A})$:

— $\tau_x(sX)$ est *fortement* polynomial de degré fort au plus d ;
— $\tau_x(\mathbf{R}^i s(X)) = 0$ pour tout entier $i > 0$;
— $\mathbf{R}^i s(X) = 0$ pour tout entier $i > d$.

Cette propriété possède un intérêt au-delà des questions de finitude (on l'utilise par exemple pour montrer, à la proposition 8.6 de [D5], que, si $\mathcal{A}$ est équivalente à une catégorie de modules, alors il en est de même pour les $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ — tandis que c'est rarement vrai pour $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$), notamment en ce qu'elle clarifie les relations entre foncteurs faiblement et fortement polynomiaux. Elle se montre par récurrence sur le degré polynomial d, en utilisant plusieurs propriétés de [DV3]. Elle permet ensuite, combinée au critère de noethérianité susmentionné pour les foncteurs fortement polynomiaux et à des préliminaires liés à la notion d'objet de présentation finie, de donner des conditions suffisantes pour qu'un foncteur faiblement polynomial soit noethérien. Malheureusement, les énoncés généraux obtenus nécessitent un nombre assez élevé d'hypothèses de finitude auxiliaires sur la catégorie source $\mathcal{C}$, certes facilement vérifiables dans plusieurs cas intéressants, mais dont on aimerait pouvoir partiellement s'affranchir. On renvoie au § 6.3 de [D5] pour ces énoncés généraux ; contentons-nous d'en donner l'une des applications les plus significatives [2] :

Théorème 1.12. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck localement noethérienne. La catégorie des foncteurs faiblement polynomiaux de $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$ dans $\mathcal{A}$ est localement presque noethérienne,*

2. Certaines applications, notamment en ce qui concerne des catégories de modules sur un anneau fini, ont été surpassées par les travaux de Putman-Sam-Snowden [PS] et [SS], qui obtiennent alors de la noethérianité sans hypothèse polynomiale.

en ce sens qu'elle est engendrée par des foncteurs F dont la restriction à la sous-catégorie pleine $\mathbf{S}(\mathbf{ab})_{\geq n}$ des groupes abéliens $\mathbb{Z}^i$, pour $i \geq n$, de $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$, est un foncteur noethérien si n est assez grand.

(C'est le théorème 6.25 de [D5].)

La principale notion liée à la présentation finie abordée dans [D5] est celle de foncteur à *présentation de support fini*, c'est-à-dire de foncteur « déterminé par ses valeurs sur un nombre fini d'objets ». Plus précisément, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ est à présentation de support fini s'il existe une sous-catégorie pleine $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ ayant un nombre fini d'objets telle que l'application canonique de l'extension de Kan à gauche de la restriction de F à $\mathcal{C}'$ le long de l'inclusion $\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$ vers F soit un isomorphisme (voir [D5], § 2.3 pour davantage de détails). Il serait intéressant de généraliser les résultats de [D5] relatifs à cette notion, par exemple en vue d'applications à la stabilité homologique des groupes à coefficients tordus (voir ci-après la section 3.3 et notamment le problème 3.5).

Problème 1.13. *Supposant que les hypothèses usuelles de [D5] sur $\mathcal{C}$ et le foncteur polynomial F de $\mathcal{F}(\mathcal{C};\Bbbk)$ sont vérifiées, peut-on trouver une résolution projective de F dont tous les termes sont à support fini ? Si oui, peut-on contrôler la taille de ces supports en fonction du degré polynomial de F ?*

(Noter que la question de caractériser les foncteurs F tels qu'existe un ensemble fini S d'objets de la source qui soit support de *tous* les termes d'une résolution projective de F a été résolue par Powell dans [Pow98c] dans les catégories $\mathcal{F}(k)$, où k est un corps fini, et par le théorème A.9 de [D5] dans $\mathcal{F}(\Theta;\Bbbk)$, en s'inspirant fortement de [Pow98c] et du travail [Nag] de Nagpal.)

1.5 Dimension de Krull

Le problème de la détermination de la dimension de Krull des foncteurs et, plus généralement, de la description des sous-quotients de la filtration de Krull [3] des catégories de foncteurs constitue l'un des principaux défis quant aux questions de finitude persistant après les récentes avancées spectaculaires de Putman-Sam-Snowden (cf. théorème 1.1). De fait, pour les foncteurs depuis une catégorie de Gröbner au sens de [SS] vers une catégorie d'espaces vectoriels [4], l'approche combinatoire de Sam et Snowden fournit des renseignements sur la dimension de Krull, en permettant de ramener sa détermination à celle de foncteurs vers la catégorie des *ensembles*. Malheureusement, le passage par changement de base aux catégories sources les plus intéressantes est adapté à la considération de la propriété noethérienne, mais a un effet beaucoup moins agréable sur la dimension de Krull.

Dès lors, malgré l'avancée majeure constituée par le théorème 1.1, les conjectures de [D2] sur la filtration de Krull des catégories $\mathcal{F}(k)$ (pour k un corps fini) conservent l'essentiel de leur mystère. Il serait intéressant de disposer de conjectures plus générales. (Signalons que [D2] émet également une conjecture sur la filtration de Krull de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k);k)$ pour un corps fini k ; il serait utile d'en établir une variante pour $\mathcal{F}(\mathbf{S}(k);k)$. Par ailleurs, la généralisation d'un corps à un *anneau* fini quelconque serait instructive.) Donnons-en ici des variantes dans un contexte combinatoire. Tout d'abord, rappelons que, si $\Bbbk$ est un corps, la catégorie $\mathcal{F}(\Gamma;\Bbbk) \simeq \mathcal{F}(\Omega;\Bbbk)$ est *localement finie* (donc de dimension de Krull nulle), comme on le voit aussitôt sur les foncteurs projectifs $P^{\Omega}_{\mathbf{n}}$, qui sont finis (i.e. de longueur finie). La conjecture selon laquelle la dimension de Krull de $P^{\Gamma^{op}}_{\mathbf{n}}$ est de dimension de Krull n fait partie du folklore mais ne semble jamais avoir été sérieusement étudiée. Afin de la préciser, introduisons quelques notations. Si d est un entier et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, on note $\mathcal{K}_d(\mathcal{A})$ le d-ème étage de sa filtration

3. On renvoie à [Gab62] ou [MR01] pour ces notions.

4. Cette restriction sur la catégorie but est raisonnable pour éviter d'avoir à mêler les problèmes venant de la catégorie source et ceux relatifs à la filtration de Krull de la catégorie but.

de Krull. On note $s_d : \mathbf{ens}^{d+1} \to \mathbf{ens}$ le foncteur de réunion disjointe, et encore de la même façon le foncteur $\Gamma \times \mathbf{ens}^d \to \Gamma$ qu'il induit (on pointe la réunion disjointe par le point de base du premier facteur, qui est pointé). On dispose de bijections canoniques

$$\mathbf{ens}(E, s_d(A_0, \dots, A_d)) \simeq \bigsqcup_{E=E_0 \sqcup \dots \sqcup E_d} \mathbf{ens}(E_0, A_0) \times \dots \times \mathbf{ens}(E_d, A_d)$$

et

$$\Gamma(E, s_d(A_0, \dots, A_d)) \simeq \bigsqcup_{E=E_0 \sqcup \dots \sqcup E_d} \Gamma(E_0, A_0) \times \mathbf{ens}(E_1, A_1) \times \dots \times \mathbf{ens}(E_d, A_d)$$

(où la réunion disjointe est prise sur les décompositions de E tels que le point de base appartienne à E_0), ce dont on déduit que l'adjoint à gauche au foncteur de précomposition $s_d^* : \mathcal{F}(\mathbf{ens}^{op}; \Bbbk) \to \mathcal{F}((\mathbf{ens}^{d+1})^{op}; \Bbbk)$ (resp. $s_d^* : \mathcal{F}(\Gamma^{op}; \Bbbk) \to \mathcal{F}((\Gamma \times \mathbf{ens}^d)^{op}; \Bbbk)$) est un foncteur *exact* ω_d, donné sur les objets par

$$\omega_d(X)(E) = \bigoplus_{E=E_0 \sqcup \dots \sqcup E_d} X(E_0, \dots, E_d).$$

Conjecture 1.14. *Supposons que $\Bbbk$ est un corps. Si X est un foncteur localement fini de $\mathcal{F}((\mathbf{ens}^{d+1})^{op}; \Bbbk)$ (resp. $\mathcal{F}((\Gamma \times \mathbf{ens}^d)^{op}; \Bbbk)$), alors $\omega_d(X)$ appartient à $\mathcal{K}_d(\mathcal{F}(\mathbf{ens}^{op}; \Bbbk))$ (resp. $\mathcal{K}_d(\mathcal{F}(\Gamma^{op}; \Bbbk))$). Plus précisément, le foncteur ω_d induit une équivalence entre la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}((\mathbf{ens}^{d+1})^{op}; \Bbbk)$ (resp. $\mathcal{F}((\Gamma \times \mathbf{ens}^d)^{op}; \Bbbk)$) formée des foncteurs localement finis (qui coïncident avec les foncteurs analytiques dans le cas de Γ) et la catégorie $\mathcal{K}_d(\mathcal{F}(\mathbf{ens}^{op}; \Bbbk))/\mathcal{K}_{d-1}(\mathcal{F}(\mathbf{ens}^{op}; \Bbbk))$ (resp. $\mathcal{K}_d(\mathcal{F}(\Gamma^{op}; \Bbbk))/\mathcal{K}_{d-1}(\mathcal{F}(\Gamma^{op}; \Bbbk))$).*

(Ces questions pourraient s'avérer assez nettement plus simples lorsque $\Bbbk$ est de caractéristique nulle, en raison de la semi-simplicité des anneaux $\Bbbk[\mathfrak{S}_n]$.)

Pour chercher à aborder cette conjecture en s'inspirant de l'approche de [D2], il est naturel de se poser les questions suivantes, certainement beaucoup plus accessibles.

Problème 1.15. *Supposons que $\Bbbk$ est un corps. Soient i et j des entiers naturels.*

1. *Soient X un foncteur localement fini dans $\mathcal{F}((\mathbf{ens}^{i+1})^{op}; \Bbbk)$ (resp. $\mathcal{F}((\Gamma \times \mathbf{ens}^i)^{op}; \Bbbk)$) et Y un foncteur de $\mathcal{F}((\mathbf{ens}^{j+1})^{op}; \Bbbk)$ (resp. $\mathcal{F}((\Gamma \times \mathbf{ens}^j)^{op}; \Bbbk)$).*
   (a) *A-t-on* $\mathrm{Ext}^*(\omega_i(X), \omega_j(Y)) = 0$ *si $i < j$?*
   (b) *Si $i = j$, le morphisme canonique* $\mathrm{Ext}^*(X, Y) \to \mathrm{Ext}^*(\omega_i(X), \omega_i(Y))$ *est-il un isomorphisme ?*
2. *Peut-on construire des endofoncteurs de $\mathcal{F}((\mathbf{ens}^{d+1})^{op}; \Bbbk)$ (resp. $\mathcal{F}((\Gamma \times \mathbf{ens}^d)^{op}; \Bbbk)$) analogues aux endofoncteurs $\tilde{\nabla}_n$ introduits par Powell dans [Pow98b] (et dont la variante duale est utilisée dans [D2]) relativement aux foncteurs du type $\omega_n(X)$, pour X localement fini, et permettant d'obtenir notamment un « théorème de simplicité » analogue à celui de [Pow98c] (théorème 6.0.1) et à sa généralisation fournie dans [D2] (théorème 16.2.7) ?*

Une manière d'étudier ces questions de dimension de Krull pourrait consister à utiliser les renseignements donnés par Sam et Snowden (voir [SS], § 6) sur la *série de Hilbert* des foncteurs de type fini sur une catégorie de Gröbner, ou quasi-Gröbner. Comme le cas des catégories de Gröbner ne peut pas suffire, pour la raison mentionnée au début de cette section, une telle approche suppose d'utiliser la structure supplémentaire offerte par une catégorie source quasi-Gröbner (typiquement, l'action des groupes symétriques sur les objets, pour les catégories ensemblistes) — voir le problème 11.2 de [SS].

En contrepoint de ces questions ardues, la détermination de la dimension de Krull des foncteurs *analytiques* est souvent beaucoup plus simple. On obtient ainsi dans [D5] (corollaires 8.14 et 8.15) :

Proposition 1.16. *Supposons que $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck localement finie.*

1. *La catégorie abélienne $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathcal{A})$ est localement noethérienne de dimension de Krull 1 ; ses objets de dimension de Krull nulle sont les foncteurs stablement nuls.*
2. *Soit A un anneau fini. La catégorie des foncteurs faiblement analytiques (i.e. qui sont colimites de foncteurs faiblement polynomiaux) de $\mathbf{Fct}(\mathbf{S}(A), \mathcal{A})$ est une catégorie localement noethérienne de dimension de Krull 1, dont les objets de dimension de Krull nulle sont les foncteurs stablement nuls.*

Chapitre 2

Foncteurs polynomiaux et groupes d'extensions

Nous présentons dans ce chapitre le contexte et les résultats principaux des articles [DPV] et [D6].

2.1 Introduction

L'intérêt systématique pour l'homologie des petites catégories remonte probablement aux travail inaugural de Quillen [Qui73] sur la K-théorie algébrique supérieure. Il s'agit toutefois ici d'homologie à coefficients constants ; de plus, les méthodes employées sont de nature homotopique (même si certains arguments catégoriques sous-jacents ont inspiré plusieurs raisonnements relatifs à l'homologie des foncteurs dans de le sens où on l'entend ici) et assez éloignées des techniques de foncteurs polynomiaux auxquelles on s'intéresse présentement. Les prémisses de raisonnements maintenant classiques en homologie des foncteurs se trouvent peut-être dans le travail de Dold et Puppe [DP61]. Celui-ci ne fait pas apparaître directement d'homologie de foncteurs, mais la notion de foncteur polynomial y est utilisée explicitement, et certains résultats peuvent être reformulés en termes d'homologie des foncteurs. On doit à Pirashvili, à partir des années 1980, le réexamen à l'aide d'un point de vue purement fonctoriel de ce type de considérations, notamment dans l'article [Pir88a] qui donne un critère d'annulation en (co)homologie des foncteurs, redoutablement simple, général et efficace, qui est devenu d'usage courant. Il s'agit ici principalement du problème de la détermination de groupes d'extensions (ou de torsion) dans une catégorie du type $\mathcal{F}(\mathcal{A};\Bbbk)$, où $\mathcal{A}$ est une petite catégorie additive, l'un au moins des arguments étant un foncteur polynomial. L'un des premiers calculs concrets difficiles menés dans ce cadre est celui de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(\mathrm{Id},\mathrm{Id})$, où k est un corps fini, réalisé par Franjou, Lannes et Schwartz [FLS94] par des méthodes purement fonctorielles (utilisant, comme ingrédients principaux, le critère de Pirashvili qu'on vient d'évoquer, les complexes de de Rham et Koszul, un lemme d'annulation dû à Kuhn [Kuh95] et relié aux modules instables sur l'algèbre de Steenrod, et plusieurs suites spectrales d'hypercohomologie). Le même résultat avait été obtenu, avec un point de vue complètement différent (sans catégories de foncteurs) et une démonstration plus compliquée, par Breen [Bre78]. Parmi les calculs cohomologiques entre foncteurs polynomiaux sur une catégorie additive réalisés après [FLS94] (et reposant toujours, en partie, sur des idées analogues), signalons, sans prétention à l'exhaustivité, [Fra96], [FP98], [FFSS99], [Tro02] ou, dans le cadre légèrement différent (mais utilisant de nombreuses techniques similaires) des foncteurs polynomiaux stricts, [Tou12]. Dans la catégorie $\mathcal{F}(\Gamma;\Bbbk)$, mentionnons, par exemple, [Pir00b] ou le travail [Bet01] de Betley (qui revient sur le lien avec les foncteurs dérivés stables au sens de Dold-Puppe) ; l'intérêt pour $\mathcal{F}(\mathbf{gr};\Bbbk)$ semble plus récent (cf. [Ves]), mais certains aspects de l'algèbre homologique dans cette catégorie sont déjà abordés par Jibladze et Pirashvili dans [JP91].

En sus des motivations générales pour l'étude des catégories de foncteurs mentionnées à la section 1.1, les calculs de groupes d'extensions (ou de torsion) entre foncteurs polynomiaux trouvent leur origine dans les liens avec de nombreuses autres théories (co)homologiques qui ont été mis peu à peu en évidence. Le premier d'entre eux est l'identification, dans [JP91], de l'homologie de Mac Lane d'un anneau A (introduite dans [ML57]) à l'homologie de foncteurs sur la catégorie additive A-**mod**. Mais l'identification de nombreuses théories homologiques à de l'homologie de foncteurs (pas nécessairement polynomiaux, en l'occurrence) constitue un phénomène courant : elle a été effectuée pour l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique (Pirashvili-Richter [PR02]), l'homologie d'André-Quillen (Pirashvili [Pir03]), l'homologie de Hochschild topologique (Fiedorowicz-Pirashvili-Schwänzl-Vogt-Waldhausen [FPS$^+$95])... Un cas très important d'utilisation de l'homologie des foncteurs pour déterminer d'autres homologies (l'homologie stable de certaines familles de groupes ou, de façon essentiellement équivalente, la K-théorie stable et ses variantes) sera abordé dans le chapitre suivant.

La question que nous allons discuter ici ne concerne pas directement le calcul de groupes d'extensions ou de torsion entre foncteurs ou leurs relations avec des théories (co)homologiques extérieures aux foncteurs, mais procède de considérations très similaires (ainsi, l'un des ingrédients essentiels des résultats présentés dans la section 2.3 est la construction cubique de Mac Lane et ses généralisations, qui constituent le fondement de l'homologie de Mac Lane et de l'identification des foncteurs dérivés stables à la Dold-Puppe à de l'homologie de foncteurs).

Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie monoïdale symétrique dont l'unité est objet nul et $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck (le plus souvent, une catégorie de modules). Pour tout $d \in \mathbb{N}$, le foncteur d'inclusion $i_d : \mathcal{P}ol_d(\mathcal{C},\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ est exact, il induit donc des morphismes

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C},\mathcal{A})}(F,G) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})}(F,G) \tag{2.1}$$

(on dispose de morphismes analogues entre groupes de torsion ; nous tairons ici ce problème dual qui se traite de façon entièrement similaire). Ce morphisme est un isomorphisme pour $i \leq 1$ et un monomorphisme pour $i = 2$ car $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C},\mathcal{A})$ est une sous-catégorie *épaisse* de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$. Son effet en degré supérieur pose des problèmes généralement ardus.

Notons que les catégories $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C},\mathcal{A})$ et $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ se comportent très différemment à maints égards : comme nous l'avons évoqué au chapitre 1, les propriétés de structure globale sont généralement beaucoup plus difficiles dans la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$. D'un autre côté, les propriétés de comparaison susmentionnées de l'homologie des foncteurs à d'autres théories homologiques concernent toutes l'algèbre homologique dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ et non $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C},\mathcal{A})$, et la grande majorité des calculs (co)homologiques entre foncteurs connus relèvent de ce cadre (parmi les rares travaux de calculs de groupes d'extensions dans $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C},\mathcal{A})$, mentionnons celui de Franjou et Smith [FS95]), même lorsque leurs arguments sont des foncteurs polynomiaux et utilisent des méthodes qui leur sont spécifiques. La comparaison fine de ces deux types de catégories semble loin d'avoir livré tous ses secrets. Avant de revenir au problème de l'étude du morphisme naturel (2.1), signalons un problème connexe qui paraît lui aussi difficile et intéressant, au vu des liens profonds déjà mis en évidence entre l'algèbre homologique sur les foncteurs polynomiaux et sur les foncteurs polynomiaux *stricts* (cf. [FS97], [FFSS99]...).

Problème 2.1. *Que dire de l'effet en cohomologie du foncteur exact canonique de la catégorie des foncteurs polynomiaux stricts de degré d sur l'anneau commutatif $\Bbbk$ vers la catégorie $\mathcal{P}ol_d(\Bbbk\text{-}\mathbf{mod};\Bbbk)$?*

(Signalons que la question de la comparaison cohomologique entre les foncteurs polynomiaux stricts sur $\Bbbk$ et $\mathcal{F}(\Bbbk\text{-}\mathbf{mod};\Bbbk)$ est encore très largement ouverte dans le cas général : on ne dispose d'éléments de réponse substantiels à ce problème que lorsque $\Bbbk$ est un corps.)

Quant au morphisme (2.1), commençons par indiquer que le théorème de Pirashvili à la Dold-Kan [Pir00a] implique immédiatement que c'est un isomorphisme (en tout degré i) pour $\mathcal{C} = \Gamma$. Nous verrons que c'est également le cas pour la catégorie des groupes libres $\mathcal{C} = \mathbf{gr}$, dans la section 2.2, mais cela nécessite davantage de travail. Enfin, nous aborderons dans la section 2.3 le cas, le plus étudié (depuis le travail de Pirashvili [Pir93]), où $\mathcal{A}$ est une catégorie additive : la situation est alors nettement plus délicate, et, dès le degré $i = 2$, l'application (2.1) cesse généralement d'être un isomorphisme.

Cet état de fait rend difficile de formuler des conjectures générales à propos de cette application. Toutefois, le cas de la catégorie but des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels semble favorable, la flèche (2.1) étant toujours un isomorphisme pour $\mathcal{C}$ additive. Cela nous conduit à supposer :

Conjecture 2.2. *Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie possédant un objet nul, ainsi que des produits ou des coproduits finis. Alors le foncteur d'inclusion $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C};\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C};\mathbb{Q})$ induit un isomorphisme entre groupes d'extensions.*

Si cette conjecture s'avère exacte, le problème suivant deviendra particulièrement naturel à étudier.

Problème 2.3. *Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie monoïdale dont l'unité est objet nul. Que dire de l'effet du foncteur d'inclusion $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C};\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C};\mathbb{Q})$ en cohomologie ?*

Plus généralement, si $\mathcal{C}$ une petite catégorie monoïdale dont l'unité est objet initial, que dire de l'effet du foncteur d'inclusion $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C};\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathbf{St}(\mathcal{C};\mathbb{Q})$ en cohomologie ?

2.2 Foncteurs sur les groupes libres

Dans [DPV] (théorème 1), on montre :

Théorème 2.4 (avec Pirashvili et Vespa)**.** *Soient $d \in \mathbb{N}$ et F, G des foncteurs de $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{gr};\Bbbk)$. Le morphisme canonique*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}ol_d(\mathbf{gr};\Bbbk)}(F,G) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbf{gr};\Bbbk)}(F,G)$$

de $\Bbbk$-modules gradués est un isomorphisme.

(Le même résultat vaudrait, avec une démonstration totalement analogue, en remplaçant la catégorie but $\Bbbk$-**Mod** par une catégorie abélienne raisonnable quelconque.)

Pour établir ce résultat, on étudie les puissances de l'idéal d'augmentation de l'anneau d'un produit de copies d'un groupe libre *comme foncteurs* en ce groupe. Plus précisément, notant $\mathcal{I}^r_n$, pour tous $r, n \in \mathbb{N}$, le foncteur de $\mathcal{F}(\mathbf{gr};\mathbb{Z})$ associant à G la r-ème puissance de l'idéal d'augmentation de l'anneau du groupe G^n, un raisonnement formel montre que le théorème précédent est équivalent à l'énoncé suivant :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbf{gr};\mathbb{Z})}(\mathcal{I}^{d+1}_n, F) = 0 \quad \text{pour tout } F \text{ dans } \mathcal{P}ol_d(\mathbf{gr};\mathbb{Z}).$$

L'argument procède alors comme suit.

1. On dispose « gratuitement », du fait que $\mathbf{gr}$ est une catégorie avec objet nul et coproduits finis, d'une vaste classe de foncteurs X tels que $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbf{gr};\mathbb{Z})}(X,F) = 0$ pour tout F dans $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{gr};\mathbb{Z})$, à savoir les produits tensoriels de $d+1$ foncteurs réduits (i.e. nuls sur le groupe trivial). Cela provient de l'adjonction somme/diagonale, en reprenant le lemme fondamental d'annulation de Pirashvili ([Pir88a], où cet énoncé apparaît pour une catégorie source additive).
2. Pour $n = 1$, on montre par récurrence sur r que $\mathcal{I}^r_1$ possède une résolution (à gauche) par des foncteurs qui sont produits tensoriels de r foncteurs réduits. Cela est fait explicitement, en utilisant la résolution barre et le fait que l'homologie d'un groupe libre G à coefficients dans $\mathcal{I}^r_1(G)$ n'est pas difficile à calculer fonctoriellement en G.

3. Le cas général procède par récurrence sur n, en utilisant que le gradué de l'anneau de $\mathbb{Z}[G^n]$, où G est un groupe libre, est naturellement isomorphe à la n-ème puissance tensorielle (graduée) du gradué de l'anneau de $\mathbb{Z}[G]$ (on filtre par les puissances de l'idéal d'augmentation ; tout se passe bien car seuls des groupes abéliens sans torsion apparaissent).

L'article [DPV] donne également quelques applications du théorème 2.4 : il calcule (en utilisant aussi [Ves]) la dimension homologique dans les catégories $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{gr};\mathbb{Z})$ de certains foncteurs remarquables (comme les puissances tensorielles de l'abélianisation) et montre que la catégorie $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{gr};\mathbb{Q})$ est de dimension globale $d-1$.

Au vu de [Ves] et [DPV], il apparaît que l'algèbre homologique dans $\mathcal{F}(\mathbf{gr};\mathbb{Z})$ est beaucoup plus accessible que dans son analogue « abélien » $\mathcal{F}(\mathbf{ab};\mathbb{Z})$. Il demeure toutefois encore des questions à explorer, comme le calcul des groupes d'extensions entre puissances symétriques ou extérieures de l'abélianisation (qui est effectué rationnellement dans [Ves], mais pas sur $\mathbb{Z}$) ou l'étude de phénomènes de dualité dans les catégories $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{gr};\mathbb{Q})$. Enfin, signalons que les liens entre la cohomologie des groupes symétriques et l'algèbre homologique dans $\mathcal{F}(\mathbf{gr};\mathbb{Z})$ (mais aussi $\mathcal{F}(\mathbf{ab};\mathbb{Z})$) pourraient peut-être aller au-delà de la proposition 4.4 de [DPV] (qui est assez théorique, en raison du caractère non explicite des foncteurs β_d qu'elle met en jeu).

2.3 Foncteurs sur une catégorie additive

Il est très simple de voir que le morphisme (2.1) n'est pas toujours surjectif en degré $i=2$ lorsque $\mathcal{C}$ est une petite catégorie additive.

Exemple 2.5. Soient p un nombre premier et $1 \leq d < p$ un entier. Il est classique que la catégorie $\mathcal{P}ol_d(\mathbb{F}_p\text{-}\mathbf{Mod};\mathbb{F}_p)$ est semi-simple, de sorte que $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{P}ol_d(\mathbb{F}_p\text{-}\mathbf{Mod};\mathbb{F}_p)}(\mathrm{Id},\mathrm{Id})=0$. En revanche, $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)}(\mathrm{Id},\mathrm{Id}) \simeq \mathbb{F}_p$ (cf. [FLS94]).

Toutefois, ce phénomène n'advient plus pour $d \geq p$. En effet, la classe de l'extension $0 \to \mathrm{Id} \to S^p \to \Gamma^p \to \mathrm{Id} \to 0$ (où S^p est la p-ème puissance symétrique et $\mathrm{Id} \to S^p$ le morphisme de Frobenius ; Γ^p désigne la p-ème puissance divisée, $\Gamma^p \to \mathrm{Id}$ le morphisme de Verschiebung, dual du Frobenius, et $S^p \to \Gamma^p$ la norme) engendre $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)}(\mathrm{Id},\mathrm{Id})$ et les foncteurs S^p et Γ^p sont de degré p.

Instruit de cet exemple typique, il est raisonnable de s'attendre à ce que le morphisme (2.1) soit un isomorphisme dès lors que d est assez grand (i, F et G étant fixés). C'est ce qui arrive *si la catégorie additive $\mathcal{C}$ est sympathique au sens où l'on peut borner* (dans un sens que nous préciserons bientôt) *la torsion dans les groupes abéliens $\mathcal{C}(a,b)$* — en fait, cette condition est également *nécessaire* (au moins avec les groupes abéliens au but).

Un premier résultat important en cette voie est donné dans le travail [Pir93] de Pirashvili :

Théorème 2.6 (Pirashvili)**.** *Soient $d,i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}$ une petite catégorie additive, F et G deux foncteurs de $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C};\mathbb{Z})$. Supposons que :*

1. *les groupes abéliens $\mathcal{C}(a,b)$ sont tous sans torsion ;*
2. *F ou G est additif ;*
3. *$i \leq 2d$.*

Alors le morphisme canonique $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C};\mathbb{Z})}(F,G) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathcal{C};\mathbb{Z})}(F,G)$ est un isomorphisme.

Citons maintenant les résultats principaux obtenus dans [D6]. Dans ce qui suit, $\mathcal{C}$ désigne une petite catégorie additive et p un nombre premier.

Théorème 2.7. *Supposons qu'il existe un entier naturel r tel que, pour tous objets a et b de $\mathcal{C}$, la torsion p-primaire du groupe abélien $\mathcal{C}(a,b)$ soit bornée par p^r.*

Soient $d, n, i \in \mathbb{N}$ tels que $d \leq n$, F un foncteur de $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)$, G un foncteur de $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)$. Alors le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}ol_n(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)}(F,G) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)}(F,G)$$

est un isomorphisme pour $i \leq \left[\frac{n-d+1}{p^r}\right]$ et un monomorphisme pour $i = \left[\frac{n-d+1}{p^r}\right] + 1$.

Le même résultat vaut si l'on échange F et G dans les groupes d'extensions.

(Dans cet énoncé, les crochets désignent la partie entière.)

Dans la suite, on note $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)$ la sous-catégorie des foncteurs *analytiques* de $\mathcal{F}(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)$.

Théorème 2.8. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Pour tout objet a de $\mathcal{C}$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout objet b de $\mathcal{C}$, la torsion p-primaire du groupe abélien $\mathcal{C}(a,b)$ soit bornée par p^r ;*
2. *pour tous objets F et G de $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)$, le morphisme canonique*
$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_\infty(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)}(F,G) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)}(F,G)$$
est un isomorphisme ;
3. *pour tous objets F et G de $\mathcal{P}ol_1(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)$, le morphisme canonique*
$$\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{F}_\infty(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)}(F,G) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{F}(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)}(F,G)$$
est un isomorphisme.

Le résultat qui suit constitue le cœur de la démonstration de l'implication *3⇒1* du théorème précédent.

Proposition 2.9. *Soient A un foncteur additif de $\mathcal{F}(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)$ et $T : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Ab}$ un foncteur additif projectif de la forme $\bigoplus_i \mathcal{C}(-,a_i)$, où (a_i) est une collection d'objets de $\mathcal{C}$. On note $B := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T,\mathbb{F}_p)$, c'est donc un foncteur additif de $\mathcal{F}(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)$.*

On dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\operatorname*{colim}_{d\in\mathbb{N}^*} \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)}(A,B) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \operatorname*{colim}_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)}\big(A, \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z}/p)\circ(T/p^i)\big) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{F}_\infty(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)}(A,B) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)}\big(A, \operatorname*{colim}_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z}/p)\circ(T/p^i)\big) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{F}(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)}(A,B) \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{C};\mathbb{F}_p)}\big(A, \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z}/p)\circ T\big)
\end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales de gauche sont induites par les foncteurs d'inclusion et les flèches verticales de droite sont les morphismes canoniques.

On passe maintenant à des résultats dans lesquels le but des catégories de foncteurs est une catégorie de Grothendieck $\mathcal{A}$ quelconque.

Théorème 2.10. *Supposons qu'il existe un entier $N > 0$ tel que, pour tous objets a et b de $\mathcal{C}$, le sous-groupe de torsion du groupe abélien $\mathcal{C}(a,b)$ soit annulé par N.*

Soient $d, n, i \in \mathbb{N}$ tels que $d \leq n$, F un foncteur de $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C},\mathcal{A})$, G un foncteur de $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{C},\mathcal{A})$. Alors le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}ol_n(\mathcal{C},\mathcal{A})}(F,G) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})}(F,G)$$

est un isomorphisme pour $i \leq \left[\frac{n-d+1}{N}\right]$ et un monomorphisme pour $i = \left[\frac{n-d+1}{N}\right] + 1$.

Le même résultat vaut si l'on échange F et G dans les groupes d'extensions.

Théorème 2.11. *Supposons que la condition suivante soit satisfaite :*

pour tout objet a de $\mathcal{C}$ et tout nombre premier p, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout objet b de $\mathcal{C}$, la torsion p-primaire du groupe abélien $\mathcal{C}(a,b)$ soit bornée par p^r.

Alors, pour tout foncteur analytique F et tout foncteur polynomial G dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$, le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_\infty(\mathcal{C},\mathcal{A})}(F,G) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})}(F,G)$$

est un isomorphisme.

La réciproque est vraie si $\mathcal{A}$ est la catégorie des groupes abéliens ; dans ce cas, si la condition précédente n'est pas réalisée, on peut trouver un foncteur analytique F et un foncteur additif G tels que le morphisme précédent ne soit pas un isomorphisme en degré cohomologique au plus 2.

Indiquons les principaux ingrédients des démonstrations (dont la plupart sont déjà présents dans [Pir93]). Certains sont très formels : utilisation de suites spectrales d'hypercohomologie ou de foncteurs composés induites par des adjonctions. D'autres emploient des outils routiniers en théorie des foncteurs polynomiaux : complexes de type Koszul, lemme d'annulation de Pirashvili.

Un autre outil fondamental, plus spécifique, provient de la *stabilisation à Dold-Puppe généralisée* (qui étend la construction cubique de Mac Lane aux degrés polynomiaux > 1 — cf. les articles [JM98] et [JM04] de Johnson et McCarthy), qui, pour chaque $d \in \mathbb{N}$, donne une théorie cohomologique $\mathcal{H}^*_{(d)}$ (ainsi qu'une variante duale en homologie $\mathcal{H}^{(d)}_*$) sur les foncteurs de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ dont l'annulation jusqu'en degré i est équivalente à l'annulation de $\mathrm{Ext}^*_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})}(F,-)$ jusqu'en degré i pour tout F dans $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C},\mathcal{A})$. Cette théorie cohomologique possède plusieurs vertus : elle commute aux colimites filtrantes (ce qui permet de surmonter des problèmes de non-commutation des foncteurs $\mathrm{Ext}^*_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})}(F,-)$ aux colimites filtrantes) et se prête à des calculs partiels (inspirés du calcul de l'homologie stable des espaces d'Eilenberg-MacLane — le cas particulier $d = 1$ — et reposant sur le théorème de Dold-Thom) qui permettent de contrôler la torsion.

L'un des points de départ des démonstrations est l'observation suivante : si V est un groupe abélien de type fini, le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel des fonctions polynomiales $V \to \mathbb{F}_p$ s'identifie à la colimite sur $i \in \mathbb{N}$ de l'espace vectoriel de toutes les fonctions $V/p^i \to \mathbb{F}_p$.

Quant aux conditions sur la torsion p-primaire bornée, elles interviennent par l'intermédiaire du lemme suivant, qui constitue un exercice.

Lemme 2.12. *Soit V un groupe abélien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *la torsion p-primaire de V est bornée ;*
2. *le morphisme canonique $\underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{colim}}\, \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(V/p^n,\mathbb{Z}/p) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(V,\mathbb{Z}/p)$ est un isomorphisme.*

Les considérations liées à la stabilisation à la Dold-Puppe généralisée [1] qui interviennent dans ces questions conduisent à poser le problème.

Problème 2.13. *Peut-on déterminer les foncteurs $\mathcal{H}^{(d)}_*(\Bbbk[-]) : \mathbf{ab} \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Mod}$, pour $d > 1$?*

1. Laquelle est un cas particulier d'homologie des foncteurs, mais sur la catégorie Γ — voir Richter [Ric01].

Chapitre 3

Homologie des foncteurs et homologie stable des groupes (théorie)

Ce chapitre expose la problématique générale de l'étude de l'homologie stable de familles infinies de groupes, dont le lien avec l'homologie des foncteurs a été mis en évidence au début de [DV1], qui fournit un cadre axiomatique que nous déclinerons dans les chapitres ultérieurs dans des cas particuliers remarquables. Cette problématique générale touche également à d'autres questions (qu'on ne fait ici qu'effleurer) qui relèvent de formalismes analogues, mais de méthodes en général très différentes, de nature plus topologique : la stabilité homologique (voir la section 6.3, où l'on présente, outre la stratégie générale d'approche du problème, un cas exceptionnel qui se traite commodément à l'aide des catégories de foncteurs, celui des groupes d'automorphismes des produits libres, qui fait l'objet de l'article [CDG]) et l'homologie stable à coefficients constants, au fort parfum de K-théorie algébrique.

On pourra aussi se référer à la présentation synthétique de ces problèmes (et de la mise en œuvre de la méthode générale pour les groupes linéaires ou unitaires, abordée au chapitre 4 du présent mémoire) donnée dans [Dhst].

3.1 Introduction

Le problème général de l'*homologie stable* d'une famille de groupes est le suivant. Supposons donnée une suite infinie

$$\mathrm{G} := G_0 \to G_1 \to \cdots \to G_n \to G_{n+1} \to \dots$$

de morphismes de groupes. On s'intéresse à la suite de $\Bbbk$-modules gradués

$$H_*(G_0;\Bbbk) \to H_*(G_1;\Bbbk) \to \cdots \to H_*(G_n;\Bbbk) \to H_*(G_{n+1};\Bbbk) \to \dots$$

qu'elle induit en homologie ; on peut considérer plus généralement de l'homologie à coefficients tordus. Autrement dit, on se donne une suite

$$\mathrm{M} := M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_n \to M_{n+1} \to \dots$$

de $\Bbbk$-modules, où M_n est muni d'une action de G_n et $M_n \to M_{n+1}$ est équivariant pour l'action de G_n (qui opère sur M_{n+1} par restriction le long de $G_n \to G_{n+1}$). Cela permet de former la suite de $\Bbbk$-modules gradués

$$H_*(G_0;M_0) \to H_*(G_1;M_1) \to \cdots \to H_*(G_n;M_n) \to H_*(G_{n+1};M_{n+1}) \to \dots$$

autour de laquelle plusieurs questions générales se posent :

1. Peut-on calculer entièrement les termes de cette suite ?
2. Y a-t-il *stabilité homologique*, c'est-à-dire : pour tout $i \in \mathbb{N}$, le morphisme $H_i(G_n; M_n) \to H_i(G_{n+1}; M_{n+1})$ est-il un isomorphisme pour n assez grand et, le cas échéant, avec quelle borne de stabilité ?
3. Peut-on calculer l'*homologie stable* de G à coefficients dans M, c'est-à-dire la colimite $H_*^{st}(\mathrm{G}; \mathrm{M})$ de la suite précédente ?

Naturellement, les deuxième et troisième questions apparaissent avec acuité du fait que la réponse à la première question est presque toujours un *non* désespéré, dans les cas d'intérêt, même pour les coefficients constants. (Les groupes symétriques, dont Nakaoka [Nak60, Nak61] a calculé l'homologie, constituent l'une des plus notables exceptions.) Nous évoquerons le problème de la stabilité homologique, qui requiert des méthodes assez spécifiques, dans la section 3.3. Quant au problème du calcul de l'homologie stable, auquel l'essentiel de la suite de ce mémoire sera consacré, il s'appréhende différemment à coefficients constants et à coefficients tordus, dans le cadre qu'on va développer. Même si les raisons profondes de ce phénomène ne semblent pas très claires, on constate que l'homologie des foncteurs constitue un outil puissant pour calculer $H_*^{st}(\mathrm{G}; \mathrm{M})$ *à partir de* $H_*^{st}(\mathrm{G}; \Bbbk)$, sans rien dire sur cette homologie stable à coefficients constants. On n'obtient de résultats substantiels que lorsque les coefficients possèdent une propriété de polynomialité (ou d'analycité) appropriée, nécessitant des raisonnements « concrets » adaptés à chaque situation ; dans ce chapitre, on se contentera d'aborder la partie théorique, plus facile, qui sert de point de départ à cette approche.

Remarque 3.1. Même lorsque $\Bbbk$ est un corps, il n'est pas anodin de passer de l'homologie à la *co*homologie stable à coefficients tordus, ne serait-ce que parce que la « bonne » façon de stabiliser en cohomologie n'est pas toujours claire. Pour des phénomènes de ce type qui apparaissent pour les groupes symétriques, où le comportement de l'homologie et de la cohomologie diffèrent largement, on renvoie à Nagpal [Nag].

3.2 Cadre général

Le cadre qu'on présente ici est tiré de la première section [DV1], légèrement retravaillée dans [D4] (une exposition pédagogique en est également fournie dans [Dhst]). Il n'est bien sûr nullement indépendant de celui développé au chapitre 1 !

Hypothèse 3.2. Dans tout ce chapitre, $(\mathcal{C}, *, 0)$ désigne une petite catégorie monoïdale symétrique dont l'unité 0 est objet initial et X un objet de $\mathcal{C}$.

Les groupes qu'on considère sont les $G_n := \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X^{*n})$, avec les morphismes

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X^{*n}) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X^{*(n+1)}) \qquad u \mapsto u * \mathrm{Id}_X.$$

On notera G_∞ la colimite de cette suite de groupes.

Tout foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; \Bbbk)$ fournit une suite de représentations de ces groupes

$$\cdots \to F(X^{*n}) \to F(X^{*(n+1)}) \to \dots,$$

les flèches étant induites par

$$X^{*n} \simeq X^{*n} * 0 \xrightarrow{X^{*n}*(0 \to X)} X^{*n} * X \simeq X^{*(n+1)}.$$

Remarque 3.3. Il existe un autre choix très raisonnable de morphismes (entre les groupes et les coefficients considérés), consistant à utiliser l'« inclusion des n derniers (au lieu des premiers) facteurs » de X^{*n} dans $X^{*(n+1)}$. Cette variante, conjuguée au choix initial en raison du caractère symétrique de la structure monoïdale, induit les *mêmes* morphismes en homologie. Cette observation, très importante, explique pourquoi on ne peut généraliser nos considérations à une catégorie source monoïdale, sans aucune hypothèse d'isomorphisme entre $a * b$ et $b * a$. Néanmoins, il est patent qu'on utilise moins que la symétrie : les résultats de la suite de cette section s'étendent manifestement au cas où la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, *, 0)$ (avec 0 initial) est seulement *pré-tressée* au sens de [RWW].

Notons $\pi : \mathcal{C} \times G_\infty \to \mathcal{C}$ le foncteur de projection (G_∞ est vu comme catégorie à un objet). Pour tous F de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; \Bbbk)$ et $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $G_n \to \mathcal{C} \times G_\infty$ dont la composante $G_n \to \mathcal{C}$ est le foncteur fidèle évident d'image X^{*n} et la composante $G_n \to G_\infty$ est le morphisme de groupes canonique induit un morphisme de $\Bbbk$-modules gradués $H_*(G_n; F(X^{*n})) \to H_*(\mathcal{C} \times G_\infty; \pi^* F)$ naturel en F. On vérifie sans peine que le diagramme

$$\begin{tikzcd} H_*(G_n; F(X^{*n})) \arrow[r] \arrow[d] & H_*(\mathcal{C} \times G_\infty; \pi^* F) \\ H_*(G_{n+1}; F(X^{*(n+1)})) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

commute, de sorte que nos morphismes induisent un morphisme

$$H_*^{st}(\mathrm{G}; F) = \operatorname*{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_*(G_n; F(X^{*n})) \to H_*(\mathcal{C} \times G_\infty; \pi^* F). \tag{3.1}$$

Dans [DV1], on montre le résultat suivant.

Théorème 3.4 (avec Vespa)**.** *Supposons que la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ vérifie les hypothèses suivantes.*

1. *Pour tous objets a et b de $\mathcal{C}$, le morphisme de groupes canonique $\mathrm{Aut}_\mathcal{C}(b) \to \mathrm{Aut}_\mathcal{C}(a*b)$ est un monomorphisme dont l'image est constituée des automorphismes φ de $a * b$ rendant le diagramme*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[dr] & a * b \arrow[d, "\varphi"] \\ & a * b \end{tikzcd}$$

commutatif (où les flèches non spécifiées sont le morphisme canonique déduit de ce que 0 est objet initial de $\mathcal{C}$).

2. *Pour tout morphisme $f \in \mathcal{C}(a, b)$, il existe un automorphisme α de $a * b$ faisant commuter le diagramme*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[drr] & b \arrow[r] & a * b \arrow[d, "\alpha"] \\ & & a * b \end{tikzcd}$$

(les flèches non spécifiées ont la même signification que plus haut).

3. *Pour tout objet a de $\mathcal{C}$, il existe un objet t de $\mathcal{C}$ et un entier naturel n tels que $a * t \simeq X^{*n}$.*

Alors le morphisme (3.1) est un isomorphisme pour tout foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; \Bbbk)$.

La démonstration de ce résultat n'est pas très difficile : par un argument formel de comparaison de foncteurs homologiques, on voit qu'il suffit de traiter le cas où F est un foncteur projectif du type $P_t^\mathcal{C}$, qui s'étudie directement à partir des hypothèses.

La formule de Künneth montre que le but $H_*(\mathcal{C} \times G_\infty; \pi^* F)$ du morphisme (3.1) s'obtient facilement à partir de $H_*(\mathcal{C}; F)$ et $H_*(G_\infty; \Bbbk)$: si $\Bbbk$ est un corps, il est isomorphe au produit tensoriel de ces deux $\Bbbk$-espaces vectoriels gradués ; dans le cas universel $\Bbbk = \mathbb{Z}$, on dispose de suites exactes courtes naturelles (et scindées, de façon non naturelle)

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} H_i(\mathcal{C};F)\otimes H_j(G_\infty;\mathbb{Z}) \to H_n(\mathcal{C}\times G_\infty;\pi^*F) \to \bigoplus_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_i(\mathcal{C};F), H_j(G_\infty;\mathbb{Z})) \to 0.$$

Pour une discussion plus poussée à ce sujet (faisant notamment le lien avec les approches antérieures du même sujet, qui résolvaient le problème de la prise en compte de l'homologie stable à coefficients constants à l'aide de la K-théorie stable — pour le cas où les G_n sont les groupes linéaires sur un anneau fixé — ou des variantes adaptées à la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$), on renvoie à [DV1], § 2.3.

Malheureusement, le théorème 3.4 à lui seul s'avère d'une utilité limitée, car les catégories vérifiant ses hypothèses ne se prêtent pas aux calculs homologiques directs. On s'attache en général à utiliser ces catégories comme simples intermédiaires dont on compare l'homologie à celle d'autres catégories où des outils de calcul homologique efficaces sont disponibles. Cette comparaison se fait par l'intermédiaire d'extensions de Kan dérivées et ne fonctionne en général que pour des foncteurs polynomiaux (ou analytiques). C'est ce qui explique que les résultats obtenus soient plus difficiles à montrer que le théorème 3.4 : il ne suffit plus du tout de tester les choses « à la main » sur des foncteurs projectifs (lesquels ne sont presque jamais analytiques), ou d'autres foncteurs explicites appropriés.

Cette méthode a été mise en œuvre d'abord dans [DV1] pour l'homologie stable des groupes orthogonaux sur un corps fini ; dans ce même article, on l'utilise également dans le seul cas qui semble s'affranchir des difficultés liées à la polynomialité, celui des groupes symétriques. Plus précisément, dans l'appendice E de [DV1], on donne une démonstration courte de résultats dus à Betley [Bet02] sur l'homologie stable des groupes symétriques à coefficients tordus par un Γ-module. La catégorie d'ensembles finis à laquelle on peut directement appliquer le théorème 3.4 est la catégorie Θ (avec la réunion disjointe pour structure monoïdale et $X = \mathbf{1}$) ; pour obtenir un résultat sur la catégorie Γ, on étudie l'effet du foncteur canonique $\Theta \to \Gamma$ en homologie. C'est beaucoup plus simple que dans les situations que nous rencontrerons dans les chapitres suivants, car tous les Γ-modules sont analytiques, et l'extension de Kan appropriée le long dudit foncteur canonique est *exacte*.

3.3 Le problème de la stabilité homologique

Depuis le travail inaugural (non publié) de Quillen sur la stabilité homologique (à coefficients constants), pour les groupes linéaires sur un corps, cette question a suscité un très grand nombre de travaux. Rappelons que la méthode presque toujours employée pour établir la stabilité homologique pour une suite de groupes (G_n) consiste à produire des complexes (semi-)simpliciaux X_n munis d'une action de G_n de telle sorte que :

1. la connectivité de X_n tende vers l'infini avec n ;
2. les stabilisateurs des simplexes de X_n soient de la forme G_i pour $i < n$, ou des groupes dont l'homologie peut se ramener raisonnablement à celle de tels groupes.

On utilise ensuite un argument de suite spectrale pour conclure, par récurrence sur le degré homologique.

Dwyer [Dwy80] a montré que cette stratégie s'appliquait tout aussi bien à l'homologie *à coefficients tordus* appropriés, dans le cas de groupes linéaires sur un anneau raisonnable (dont la classe a été étendue à tous les anneaux possédant un rang stable de Bass fini par van der Kallen [vdK80]). Les hypothèses sur les coefficients correspondent essentiellement à une condition polynomiale, bien qu'elles ne soient pas exprimées en termes fonctoriels.

La stabilité homologique a été établie pour un grand nombre de familles de groupes (groupes symplectiques, orthogonaux, unitaires sur un anneau raisonnable, groupes d'automorphismes des groupes libres, groupes de difféotopie...), dont presque toutes entrent dans le cadre exposé précédemment : groupes d'automorphismes de sommes, au sens de la structure monoïdale, de copies d'un même objet, dans une catégorie monoïdale symétrique, ou parfois seulement (pré-)tressée, dont on peut faire en sorte qu'elle vérifie les hypothèses du théorème 3.4. Dans leur récent travail [RWW] (qui dégage notamment la notion de catégorie monoïdale *pré-tressée*), Randal-Williams et Wahl donnent un cadre formel, inspiré de celui de [DV1], qui permet un traitement unifié du problème de la stabilité homologique, incluant des coefficients tordus (polynomiaux au sens adéquant — [RWW] utilise le terme de *systèmes de coefficients de degré fini*, comme [Dwy80]). Ce travail systématise d'une façon manifestement très proche de l'optimalité la stratégie classique brièvement rappelée plus haut ; toutefois, il nécessite de *supposer* que les complexes appropriés sont hautement connexes. Cela conduit à poser la question suivante (qui constitue assurément un défi ardu) :

Problème 3.5. *Peut-on trouver des hypothèses catégoriques générales sur les catégories monoïdales homogènes au sens de [RWW] assurant que son hypothèse de connectivité LH3 est vérifiée et s'appliquant aux exemples usuels ?*

On peut entendre ce problème comme celui de la catégorification des conditions de Bass et des résultats de connectivité qu'on en déduit (dans un contexte monoïdal général) ; le résoudre permettrait sans doute également de clarifier le rôle de certaines hypothèses techniques de [D5] (notamment, leurs relations avec les conditions de Bass).

Plusieurs travaux récents sont liés à [RWW] mais abordent la stabilité homologique sous un angle un peu différent. À partir du travail classique et important de Charney [Cha84] sur les groupes de congruences, qui montre que la stabilité homologique n'a presque jamais lieu pour ces groupes, même sous de bonnes conditions à la Bass, Putman [Put15] a remarqué qu'on pouvait dégager une notion généralisée de « stabilité » (qu'il nomme *central stability*), qui correspond à une condition polynomiale *forte* dans le cadre exposé au chapitre 1, et qui s'applique à l'homologie de certains groupes congruences assez particuliers, pour lesquels la stabilité usuelle est en défaut. Les résultats de Putman ont été généralisés par Church-Ellenberg-Farb-Nagpal [CEFN14] et Putman-Sam [PS] (dans un cadre formel qui recoupe très largement celui de [RWW]). Nous pensons néanmoins possible d'améliorer ces résultats ; nous y reviendrons dans la section 6.3.

Dans quelques situations exceptionnelles, il est possible d'aborder le problème de la stabilité homologique d'une façon différente de la stratégie générale sur laquelle reposent tous les travaux qu'on vient de mentionner. L'une d'entre elles est mise en œuvre dans [CDG], qui procède en quelque sorte d'une manière inverse de celle de [Put15] : elle part de propriétés polynomiales de l'homologie de groupes « de type congruence » pour établir la stabilité homologique usuelle pour des groupes s'insérant dans le cadre général de la section 3.2.

Plus précisément, si $\mathrm{G} = (G_i)$ est une famille finie de groupes, soit $FR(\mathrm{G})$ le sous-groupe de Fouxe-Rabinovitch du groupe des automorphismes du produit libre Γ des G_i. Rappelons que ce sous-groupe est constitué des automorphismes dont la restriction à chacun des G_i coïncide avec un automorphisme intérieur de Γ. Le groupe des *automorphismes symétriques* $\Sigma\mathrm{Aut}(\mathrm{G})$ de Γ (relativement à la décomposition donnée en produit libre) est le sous-groupe de tous ses automorphismes engendré par le groupe de Fouxe-Rabinovitch, le produit direct des groupes d'automorphismes des G_i et le groupe des automorphismes permutant deux facteurs G_i et G_j isomorphes, un choix d'isomorphismes étant effectué une fois pour toute (ce groupe est un produit semi-direct). De façon classique, le théorème de Kurosh implique que l'inclusion $\Sigma\mathrm{Aut}(\mathrm{G}) \subset \mathrm{Aut}(\Gamma)$ est une égalité lorsque les G_i sont indécomposables pour le produit libre et non isomorphes à $\mathbb{Z}$. Dans [CDG], on montre un résultat de stabilité homologique pour le groupe des automorphismes symétriques d'une famille de groupes. Afin d'éviter des énoncés techniques, bornons-nous au cas où G est la famille constituée de n copies d'un même groupe G et notons $FR_n(G)$ et $\Sigma\mathrm{Aut}_n(G)$ respectivement les groupes $FR(\mathrm{G})$ et $\Sigma\mathrm{Aut}(\mathrm{G})$ correspondants. L'une des observations fondamentales est qu'on peut faire de $\mathbf{n} \to FR_n(G)$ un foncteur, non seulement sur la catégorie Θ des ensembles finis avec injections, mais aussi sur la catégorie $\tilde{\Theta}$ (avec les notations de la section 1.3 — on prendra garde que celles de [CDG] sont un peu différentes).

Les résultats principaux de [CDG] sont les suivants :

Théorème 3.6 (avec Collinet et Griffin). *Pour tout groupe G et tout entier $d \in \mathbb{N}$:*

1. *le foncteur $\mathbf{n} \mapsto H_d(FR_n(G); \mathbb{Z})$ de $\mathcal{F}(\tilde{\Theta}; \mathbb{Z})$ est polynomial de degré au plus $2d$;*
2. *le morphisme canonique $H_d(\Sigma\mathrm{Aut}_n(G); \mathbb{Z}) \to H_d(\Sigma\mathrm{Aut}_{n+1}(G); \mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour $n \geq 2d + 2$.*

La première assertion se montre en utilisant la contractilité, établie par McCullough et A. Miller [MM96], d'un ensemble ordonné muni d'une action appropriée de nos groupes ; la deuxième s'en déduit par des arguments usuels de suite spectrale en utilisant la stabilité pour l'homologie des groupes symétriques (qui, dans le cas de coefficients tordus, apparaît dans Betley [Bet02]).

Le théorème 3.6 établit en particulier la stabilité homologique pour les groupes d'automorphismes des produits libres de copies d'un même groupe G indécomposable pour le produit libre et non monogène infini. Cela répond positivement, pour les groupes de ce type, à une conjecture de Hatcher et Wahl [HW10]. La stabilité homologique pour les groupes d'automorphismes des produits libres, démontrée antérieurement (voir Hatcher-Vogtmann [HV98]), procède de façon différente (elle s'inscrit dans la démarche générale indiquée au début de cette section) et est plus difficile à démontrer que le théorème 3.6. La stabilité homologique pour les groupes d'automorphismes du produit libre de copies d'un groupe du type $A_1 * \cdots * A_n * \mathbb{Z}^{*r}$, où les groupes A_i sont indécomposables pour le produit libre et non monogènes infinis, constitue un travail en cours de James Griffin, qui en a annoncé une démonstration, qui mêle les outils utilisés pour établir le théorème 3.6 et ceux de la démonstration de la stabilité homologique pour les automorphismes des groupes libres.

3.4 Compléments

Aspects fonctoriels de l'homologie stable à coefficients constants

Comme nous l'avons mentionné dans la section 3.1, le problème de la détermination de l'homologie stable de familles usuelles de groupes à coefficients constants se présente tout à fait différemment de celui des coefficients tordus accessibles à une comparaison à l'homologie des foncteurs. Toutefois, dans certains cas bien particuliers, on peut espérer exploiter des méthodes fonctorielles. Le théorème 3.6 constitue un premier exemple d'une telle situation ; mentionnons d'autres cas, maintenant classiques, où des phénomènes de fonctorialité (en un sens *a priori* disjoint de celui où on l'entend dans le reste de ce mémoire) se font jour :

1. dans [Qui72], Quillen établit la nullité de $\tilde{H}_*(GL_\infty(k); \mathbb{F}_p)$, où k est un corps fini de caractéristique p, à partir de la nullité de $\tilde{H}_i(GL_n(\mathbb{F}_{p^d}); \mathbb{F}_p)$ pour d assez grand — précisément, pour $i < d(p-1)$, mais sans condition sur n. Son argument, simple mais astucieux, repose sur l'examen de l'effet en homologie des diagrammes commutatifs d'inclusions de groupes évidentes

$$\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{F}_q) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{F}_q)^l \\ \downarrow & & \downarrow \\ GL_n(\mathbb{F}_{q^l}) & \longrightarrow & GL_{nl}(\mathbb{F}_q) \end{array} ;$$

2. dans [Sus83], Suslin établit que l'inclusion $GL_\infty(k) \subset GL_\infty(K)$ induite par une extension $k \subset K$ de corps *algébriquement clos* induit un isomorphisme en homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/n$, pour tout entier $n > 0$;
3. Bökstedt, Brun et Dupont [BBD98] montrent que l'inclusion canonique $O_n(\mathbb{R}) \times O_1(\mathbb{R}) \hookrightarrow O_{n,1}(\mathbb{R})$ induit un isomorphisme en homologie (à coefficients entiers) de degré i pour $i < n$.

Les deux premiers résultats illustrent que le foncteur associant à un anneau l'homologie stable de son groupe linéaire possède certaines propriétés raisonnables (liées de très près à la K-théorie algébrique) ; toute mise en perspective de celles-ci qui les rapprocherait de phénomènes observés à coefficients tordus à l'aide de l'homologie des foncteurs serait intéressante (signalons à ce propos que, dans [Bet89], Betley établit des résultats d'annulation pour l'homologie stable des groupes linéaires à coefficients polynomiaux en utilisant des arguments de changement de base élémentaires proches de ceux de Quillen ; [Bet89] a été depuis surpassé par le travail de Scorichenko [Sco00], qui emploie d'autres méthodes).

Quant au troisième résultat, il utilise de façon cruciale des arguments géométriques « concrets » qui rendent difficile de généraliser sa démonstration. Il semble toutefois raisonnable, au vu de [BBD98] et de la conjecture de Friedlander-Milnor, de formuler la conjecture suivante, que nous rêverions de savoir aborder par des méthodes fonctorielles.

Conjecture 3.7. *Soient $i \geq 0$ un entier et k un corps ordonné maximal. Les inclusions canoniques $O_n(k) \times O_i(k) \hookrightarrow O_{n,i}(k)$ induisent un isomorphisme en homologie à coefficients entiers lorsque n est assez grand devant le degré homologique.*

D'autres situations où nous pensons que l'homologie des foncteurs peut apporter des résultats sur l'homologie stable à coefficients constants seront abordées au chapitre 6.

Restriction à de « gros » sous-groupes des G_n

Les suites usuelles de groupes entrant dans le cadre discuté dans ce chapitre possèdent des sous-groupes remarquables, comme les groupes alternés dans les groupes symétriques, les sous-groupes $SL_n(\Bbbk)$ de $GL_n(\Bbbk)$... Le formalisme des *systèmes de coefficients abéliens* dans les catégories homogènes de [RWW], § 3.1, permet un traitement unifié de tels sous-groupes pour le problème de la stabilité homologique. Il n'est certainement pas très difficile d'effectuer une telle généralisation pour les questions d'homologie stable que nous avons discutées, de façon à étendre le théorème 3.4 à ce type de sous-groupes.

Une variante de cette question consiste à étudier ce qui arrive quand on remplace les groupes d'automorphismes par de « gros » quotients (comme PGL_n pour GL_n) ; un cadre raisonnable consiste probablement à les quotienter par un sous-groupe inclus dans leur centre.

Familles de groupes non abordées dans la suite de ce mémoire

Les chapitres ultérieurs de ce mémoire se consacrent à l'application (ou à la généralisation, pour le dernier d'entre eux) du théorème 3.4 à plusieurs familles de groupes fondamentales. On peut toutefois tenter d'appliquer le cadre formel de la section 3.2 à d'autres familles de groupes. Mentionnons tout d'abord les groupes de tresses (il s'agit d'un projet commun avec C. Vespa), pour lesquels la généralisation au cadre pré-tressé (voir aussi le problème 1.6, pour les coefficients) s'avérera nécessaire.

Même en restant dans le cadre monoïdal *symétrique*, on peut envisager l'étude d'autres familles de groupes, comme les groupes d'automorphismes de produits directs (ou libres), de copies d'un groupe fixé (étude suggérée par N. Wahl), ou les groupes d'automorphismes d'algèbres de polynômes en un nombre variable d'indéterminées, les groupes d'automorphismes des groupes *nilpotents* libres de classe donnée (projet envisagé avec C. Vespa, également lié à des travaux de M. Szymik)...

Chapitre 4

Homologie stable des groupes unitaires

On discute ici des conséquences du formalisme dévéloppé dans le chapitre précédent dans un contexte où apparaîtront des foncteurs sur des catégories additives, qui nous permettront d'aborder l'homologie stable des groupes linéaires, orthogonaux, symplectiques et unitaires à coefficients analytiques. On y présentera les résultats principaux de [DV1] et [D4]. Contrairement à la question de l'homologie stable à coefficients constants de ces mêmes familles de groupes, problème K-théorique d'une difficulté considérable, même pour des corps ou l'anneau des entiers, les méthodes d'homologie des foncteurs donnent des résultats de comparaison très généraux, qui s'établissent sans artillerie homotopique ni considérations arithmétiques, et donnent lieu à des calculs explicites pour beaucoup d'anneaux et de foncteurs raisonnables.

4.1 Résultat principal

Notre cadre pour les groupes unitaires (ou symplectiques) est le suivant (cf. [Knu91], chap. II, § 2, par exemple). Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive munie d'un *foncteur de dualité*, c'est-à-dire d'un foncteur $D : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{A}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

1. D est auto-adjoint : on dispose d'isomorphismes naturels
$$\sigma_{X,Y} : \mathcal{A}(X, DY) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{A}(Y, DX) ;$$
2. D est symétrique au sens où $\sigma_{Y,X} = \sigma_{X,Y}^{-1}$;
3. l'unité $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \to D^2$ (qui coïncide avec la coünité par symétrie) est un isomorphisme (en particulier, D est une équivalence de catégories).

On note $\bar{a}$ pour $\sigma_{X,Y}(a)$, où $a \in \mathcal{A}(X, DY)$. Ainsi $\bar{\bar{a}} = a$. On se donne $\epsilon \in \{1, -1\}$ et l'on note $\mathbb{Z}_\epsilon$ la représentation $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}/2$ associée à ϵ.

On note TD^2 le foncteur $\mathcal{A}^{op} \to \mathbf{Ab}\quad M \mapsto \mathcal{A}(M, DM)$, qui est donc muni d'une action de $\mathbb{Z}/2$. On définit $SD^2_\epsilon = \mathbb{Z}_\epsilon \underset{\mathbb{Z}/2}{\otimes} TD^2$. On dispose d'une transformation naturelle $SD^2_\epsilon \to TD^2$ induite par $TD^2 \to TD^2\quad x \mapsto x + \epsilon\bar{x}$. Un objet ϵ-hermitien (ou simplement hermitien pour $\epsilon = 1$, symplectique pour $\epsilon = -1$) dans $(\mathcal{A}, D)$ est un couple (X, ξ) formé d'un objet X de $\mathcal{A}$ et d'un élément ξ de $SD^2_\epsilon(X)$ dont l'image dans $TD^2(X)$ est un isomorphisme $X \xrightarrow{\simeq} DX$. Les objets ϵ-hermitiens de $(\mathcal{A}, D)$ forment une sous-catégorie pleine $\mathbf{H}_\epsilon(\mathcal{A}, D)$ (notée le plus souvent $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ dans la suite, pour alléger) de la catégorie $\mathcal{A}^{SD^2_\epsilon}$ associée à SD^2_ϵ, vu comme foncteur *ensembliste* contravariant sur $\mathcal{A}$.

Si V est un objet de $\mathcal{A}$, on dispose sur $V \oplus DV$ d'une forme ϵ-hermitienne évidente, associée à l'élément de $TD^2(V \oplus DV) \simeq \mathcal{A}(V \oplus DV, DV \oplus V)$ dont la composante $V \to V$ est l'identité et dont les autres composantes sont nulles ; l'objet hermitien associé est noté $H(V)$ et s'appelle *espace hermitien hyperbolique* associé à V.

Par commodité technique, nous supposerons qu'il existe un objet A de $\mathcal{A}$ (qu'on se fixe une fois pour toute) tel que tout objet de $\mathcal{A}$ soit facteur direct d'une somme directe finie de copies de A. Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit le groupe unitaire hyperbolique $U_{n,n}(A) := \mathrm{Aut}_{\mathbf{H}(\mathcal{A})}\big(H(A^{\oplus n})\big)$. On note $U_\infty(A)$ la colimite de ces groupes.

La terminologie et les notations proviennent de l'exemple fondamental suivant.

Exemple 4.1. Soit A un anneau à involution. La catégorie A-**mod** est munie de l'involution $D = \mathrm{Hom}_A(-, A)$, où l'involution de A permet de passer d'un A-module à droite à un A-module à gauche. Toutes les hypothèses précédentes sont vérifiées ; les objet hermitiens dans ce contexte sont les A-modules (libres de rang fini) hermitiens au sens usuel, et $U_{n,n}(A)$ est le groupe hermitien hyperbolique usuel.

La catégorie $\mathbf{H}(\mathcal{A})$, munie de la somme hermitienne, est une catégorie monoïdale symétrique dont l'unité est objet initial. On vérifie facilement que les hypothèses du théorème 3.4 sont remplies, de sorte que :

Proposition 4.2. *Pour tout foncteur F de $\mathcal{F}(\mathbf{H}(\mathcal{A}); \Bbbk)$, on dispose d'un isomorphisme naturel*

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*\big(U_{n,n}(A); F(H(A^{\oplus n}))\big) \simeq H_*(\mathbf{H}(\mathcal{A}) \times U_\infty(A); \pi^* F)$$

de $\Bbbk$-modules gradués, où $\pi : \mathbf{H}(\mathcal{A}) \times U_\infty(A) \to \mathbf{H}(\mathcal{A})$ désigne le foncteur de projection.

Le calcul de l'homologie stable à coefficients constants $H_*(U_\infty(A); \Bbbk)$ étant un difficile problème de nature K-théorique, on s'intéresse dans la suite à l'homologie $H_*(\mathbf{H}(\mathcal{A}); F)$. Celle-ci n'est pas facilement accessible, contrairement à celle de la catégorie d'éléments $\mathcal{A}^{SD^2_\epsilon}$, dans laquelle on dispose, pour des raisons formelles, d'un isomorphisme

$$H_*(\mathcal{A}^{SD^2_\epsilon}; \iota^* F) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(\Bbbk[SD^2_\epsilon], F)$$

pour tout foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \Bbbk)$, où $\iota : \mathcal{A}^{SD^2_\epsilon} \to \mathcal{A}$ désigne le foncteur d'oubli.

Le résultat principal de [D4] (son théorème 5.3) est le suivant.

Théorème 4.3. *Soit F un foncteur analytique de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$. Le foncteur d'inclusion i : $\mathbf{H}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}^{SD^2_\epsilon}$ induit un isomorphisme*

$$H_*(\mathbf{H}(\mathcal{A}); i^*\iota^* F) \xrightarrow{\simeq} H_*(\mathcal{A}^{SD^2_\epsilon}; \iota^* F) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}[SD^2_\epsilon], F).$$

Avant d'indiquer des conséquences de ce théorème, esquissons la stratégie de sa démonstration. Un argument formel de suite spectrale de Grothendieck (rappelé dans l'appendice de [D4]) montre qu'il suffit d'établir l'annulation de $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(T_\bullet, F)$ pour un certain foncteur gradué $T_\bullet$, lorsque F est un foncteur analytique (ou polynomial, par commutation des groupes de torsion aux colimites filtrantes), où $T_\bullet$ provient (d'une manière explicite simple) de l'application de l'extension de Kan dérivée à gauche le long du foncteur i (ou plutôt de $i^{op} : \mathbf{H}(\mathcal{A})^{op} \to (\mathcal{A}^{SD^2_\epsilon})^{op}$) au foncteur constant. Il importe de signaler que les valeurs de ces foncteurs $T_\bullet$ sont manifestement non triviales, et qu'il ne saurait être question de les calculer. Seules quelques propriétés qualitatives de ces foncteurs nous sont en fait nécessaires, propriétés qu'on déduit du caractère monoïdal du foncteur i et de lemmes formels sur les objets hermitiens, grâce au critère d'annulation homologique de Scorichenko [Sco00], qu'on rappelle maintenant (sous la forme très légèrement revisitée qui est donnée dans la section 2 de [D4]).

On change de point de vue sur les foncteurs polynomiaux d'une catégorie additive vers une catégorie abélienne, en les caractérisant par l'annulation d'effets croisés, mais dans un sens différent du sens usuel. Les effets croisés à la Scorichenko sont en effet des *transformations naturelles* entre foncteurs (entre catégories de foncteurs) et non des foncteurs. Précisément, soit E un ensemble fini, notons t_E l'endofoncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{op};\mathbb{Z})$ donné par la précomposition par l'endofoncteur $a \mapsto a^{\oplus E}$ de $\mathcal{A}$. Si I est une partie de E, on note $u_I : t_E \to \mathrm{Id}$ la transformation naturelle d'endofoncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{op};\mathbb{Z})$ donnée par la précomposition par la transformation naturelle d'endofoncteurs de $\mathcal{A}$ qui, sur l'objet a, est le morphisme $a \to a^{\oplus E}$ dont la composante $a \to a$ étiquetée par $e \in E$ est l'identité si $e \in I$ et 0 sinon. Si (E, e) est un ensemble pointé fini, on introduit la transformation naturelle

$$cr_{E,e} := \sum_{I \subset E} (-1)^{\mathrm{Card}(I)} u_I : t_E \to \mathrm{Id}$$

où la somme est prise sur les parties I de E contenant e. Cette transformation naturelle est appelée *effet croisé* : T polynomial de degré au plus d si et seulement si $cr_{E,e}(T) = 0$, où E est de cardinal $d + 2$.

Théorème 4.4 (Scorichenko)**.** *Soient $d \in \mathbb{N}$, (E, e) un ensemble fini de cardinal $d + 2$ et T un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{op};\mathbb{Z})$. Supposons que la transformation naturelle $cr_{E,e}(T) : t_E(T) \to T$ est un épimorphisme* faiblement scindé, *c'est-à-dire qu'elle possède un scindement naturel relativement aux épimorphismes scindés de $\mathcal{A}^{op}$. Alors $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(T, F) = 0$ pour tout foncteur F de $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A};\mathbb{Z})$.*

4.2 Applications

Un aspect important est que les groupes de torsion $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}[SD^2_\epsilon], F)$ qui apparaissent dans le théorème 4.3 sont calculables pour beaucoup de foncteurs polynomiaux F, si $\mathcal{A}$ est une catégorie additive raisonnable (comme A-**mod**, où A est un corps, ou un localisé de $\mathbb{Z}$...) $\mathbb{Z}[1/2]$-linéaire. De fait, cette hypothèse garantit que SD^2_ϵ est *facteur direct* de TD^2, et les groupes de torsion $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}[TD^2], F)$ donnent lieu à la proposition élémentaire suivante (cf. [DV1] ou [D4], proposition 5.8) :

Proposition 4.5. *Il existe un isomorphisme naturel gradué*

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}[TD^2], F) \simeq HH_*(\mathcal{A}; \sigma^* F)$$

pour F dans $\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$, où $\sigma : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ désigne le foncteur $(M, N) \mapsto DM \oplus N$ et HH_* l'homologie de Hochschild.

(Pour un rappel de la définition de l'homologie de Hochschild d'une petite catégorie à coefficients dans un bifoncteur, on pourra consulter par exemple [Lod98], appendice C, où cette homologie est simplement appelée homologie de la petite catégorie et notée H_*. La seule propriété qu'il est important de retenir ici est que l'on dispose d'un isomorphisme naturel $HH_*(\mathcal{C}; F \boxtimes G) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{C}}(F, G)$, pour F et G dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op};\mathbb{Z})$ et $\mathcal{F}(\mathcal{C};\mathbb{Z})$ respectivement, lorsque F ou G prend des valeurs sans torsion.)

Détaillons un peu les choses dans le cas des groupes orthogonaux (ou symplectiques) classiques, c'est-à-dire : $\mathcal{A} = A$-**mod** où A est un anneau commutatif (muni de l'involution triviale) dans lequel 2 est inversible. Le foncteur TD^2 (resp. SD^2_1, SD^2_{-1}) n'est alors autre que la deuxième puissance tensorielle (resp. symétrique, extérieure) sur A.

Dans [DV1], nous donnons des calculs d'homologie (ou, dualement, de cohomologie) stable de groupes orthogonaux ou symplectiques sur un corps fini à coefficients polynomiaux. Dans ce cas, l'homologie stable à coefficients constants est triviale en caractéristique naturelle (voir Fiedorowicz-Priddy [FP78], qui généralise à cette situation le résultat analogue de Quillen

[Qui72] pour les groupes linéaires sur un corps fini), ce qui permet d'obtenir des calculs complets, comme par exemple le suivant (théorème 3 de [DV1]), qui s'appuie sur les résultats qu'on vient d'évoquer et les calculs de cohomologie des foncteurs de [FFSS99].

Théorème 4.6 (avec Vespa)**.** *Soit k un corps fini de cardinal q impair. L'algèbre de cohomologie stable des groupes orthogonaux (resp. symplectiques) sur k à coefficients dans les puissances symétriques est polynomiale sur des générateurs $\alpha_{m,s}$ (resp. $\beta_{m,s}$) de bidegré $(2q^s m, q^s+1)$ indexés par des entiers $m \geq 0$ et $s \geq 0$ (resp. $s > 0$), où le premier degré est le degré cohomologique.*

Mentionnons une difficulté qui se présente, dans ce calcul, pour passer de la puissance tensorielle T^2 à la puissance symétrique S^2. Pour tout anneau commutatif (ou plus généralement, tout anneau à involution) A, l'homologie de Hochschild $HH_*(A\text{-}\mathbf{mod}; \mathrm{I}_A^\vee \boxtimes \mathrm{I}_A)$, où I_A désigne le foncteur d'inclusion $A\text{-}\mathbf{mod} \to \mathbf{Ab}$ et $\mathrm{I}_A^\vee$ sa composition avec le foncteur de dualité $D : \mathrm{Hom}_A(-, A) : (A\text{-}\mathbf{mod})^{op} \to A\text{-}\mathbf{mod}$, est munie d'une involution canonique, composée de l'isomorphisme évident $HH_*(A\text{-}\mathbf{mod}; \mathrm{I}_A^\vee \boxtimes \mathrm{I}_A) \simeq HH_*((A\text{-}\mathbf{mod})^{op}; \mathrm{I}_A \boxtimes \mathrm{I}_A^\vee)$ et de l'isomorphisme

$$HH_*((A\text{-}\mathbf{mod})^{op}; \mathrm{I}_A \boxtimes \mathrm{I}_A^\vee) \simeq HH_*(A\text{-}\mathbf{mod}; D^*\mathrm{I}_A \boxtimes D^*\mathrm{I}_A^\vee) \simeq HH_*(A\text{-}\mathbf{mod}; \mathrm{I}_A^\vee \boxtimes \mathrm{I}_A)$$

induit par l'équivalence de catégories D. Pour établir le théorème 4.6, on a besoin de vérifier que cette involution est triviale lorsque k est un corps fini, ce qui se fait en utilisant [FFSS99]. Néanmoins, la détermination de cette involution, pour un anneau commutatif A pour lequel on sait calculer $HH_*(A\text{-}\mathbf{mod}; \mathrm{I}_A^\vee \boxtimes \mathrm{I}_A)$, semble tout sauf évidente. En particulier, nous conjecturons que cette involution est triviale pour $A = \mathbb{Z}$ (en effet, $HH_*(\mathbf{ab}; \mathrm{I}_\mathbb{Z}^\vee \boxtimes \mathrm{I}_\mathbb{Z})$ a été déterminé par Franjou et Pirashvili dans [FP98], mais leur méthode « désymétrise » trop le calcul pour rendre transparente l'involution).

Problème 4.7. *Que dire de l'involution canonique de $HH_*(A\text{-}\mathbf{mod}; \mathrm{I}_A^\vee \boxtimes \mathrm{I}_A)$ lorsque A un anneau commutatif (ou un anneau à involution) raisonnable ? Peut-on exhiber un anneau commutatif A pour laquelle elle soit non triviale, mais calculable ?*

Malgré cette difficulté, on peut quand même donner certains calculs d'homologie des foncteurs liés au théorème 4.3 sur un localisé A de l'anneau des entiers contenant $1/2$. On détermine ainsi entièrement, pour un tel anneau, $\mathrm{Tor}_*^{A\text{-}\mathbf{mod}}(\mathbb{Z}[S_A^2], F)$ (à partir de [FP98]) lorsque F est une puissance tensorielle, dans les corollaires 5.9 et 5.10 de [D4].

Signalons également des conséquences du théorème 4.3 sur un corps de caractéristique nulle. Le corollaire 5.13 de [D4] affirme :

Proposition 4.8. *Soient k un corps commutatif de caractéristique nulle ; pour $i \in \mathbb{N}$, notons $\mathfrak{o}_{i,i}(k)$ la représentation adjointe de $O_{i,i}(k)$. Il existe des isomorphismes de k-espaces vectoriels*

$$\operatorname*{colim}_{i\in\mathbb{N}} H_n(O_{i,i}(k); \mathfrak{o}_{i,i}(k)) \simeq \bigoplus_{p+2q+1=n} H_p(O_\infty(k); \mathbb{Q}) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \Omega_k^{2q+1}$$

où Ω_k^* désigne la k-algèbre des différentielles de Kähler de k (sur $\mathbb{Q}$). En particulier, si k est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$, alors $\operatorname*{colim}_{i\in\mathbb{N}} H_n(O_{i,i}(k); \mathfrak{o}_{i,i}(k))$ est nul.

Dans le corollaire 5.11 de [D4], on établit :

Proposition 4.9. *Soient k un corps de caractéristique nulle muni d'une anti-involution. Pour tout foncteur analytique F de $\mathcal{F}(\mathbb{Q}\text{-}\mathbf{mod}; \mathbb{Q})$, le morphisme canonique*

$$\operatorname*{colim}_{i\in\mathbb{N}} H_0(U_{i,i}(k); \tilde{F}(k^{2i})) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} H_*(U_\infty(k); \mathbb{Q}) \to \operatorname*{colim}_{i\in\mathbb{N}} H_*(U_{i,i}(k); \tilde{F}(k^{2i}))$$

est un isomorphisme, où $\tilde{F}$ désigne le prolongement de F aux $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels commutant aux colimites filtrantes.

Le théorème 4.3 possède également des conséquences qualitatives a priori surprenantes sur l'homologie stable à coefficients tordus des groupes unitaires (voir la fin du survol [Dhst]). À titre d'exemple, signalons le résultat suivant (proposition 4.4 de [DV1]), qui se déduit de ce théorème, de la stabilité homologique à coefficients polynomiaux pour les groupes orthogonaux hyperboliques — due à Charney [Cha87] — et d'un résultat sur les produits en cohomologie des foncteurs dû à Touzé [Tou10].

Proposition 4.10 (avec Vespa)**.** *Soient k un corps fini de cardinal impair, F et G des foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}(k)$ prenant des valeurs de dimension finie, de degrés respectifs d et d', i, j et n des entiers naturels tels que $n \geq 2(i+j)+d+d'+6$. Le produit externe*

$$H^i(O_{n,n}(k);F(k^{2n}))\underset{k}{\otimes}H^j(O_{n,n}(k);G(k^{2n}))\to H^{i+j}(O_{n,n}(k);(F\underset{k}{\otimes}G)(k^{2n}))$$

est injectif.

Cas des groupes linéaires

Comme on l'a déjà rappelé dans l'exemple 1.5, si $\mathcal{A}$ est une petite catégorie additive, la catégorie additive $\mathcal{A}^{op}\times\mathcal{A}$ est munie d'une dualité canonique pour laquelle $\mathbf{H}(\mathcal{A}^{op}\times\mathcal{A})$ est équivalente à $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ (catégorie avec les mêmes objets que $\mathcal{A}$ et pour morphismes les monomorphismes scindés, avec scindement donné). Dans ce cas, la catégorie $\mathcal{A}^{SD^2_\epsilon}$ (il est indifférent de prendre $\epsilon = 1$ ou -1) est équivalente à la catégorie des factorisations de Quillen [Qui73].

Par conséquent (cf. [D4], § 5.2), le théorème 4.3 et la proposition 4.2 impliquent les résultats suivants.

Théorème 4.11 (Scorichenko)**.** *Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive et B un foncteur analytique de $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{op}\times\mathcal{A};\mathbb{Z})$. Le groupe abélien gradué $H_*(\mathbf{S}(\mathcal{A});\alpha^*B)$, où $\alpha:\mathbf{S}(\mathcal{A})\to\mathcal{A}^{op}\times\mathcal{A}$ désigne le foncteur canonique, est naturellement isomorphe à $HH_*(\mathcal{A};B)$.*

L'énoncé qui suit est dû à Scorichenko [Sco00] [1] (par une méthode très analogue à celle de [D4] ici mentionnée, mais transitant par la catégorie $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ plutôt que $\mathbf{S}(\mathcal{A})$, ce qui engendre quelques complications techniques).

Théorème 4.12 (Scorichenko)**.** *Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive et A un objet de $\mathcal{A}$ tel que tout objet de $\mathcal{A}$ soit facteur direct de sommes directes de copies de A. Notant $GL_n(A) := \mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(A^{\oplus n})$ et $GL_\infty(\mathcal{A})$ la colimite de ces groupes, si B est un bifoncteur analytique de $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{op}\times\mathcal{A};\mathbb{Z})$, on dispose d'un isomorphisme naturel*

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*(GL_n(A);B(A^{\oplus n},A^{\oplus n}))\simeq HH_*(\mathcal{A}\times GL_\infty(A);B)$$

où $GL_\infty(A)$ opère trivialement sur B dans le membre de droite.

Ce résultat, qui avait été démontré, peu avant que Scorichenko n'obtienne la version générale, par Suslin (appendice de [FFSS99]) et, indépendamment, par Betley [Bet99] quand $\mathcal{A}$ est la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps fini, donne des conséquences concrètes en (co)homologie des groupes des calculs d'homologie des foncteurs menés dans [FFSS99] ou [FP98], par exemple.

À la fin de [DV3] (théorème 6.20), on montre le résultat suivant, qui constitue une conséquence des théorèmes 4.12 et 1.10 (comparer aussi à la proposition 4.9).

1. Une esquisse publiée du travail de Scorichenko est donnée dans le dernier chapitre de l'ouvrage de synthèse [FFPS03].

Corollaire 4.13 (avec Vespa)**.** *Soient A un sous-anneau d'une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ et $F : \mathbf{S}(A\text{-}\mathbf{mod}) \to \mathbb{Q}\text{-}\mathbf{Mod}$ un foncteur faiblement polynomial. Le morphisme naturel de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels gradués*

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_0(GL_n(A); F(A^n)) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} H_*(GL_\infty(A); \mathbb{Q}) \to \operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*(GL_n(A); F(A^n))$$

est un isomorphisme.

4.3 Groupes unitaires non hyperboliques

Revenons à la situation générale du début de ce chapitre. Les résultats mentionnés ne concernent que l'homologie stable des groupes unitaires *hyperboliques* — situation qui est également nommée *générique* dans [D4] (du fait que tout objet hermitien est facteur — au sens de la somme hermitienne — d'un objet hyperbolique) — mais il est parfois très naturel de considérer l'homologie stable pour d'autres suites infinies d'objets hermitiens. L'exemple le plus évident est, dans le cas orthogonal usuel $\mathcal{A} = A\text{-}\mathbf{mod}$, A étant un anneau commutatif, celui des groupes orthogonaux « euclidiens » associés à la somme orthogonale de copies de A muni de la forme quadratique évidente (il se peut que cette situation se ramène directement à celle des groupes orthogonaux hyperboliques, lorsqu'on stabilise : c'est par exemple ce qui advient si A est un corps non ordonnable).

D'une manière générale, supposons que V est un objet fixé de $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ et considérons la sous-catégorie pleine $\mathbf{H}'(\mathcal{A})$ dont les objets sont les sommes hermitiennes de copies de V. On notera également $U'_\infty(\mathcal{A})$ la colimite des groupes $U_n(V) := \mathrm{Aut}_{\mathbf{H}(\mathcal{A})}(V^{\overset{\perp}{\oplus} n})$.

La proposition 4.2 s'adapte sans aucun changement à cette situation (cf. [D4]) :

Proposition 4.14. *Pour tout foncteur F de $\mathcal{F}(\mathbf{H}'(\mathcal{A}); \Bbbk)$, on dispose d'un isomorphisme naturel*

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*\big(U_n(V); F(H(V^{\overset{\perp}{\oplus} n}))\big) \simeq H_*(\mathbf{H}'(\mathcal{A}) \times U'_\infty(A); \pi^* F)$$

de $\Bbbk$-modules gradués, où $\pi : \mathbf{H}'(\mathcal{A}) \times U'_\infty(A) \to \mathbf{H}'(\mathcal{A})$ désigne le foncteur de projection.

La catégorie $\mathcal{A}^{SD^2_\epsilon}$ possède une sous-catégorie pleine (qui est aussi une catégorie d'éléments) adaptée à la restriction à $\mathbf{H}'(\mathcal{A})$; la proposition 6.3 de [D4] montre que cette sous-catégorie a la même homologie à coefficients analytiques (se factorisant par le foncteur d'oubli dans $\mathcal{A}$) que $\mathcal{A}^{SD^2_\epsilon}$. Cette proposition repose sur le théorème 3.3 de [D4], qui donne un résultat de symétrisation en homologie des foncteurs qui n'est pas sans rappeler le théorème de Dold-Thom, voire les liens entre la construction plus de Quillen et son modèle, en K-théorie algébrique, utilisant la complétion en groupes. Il serait utile culturellement de disposer d'un énoncé généralisant ce résultat d'homologie des foncteurs et qui permette de clarifier ces relations.

En revanche, d'autres aspects de l'homologie stable fonctionnent en général différemment dans $\mathbf{H}'(\mathcal{A})$ et dans le cas hyperbolique. Avant de préciser ce qu'il en est pour l'homologie stable à coefficients polynomiaux, suivant la section 6 de [D4], notons que la stabilité homologique (y compris à coefficients constants) nécessite davantage d'hypothèses pour les groupes $U_n(V)$ que pour les groupes hyperboliques $U_{n,n}(A)$. Ainsi, si l'on travaille sur un corps commutatif k, la stabilité homologique pour les groupes orthogonaux hyperboliques $O_{n,n}(k)$ est automatique. En revanche, pour les groupes « euclidiens » $O_n(k)$, on a besoin d'hypothèses arithmétiques sur les sommes de carrés dans k (voir Vogtmann [Vog82]).

Ces difficultés arithmétiques vont se retrouver lorsqu'on tente d'appliquer la même stratégie, fondée sur le critère de Scorichenko (théorème 4.4), avec $\mathbf{H}'(\mathcal{A})$ au lieu de $\mathbf{H}(\mathcal{A})$. Elles n'adviennent toutefois jamais sur un corps : la proposition 6.4 de [D4] donne le résultat suivant.

Théorème 4.15. *Supposons que la catégorie additive $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne dont tous les objets sont semi-simples et finis. On dispose alors d'un isomorphisme*

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*(U_n(V); F(V^{\oplus n})) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}\times U'_\infty(\mathcal{A})}(\mathbb{Z}[SD^2_\epsilon], F)$$

naturel en le foncteur analytique F de $\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$, où le groupe $U'_\infty(\mathcal{A})$ opère trivialement, dans le membre de droite.

Sans hypothèse sur $\mathcal{A}$ ou V, cet énoncé peut tomber en défaut, *dès le degré homologique nul*. Cette question est discutée, pour les groupes orthogonaux « euclidiens » sur un anneau commutatif A où 2 est inversible, dans le § 6.2 de [D4]. Un exemple simple typique illustre ce qui peut arriver : si k est un corps (commutatif) ordonnable, l'inclusion $O_n(k) \subset O_n(k[T])$ est une *égalité* pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que, pour calculer l'homologie stable à coefficients analytiques des $O_n(k[T])$, c'est l'algèbre homologique sur $\mathcal{F}(k\text{-}\mathbf{mod};\mathbb{Z})$ plutôt que sur $\mathcal{F}(k[T]\text{-}\mathbf{mod};\mathbb{Z})$ qu'il convient de considérer. Il serait probablement possible, au prix de quelques complications techniques, d'étendre ces considérations sur le degré nul au cas général. En revanche, même dans le cas usuel, la situation du degré homologique supérieur reste largement ouverte. Dans [D4] (§ 6.3), on donne toutefois une autre situation que celle des corps où le théorème 4.15 s'applique également (mais avec une démonstration plus compliquée) : celle où $\mathcal{A} = A\text{-}\mathbf{mod}$, l'anneau A étant un localisé de l'anneau des entiers d'un corps de nombre obtenu en inversant une famille quelconque d'entiers naturels contenant 2.

Chapitre 5

Homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres

On expose dans ce chapitre les principaux résultats de [DV2] et [D7].

5.1 Introduction

L'étude de la structure des groupes d'automorphismes des groupes libres (notamment, une présentation explicite par générateurs et relations) remonte aux travaux de Nielsen et Magnus, dès les années 1920-1930. En revanche, aucun résultat substantiel sur leur homologie ne semble avoir été obtenu avant les années 1980 (voir Culler-Vogtmann [CV86]). La stabilité homologique à coefficients constants pour ces groupes date des années 1990 (cf. [HV98]). Le calcul de leur homologie stable est un résultat profond et difficile de Galatius [Gal11], qui utilise des techniques géométriques et topologiques avancées, et montre que l'inclusion évidente $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$ induit stablement un isomorphisme en homologie (ou encore, compte-tenu des résultats de stabilité homologique connus pour ces deux familles de groupes, en homologie de degré au plus $\frac{n-3}{2}$).

L'homologie des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients *tordus* (dont l'intérêt est signalé par Morita dans son travail de synthèse [Mor06], à son dix-septième problème) a fait également l'objet de quelques travaux, à partir des années 2000, souvent comme « sous-produit » de considérations relatives à l'homologie à coefficients constants de ces groupes ou de variantes. Ainsi, dans [HW05] (voir aussi son erratum [HW08]), Hatcher et Wahl montrent que cette homologie est stablement nulle à coefficients dans l'abélianisation des groupes libres, en se fondant sur des méthodes topologico-géométriques, qui servent également à établir de la stabilité homologique. Randal-Williams a observé, au début de [RW10], que l'on peut montrer l'annulation stable à coefficients dans n'importe quelle puissance tensorielle de l'abélianisation d'une façon analogue, en s'appuyant cette fois-ci sur l'article [HV04] d'Hatcher et Vogtmann (voir aussi son erratum [HVW06] avec Wahl ; ces travaux reposent sur des méthodes assez voisines de celles de [HW05]). Nous généraliserons ce résultat, par une méthode indépendante, dans la section 5.2.

Plusieurs calculs de (co)homologie des groupes d'automorphismes des groupes libres, en petit degré homologique (jusqu'à 2), ont été menés, à l'aide de méthodes de théorie des groupes, par Satoh (qui obtient non seulement les valeurs stables, mais aussi certaines valeurs instables), dans les articles [Sat06], [Sat07] et [Sat13].

Mentionnons également les classes de cohomologie introduites par Kawazumi ([Kaw06], § 4)

$$h_p \in H^p\big(\mathrm{Aut}(F); \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, H^{\otimes(p+1)})\big) \quad \text{et} \quad \bar{h}_p \in H^p\big(\mathrm{Aut}(F); H^{\otimes p}\big)$$

où F est un groupe libre de rang fini et H son abélianisation ; ces classes sont compatibles à la stabilisation et Kawazumi [Kaw08] a montré l'indépendance algébrique, y compris sur $\mathbb{Q}$, des classes $\bar{h}_p$ (ou plutôt de leurs images dans $H^*\big(\mathrm{Aut}(F); \Lambda^*(H)\big)$, où le produit est commutatif) dans le domaine stable, par un argument de restriction aux groupes de tresses.

Signalons enfin que, dans [RW10], Randal-Williams donne des conjectures sur la dimension (dans le domaine stable) de certains $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de cohomologie des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients tordus par une puissance symétrique ou extérieure (rationalisée) de leur abélianisation. Il montre même ces conjectures (corollaire 6.4 de [RW10]) conditionnellement à deux conjectures (les conjectures B et C de son travail), dont l'une prédit un résultat de stabilité et l'autre l'effondrement à la deuxième page d'une suite spectrale construite par des méthodes de topologie algébrique et qui est analogue à une suite spectrale pour la cohomologie de groupes de difféotopie, pour laquelle l'effondrement à la deuxième page est connu. Ces conjectures de Randal-Williams ont constitué une source d'inspiration importante pour les résultats exposés dans ce chapitre, notamment ceux de [D7] (présentés ci-après, dans la section 5.3), où l'essentiel [1] de ces conjectures est prouvé. Tout récemment, après qu'une première version de ce mémoire a été rédigée, Randal-Williams [RW16] a démontré ses conjectures (et produit quelques calculs cohomologiques complémentaires), établissant l'effondrement des suites spectrales de [RW10] à l'aide d'un argument algébrique très simple.

Précisons maintenant les types de coefficients considérés. Les groupes d'automorphismes des groupes libres entrent dans le cadre de la section 3.2, pour la catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{G}$ suivante. Ses objets sont les mêmes que ceux de $\mathbf{gr}$ (les groupes libres $\mathbb{Z}^{*n}$), et la structure monoïdale est également induite par le produit libre, mais les morphismes de G dans H sont les couples (u, C) constitués d'un monomorphisme de groupes $u : G \to H$ et d'un sous-groupe C de H tels que $H = u(G) * C$ (ici, $*$ désigne le produit libre *interne*). La composée $G \xrightarrow{(u,C)} H \xrightarrow{(v,D)} K$ est $(v \circ u, D * v(C))$.

On vérifie facilement que cette catégorie vérifie les hypothèses du théorème 3.4, de sorte que, compte-tenu de [Gal11], on obtient le résultat suivant, contenu dans la proposition 4.4 et le corollaire 4.5 de [DV2].

Proposition 5.1 (avec Vespa)**.** *Pour tout foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{G}; \Bbbk)$, on a un isomorphisme naturel*

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^{*n})) \simeq H_*(\mathcal{G} \times \mathfrak{S}_\infty; F)$$

où le groupe symétrique infini $\mathfrak{S}_\infty := \operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{S}_n$ opère trivialement.

En particulier, pour $\Bbbk = \mathbb{Q}$:

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^{*n})) \simeq H_*(\mathcal{G}; F).$$

Dans les cas courants, les coefficients tordus qu'on considère proviennent de foncteurs définis sur des catégories de groupes libres plus usuelles que $\mathcal{G}$. Pour préciser cela, on note que $\mathcal{G}$ est munie de deux foncteurs monoïdaux évidents qui sont l'identité sur les objets, l'un $i : \mathcal{G} \to \mathbf{gr}$, l'autre $\iota : \mathcal{G} \to \mathbf{gr}^{op}$. Lorsque nous parlerons d'homologie stable à coefficients *covariants* (resp. *contravariants*) des groupes d'automorphismes des groupes libres, il s'agira de coefficients tordus par des foncteurs de $\mathcal{F}(\mathbf{gr}; \Bbbk)$ (resp. $\mathcal{F}(\mathbf{gr}^{op}; \Bbbk)$), par l'intermédiaire de la précomposition par i (resp. ι). Nous rencontrerons aussi des coefficients *bivariants*, c'est-à-dire provenant de foncteurs de $\mathcal{F}(\mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr}; \Bbbk)$, via la précomposition par $(\iota, i) : \mathcal{G} \to \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr}$.

1. Il reste le cas des groupes d'automorphismes *extérieurs* des groupes libres à traiter ; celui-ci devrait découler de la conjecture 5.17 ci-après.

Cette situation est à mettre en regard de l'analogue abélien des catégories $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$, $\mathbf{ab}$, $\mathbf{ab}^{op}$ et $\mathbf{ab}^{op} \times \mathbf{ab}$: on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr} \arrow[d] \\ \mathbf{S}(\mathbf{ab}) \arrow[r] & \mathbf{ab}^{op} \times \mathbf{ab} \end{tikzcd}$$

dont les flèches horizontales sont les foncteurs canoniques et les flèches verticales sont induites par l'abélianisation. Utilisant cette analogie, le théorème de Scorichenko 4.12 (pour l'anneau des entiers) traite de l'homologie stable à coefficients bivariants pour les groupes $GL_n(\mathbb{Z})$.

Ce théorème de Scorichenko se réduit à de l'annulation en homologie stable pour les coefficients covariants et contravariants polynomiaux réduits (i.e. nuls sur l'objet nul) — résultat qui avait été obtenu auparavant (au moins pour les groupes linéaires sur un anneau commutatif), par d'autres méthodes, par Betley [Bet92]. Dans le cas linéaire, les coefficients covariants et contravariants se traitent de façon rigoureusement identique, grâce aux automorphismes de groupes $GL_n(A)^{op} \to GL_n(A^{op}) \quad g \mapsto {}^tg^{-1}$, qui sont compatibles à la stabilisation. Ces automorphismes (pour $A = \mathbb{Z}$) ne peuvent pas se relever à $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$; de fait, nous verrons que l'homologie stable à coefficients covariants (étudiée dans la section 5.2) ou contravariants (étudiée dans la section 5.3) se comporte de façon très différente pour les groupes d'automorphismes des groupes libres.

Tous les résultats que nous avons mentionnés sur l'homologie de ces groupes concernent des coefficients covariants, contravariants ou, plus rarement, bivariants (cela concerne les classes h_p de [Kaw06] et l'article [Sat13]), qui de plus se factorisent par l'abélianisation. (Prendre garde également aux changements de variance liés au passage à la cohomologie : ainsi, les classes $\bar{h}_p$ de Kawazumi ou le corollaire 6.4 concernent de la cohomologie à coefficients covariants et se ramènent, par dualité, à de l'homologie à coefficients contravariants.) La dissymétrie profonde, pour l'homologie des groupes d'automorphismes des groupes libres, entre coefficients covariants et contravariants (même lorsqu'ils se factorisent par l'abélianisation) est déjà soulignée dans la première section de [RW10].

5.2 Annulation stable à coefficients covariants polynomiaux réduits

Le résultat principal de [DV2] est le suivant, qui constitue un analogue pour les automorphismes des groupes libres du résultat d'annulation de Betley susmentionné pour les groupes linéaires.

Théorème 5.2 (avec Vespa)**.** *L'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients covariants polynomiaux (ou analytiques) réduits est nulle : si F est un foncteur polynomial (ou analytique) réduit de $\mathcal{F}(\mathbf{gr};\mathbb{Z})$, alors*

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^{*n})) = 0.$$

Le même résultat vaut plus généralement si l'on remplace F par $F \otimes G$, où G est un foncteur quelconque de $\mathcal{F}(\mathbf{gr};\mathbb{Z})$.

En utilisant le résultat de stabilité homologique de Randal-Williams et Wahl (théorème 5.4 de [RWW], reposant sur [HV98]), on en déduit :

Corollaire 5.3 (avec Vespa)**.** *Soit F un foncteur polynomial réduit de degré d de $\mathcal{F}(\mathbf{gr};\mathbb{Z})$. On a*

$$H_i(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^{*n})) = 0 \quad \textit{pour} \quad n \geq 2(i+d)+3.$$

Le cas crucial pour établir le théorème 5.2 est celui où F est le foncteur d'abélianisation, noté $\mathfrak{a}$. En fait, on montre (proposition 6.3 de [DV2]) qu'il suffit d'établir la dernière assertion de cet énoncé pour $F = \mathfrak{a}$. Cette réduction repose sur la structure des foncteurs polynomiaux sur la catégorie **gr**, examinée dans la section 3 de [DV2], notamment son corollaire 3.6, qui donne le résultat suivant :

Proposition 5.4 (avec Vespa)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'équivalences de catégories*

$$\mathcal{P}ol_n(\mathbf{gr};\mathbb{Z})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathbf{gr};\mathbb{Z}) \simeq \mathcal{P}ol_n(\mathbf{ab};\mathbb{Z})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathbf{ab};\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$$

dont la première est induite par le foncteur d'abélianisation $\mathbf{gr} \to \mathbf{ab}$.

En conséquence (corollaire 3.7 de [DV2]), on voit que tout foncteur polynomial sur **gr** possède une filtration dont les sous-quotients se factorisent par le foncteur d'abélianisation. Néanmoins, même pour les foncteurs se factorisant par l'abélianisation, les méthodes d'étude homologique diffèrent le plus souvent de celles utilisées pour les foncteurs sur **ab**.

De fait, l'ingrédient essentiel pour établir le théorème 5.2 est la résolution projective explicite du foncteur $\mathfrak{a}$ fournie par la résolution barre, déjà notée par Jibladze et Pirashvili dans [JP91] : notant P_n pour $P^{\mathbf{gr}}_{\mathbb{Z}^{*n}}$, elle prend la forme

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_2 \to P_1$$

complexe dont l'évaluation sur G est l'homologie de G (avec un décalage de degré de 1) à coefficients dans $\mathbb{Z}$, qui se réduit au degré 1 (0 dans le complexe précédent) où elle est fonctoriellement isomorphe à $\mathfrak{a}(G)$. Cette résolution projective explicite simple contraste avec ce qui advient pour les foncteurs sur **ab** et explique pourquoi l'algèbre homologique est plus facilement accessible dans $\mathcal{F}(\mathbf{gr};\mathbb{Z})$.

À partir de cette résolution, on donne un critère d'annulation pour les foncteurs $\mathrm{Tor}^{\mathbf{gr}}_*(-,\mathfrak{a}\otimes P_n)$, dans la section 5 de [DV2], qu'on applique dans sa section 6 à l'extension de Kan dérivée à gauche du foncteur constant le long du foncteur $i^{op} : \mathcal{G}^{op} \to \mathbf{gr}^{op}$, ce qui conduit à la démonstration du théorème 5.2 (qui se ramène à de l'annulation pour $H_*(\mathcal{G};-)$ par la proposition 5.1).

Remarque 5.5. Le théorème 5.2 et le théorème d'annulation de Betley susmentionné conduisent naturellement à la question de trouver des hypothèses générales sur une théorie algébrique (i.e. une petite catégorie dont l'ensemble des objets est $\mathbb{N}$, possédant un objet nul et des coproduits finis, qui coïncident avec l'addition sur les objets ; dans un second temps, on pourrait envisager un cadre encore plus vaste) $\mathcal{C}$ assurant l'annulation de l'homologie stable à coefficients polynomiaux réduits covariants des groupes d'automorphismes de $\mathcal{C}$. On ne peut s'attendre à une réponse positive en général, comme le montre le cas de la catégorie Γ, dans laquelle l'homologie stable à coefficients tordue est donnée par le travail [Bet02] de Betley : même en degré homologique nul, celle-ci n'est généralement pas nulle pour des coefficients polynomiaux réduits. Notre intuition est que ce phénomène provient de ce qu'il n'y a « pas assez » d'automorphismes dans cette catégorie, en un sens que précise la conjecture ci-dessous. Son hypothèse garantit sans trop de peine que la conclusion vaut en degré homologique nul.

Conjecture 5.6. *Soit $\mathcal{C}$ une théorie algébrique. Supposons que, pour tout morphisme $u : i \to j$ de $\mathcal{C}$, il existe un automorphisme de $i+j$ dont la restriction à i soit l'identité et dont la composante $i \to j$ soit u. Alors, pour tout foncteur polynomial réduit F de $\mathcal{F}(\mathcal{C};\mathbb{Z})$, on a* $\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*(\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(n);F(n)) = 0$.

5.3 Cas des coefficients contravariants polynomiaux rationnels

Dans l'article [DV2] (section 7), nous avions déjà remarqué, à la suite de Kawazumi ou Randal-Williams, que l'analogue du théorème 5.2 cessait d'être vrai pour les coefficients contravariants, ce dès le degré homologique 1, que nous y abordions (pour les coefficients polynomiaux se factorisant par l'abélianisation) « à la main » à partir de la description fonctorielle de l'abélianisation du sous-groupe IA_n de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$ noyau de la projection canonique sur $GL_n(\mathbb{Z})$ (cette description est donnée, entre autre, dans la section 6 de [Kaw06], qui fournissait déjà un résultat tout à fait analogue à celui de [DV2] pour cette homologie contravariante polynomiale de degré 1, avec un énoncé et un contexte légèrement différents dus à l'utilisation d'arguments de groupes algébriques plutôt que de foncteurs).

Dans [D7] [2], on décrit l'homologie stable à coefficients contravariants polynomiaux *rationnels* des groupes d'automorphismes des groupes libres ; le résultat principal est le théorème 5.7 ci-dessous. On obtient aussi des renseignements partiels à coefficients entiers (voir la discussion de [D7], page 33), mais des calculs complets dans ce degré de généralité semblent d'une ambition démesurée avec les outils disponibles (on notera que l'approche topologique de [RW10] et [RW16] ne donne des résultats généraux que pour les seuls coefficients rationnels).

Théorème 5.7. *Soient $F : \mathbf{gr}^{op} \to \mathbb{Q}\text{-}\mathbf{Mod}$ un foncteur analytique et $n \in \mathbb{N}$. Il existe un isomorphisme naturel*

$$\operatorname*{colim}_{r\in\mathbb{N}} H_n(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*r}); F(\mathbb{Z}^{*r})) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Tor}_i^{\mathbf{gr}}(F, \Lambda^j_{\mathbb{Q}} \circ \mathfrak{a})$$

où $\Lambda^j_{\mathbb{Q}}$ désigne la j-ème puissance extérieure rationalisée.

En ce qui concerne des résultats partiels à coefficients entiers, le problème suivant est très naturel au vu du travail [RW16].

Problème 5.8. *Retrouver le théorème E de Randal-Williams [RW16] à l'aide des méthodes algébriques utilisées pour établir le théorème 5.7.*

En utilisant derechef (cf. corollaire 5.3) la stabilité pour l'homologie des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients polynomiaux tirée de [RWW], on déduit du théorème 5.7 le corollaire suivant.

Corollaire 5.9. *Soient n, r et d des entiers naturels et $F : \mathbf{gr}^{op} \to \mathbb{Q}\text{-}\mathbf{Mod}$ un foncteur polynomial de degré d. Il existe un isomorphisme naturel*

$$H_n(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*r}); F(\mathbb{Z}^{*r})) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Tor}_i^{\mathbf{gr}}(F, \Lambda^j_{\mathbb{Q}} \circ \mathfrak{a})$$

lorsque $r \geq 2(n+d)+3$.

L'énoncé qui suit constitue une variation immédiate du précédent en termes de *co*homologie.

Corollaire 5.10. *Soient n, r et d des entiers naturels et $F : \mathbf{gr} \to \mathbb{Q}\text{-}\mathbf{Mod}$ un foncteur polynomial de degré d. Il existe un isomorphisme naturel*

$$H^n(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*r}); F(\mathbb{Z}^{*r})) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathbf{gr};\mathbb{Q})}(\Lambda^j_{\mathbb{Q}} \circ \mathfrak{a}, F)$$

lorsque $r \geq 2(n+d)+3$.

Grâce aux calculs d'algèbre homologique pour les foncteurs sur la catégorie **gr** effectués par Vespa dans [Ves], on peut déduire des résultats précédents des calculs explicites d'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients tordus, notamment le suivant, conjecturé par Randal-Williams [RW10] (et démontré, indépendamment de nos résultats, par celui-ci dans [RW16]).

2. *Ajout tardif :* nous nous référons ici à la troisième version de ce travail déposée sur le serveur hal. Depuis, une nouvelle version a été déposée, qui améliore les résultats en donnant davantage de renseignements pour l'homologie à coefficients entiers. Ces améliorations reposent sur l'utilisation du scindement de Snaith.

Théorème 5.11. *Soient n, r et d des entiers tels que $r \geq 2(n+d)+3$ et G un groupe libre de rang r. Notons H la représentation $G_{ab} \otimes \mathbb{Q}$ de G. Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H^n(\mathrm{Aut}(G); \Lambda^d(H))$ est nul si $n \neq d$; pour $n = d$, sa dimension est le nombre de partitions de d. Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H^n(\mathrm{Aut}(G); S^d(H))$ est nul sauf pour $n = d = 0$ ou 1, auquel cas il est de dimension* 1.

(Ici, S^d désigne la d-ème puissance symétrique.)

À la fin de [D7], on donne quelques calculs complémentaires (pour les puissances tensorielles rationalisées de l'abélianisation) et la description de structures multiplicatives dans les isomorphismes précédents.

Esquissons maintenant la stratégie de la démonstration du théorème 5.7. Elle repose sur un résultat plus général qui nécessite d'introduire une catégorie de groupes libres auxiliaire, notée $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$. Plus généralement, si $(\mathcal{C}, *, 0)$ est une catégorie monoïdale symétrique dont l'unité 0 est objet nul, on construit une catégorie $\mathbf{S}_c(\mathcal{C})$ qui a les mêmes objets que $\mathcal{C}$, et dont les morphismes $G \to H$ sont les couples (u, v) de morphismes de groupes $u : G \to H$ et $v : H \to G$ de $\mathcal{C}$ tels qu'existent un objet T et un isomorphisme $H \simeq G * T$ de $\mathcal{C}$ (non donnés dans la structure) faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] \arrow[dr] & H \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\simeq"] & G \\ & G * T \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

dont les flèches obliques sont l'inclusion et la projection canoniques. (En particulier, $v \circ u = \mathrm{Id}_G$.) Le produit libre induit une structure monoïdale symétrique sur $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$; on dispose d'un foncteur monoïdal évident $\gamma : \mathcal{G} \to \mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$ qui est l'identité sur les objets. De plus, les foncteurs canoniques $i : \mathcal{G} \to \mathbf{gr}$ et $\iota : \mathcal{G} \to \mathbf{gr}^{op}$ se factorisent par ce dernier. On note $\beta : \mathbf{S}_c(\mathbf{gr}) \to \mathbf{gr}^{op}$ le foncteur ainsi obtenu. Le théorème 5.7 s'obtient à partir des deux résultats suivants (théorèmes 1 et 1.3 respectivement de [D7]).

Théorème 5.12. *Soient F un foncteur de $\mathcal{F}(\mathbf{S}_c(\mathbf{gr}); \mathbb{Q})$ et n un entier naturel. Il existe un isomorphisme naturel*

$$\operatorname*{colim}_{r \in \mathbb{N}} H_n(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*r}); F(\mathbb{Z}^{*r})) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Tor}_i^{\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})}(\Lambda^j_{\mathbb{Q}} \circ \mathrm{A}, F)$$

où $\mathrm{A} = \beta^* \mathfrak{a} : \mathbf{S}_c(\mathbf{gr})^{op} \to \mathbf{Ab}$ désigne le foncteur d'abélianisation.

(Noter qu'aucune hypothèse d'analycité n'est requise dans cet énoncé.)

Théorème 5.13. *Si F est un foncteur analytique de $\mathcal{F}(\mathbf{gr}^{op}; \mathbb{Z})$ et G un foncteur arbitraire de $\mathcal{F}(\mathbf{gr}; \mathbb{Z})$, alors le morphisme canonique*

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})}(\beta^* G, \beta^* F) \to \mathrm{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(F, G)$$

est un isomorphisme.

(Noter que cet énoncé vaut dans toute sa généralité à coefficients entiers.)

La démonstration du théorème 5.13 repose sur une stratégie très voisine de celle du théorème 4.3 : elle s'appuie sur un critère d'annulation à la Scorichenko, c'est-à-dire un analogue du théorème 4.4 sur la catégorie $\mathbf{gr}$, qu'on applique ensuite à une extension de Kan dérivée appropriée le long du foncteur β. On renvoie à la section 2 de [D7] pour les détails.

Cette démonstration comporte une assez grande partie formelle, il est donc naturel de se poser le problème suivant.

Problème 5.14. *Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie avec objet nul et coproduits finis. Donner une condition suffisante simple sur $\mathcal{C}$ (du type de celle proposée dans la conjecture 5.6, et permettant de retrouver les théorèmes 4.11 et 5.13) pour que le foncteur canonique (égal à l'identité sur les objets) $\mathbf{S}_c(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ satisfasse encore le théorème 5.13 (en remplaçant* **gr** *par $\mathcal{C}$).*

Venons-en à la démonstration du théorème 5.12 (à partir de la proposition 5.1), qui constitue le cœur de [D7]. Pour des raisons formelles, on dispose d'une suite spectrale

$$\mathrm{E}^2_{i,j} = \mathrm{Tor}_i^{\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})}(\mathrm{L}_j, F) \Rightarrow H_{i+j}(\mathcal{G}; \gamma^* F) \tag{5.1}$$

naturelle en $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}(\mathbf{S}_c(\mathbf{gr}); \Bbbk)$, où $\mathrm{L}_\bullet(A) := H_\bullet(\mathrm{C}(A); \Bbbk)$, $\mathrm{C}(A)$ désignant la catégorie d'éléments associée au foncteur $\gamma^*\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})(A, -) : \mathcal{G} \to \mathbf{Ens}$.

Le résultat suivant (qui est lui aussi valable sur $\mathbb{Z}$) est le théorème 1.5 de [D7].

Théorème 5.15. *Soit A un objet de $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$. Le nerf de la catégorie $\mathrm{C}(A)$ a naturellement le même type d'homotopie que l'espace de lacets infinis $\Omega^\infty\Sigma^\infty(\mathrm{B}(A))$ (où B désigne le foncteur classifiant des groupes vers les espaces pointés).*

Rationnellement, $\Omega^\infty\Sigma^\infty(\mathrm{B}(A))$ a le type d'homotopie de $\mathrm{B}(A_{ab})$, donc une homologie naturellement isomorphe à $\Lambda^*_{\mathbb{Q}}(A_{ab})$, de sorte que la suite spectrale (5.1) prend, pour $\Bbbk = \mathbb{Q}$, la forme suivante :

$$\mathrm{E}^2_{i,j} = \mathrm{Tor}_i^{\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})}(\Lambda^j_{\mathbb{Q}} \circ \mathrm{A}, F) \Rightarrow H_{i+j}(\mathcal{G}; \gamma^* F).$$

Pour conclure, on montre que cette suite spectrale s'effondre à la deuxième page et que le gradué associé est trivial. Cela se fait à partir de la théorie de l'obstruction pour les complexes de chaînes due à Dold [Dol60], qui montre qu'il suffit d'établir la nullité des groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^{m-n+1}_{\mathcal{F}(\mathbf{S}_c(\mathbf{gr});\mathbb{Q})}(\Lambda^n_{\mathbb{Q}} \circ \mathrm{A}, \Lambda^m_{\mathbb{Q}} \circ \mathrm{A})$ pour $n < m$. Cette annulation se déduit du théorème 5.13 (ou plutôt d'une variante en Ext) et de [Ves] ; elle ne persiste manifestement pas sur $\mathbb{Z}$.

Cet argument final de trivialité de suite spectrale est très inspiré de la décomposition de Hodge pour l'homologie de Hochschild supérieure établie par Pirashvili dans [Pir00b], où ce sont des groupes de torsion sur la catégorie Γ, mettant en jeu les puissances extérieures d'un foncteur additif canonique, qui interviennent. Là encore, l'arrêt de la suite spectrale ne fonctionne généralement qu'en caractéristique nulle. Par analogie avec [Pir00b], nous avons appelé *décomposition de Hodge* les isomorphismes des théorèmes 5.12 ou 5.7. La similitude avec le cas classique conduit naturellement à poser la question suivante.

Problème 5.16. *Peut-on lire la décomposition des théorèmes 5.12 ou 5.7 directement sur l'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres (à l'aide d'opérations explicites sur un complexe usuel calculant cette homologie, par exemple) ?*

Terminons cette section par quelques éléments sur la démonstration du théorème 5.15. Elle consiste à remplacer la catégorie $\mathrm{C}(A)$ par une construction de Grothendieck $\mathrm{C}(A) \int \mathcal{D}_A$, où $\mathcal{D}_A$ est un foncteur convenable de $\mathrm{C}(A)$ vers la catégorie des petites catégories. On montre (section 3 de [D7]) que $\mathcal{D}_A$ prend des valeurs dont le nerf est contractile, à l'aide d'arguments assez concrets sur les groupes libres et les groupes libres à opérateurs. Cela garantit que le foncteur canonique $\mathrm{C}(A) \int \mathcal{D}_A \to \mathrm{C}(A)$ est une équivalence d'homotopie. On détermine ensuite le type d'homotopie de $\mathrm{C}(A) \int \mathcal{D}_A$ (section 4 de [D7]) en l'identifiant à une autre construction de Grothendieck et en utilisant la machinerie classique de Segal [Seg74] associant un spectre à une catégorie monoïdale symétrique.

5.4 Perspectives

À la fin de [D7], on émet la conjecture suivante, qu'on s'attend à pouvoir établir en combinant les méthodes utilisées pour montrer les théorèmes 5.13 et 5.2.

Conjecture 5.17. *Si $B : \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr} \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Mod}$ est un bifoncteur analytique prenant des valeurs $\Bbbk$-plates et $G : \mathbf{gr} \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Mod}$ un foncteur arbitraire, alors on dispose d'un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})}(\beta^* G, \lambda^* B) \simeq HH_*(\mathbf{gr}; \pi^* G \otimes B)$$

où $\pi : \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr} \to \mathbf{gr}$ désigne le foncteur de projection et $\lambda : \mathbf{S}_c(\mathbf{gr}) \to \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr}$ le foncteur canonique.

Le théorème 5.12 implique le résultat suivant.

Théorème 5.18 (Conditionnellement à la conjecture 5.17)**.** *Supposons la conjecture 5.17 vérifiée. Soit $B : \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr} \to \mathbb{Q}\text{-}\mathbf{Mod}$ un bifoncteur analytique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme*

$$\operatorname*{colim}_{r \in \mathbb{N}} H_n(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*r}); B(\mathbb{Z}^{*r}, \mathbb{Z}^{*r})) \simeq \bigoplus_{i+j=n} HH_i(\mathbf{gr}; \pi^* \mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^j \otimes B)$$

naturel en B.

Notons que cette coonjecture, dont [Ves] permet de donner des conséquence en termes de calculs explicites (notamment, pour $B(G, H) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_{ab}^{\otimes i}, H_{ab}^{\otimes j})$, ce qui devrait clarifier le rôle des classes h_p de Kawazumi), devrait également permettre de déterminer, lorsque $B : \mathbf{ab}^{op} \times \mathbf{ab} \to \mathbb{Q}\text{-}\mathbf{Mod}$ est un bifoncteur polynomial et n un entier assez grand (devant les degrés homologique et polynomial), $H_*(\mathrm{Out}(\mathbb{Z}^{*n}); B(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n))$ (où $\mathrm{Out}(\mathbb{Z}^{*n})$ désigne le groupe des automorphismes extérieurs de $\mathbb{Z}^{*n}$), en utilisant la stabilité homologique à coefficients polynomiaux pour les groupes $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$, la suite exacte longue en homologie associée à l'extension de groupes $1 \to \mathbb{Z}^{*n} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}) \to \mathrm{Out}(\mathbb{Z}^{*n}) \to 1$ (pour $n > 1$) et une récurrence sur le degré homologique. On s'attend de la sorte, notamment, à établir la partie des conjectures de la fin de [RWW] relative aux automorphismes extérieurs (que [RW16] démontre par des méthodes topologiques).

Un autre problème homologique lié aux groupes d'automorphismes des groupes libres qu'on espère pouvoir aborder à l'aide du théorème 5.18 est celui de l'homologie des groupes $IA_n = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}) \twoheadrightarrow GL_n(\mathbb{Z})\big)$ (au chapitre suivant, nous proposerons une autre approche de ce problème, nettement plus difficile à mettre en œuvre, mais dont on espère des conséquences beaucoup plus générales).

Examinons la suite spectrale de Serre en homologie rationnelle associée à l'extension $1 \to IA_n \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}) \to GL_n(\mathbb{Z}) \to 1$:

$$E^2_{i,j}(n) = H_i(GL_n(\mathbb{Z}); H_j(IA_n; \mathbb{Q}) \otimes B(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n)) \Rightarrow H_{i+j}(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); B(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n))$$

où $B : \mathbf{ab}^{op} \times \mathbf{ab} \to \mathbb{Q}\text{-}\mathbf{Mod}$ est un bifoncteur polynomial.

On vérifie sans peine que $\mathbb{Z}^n \mapsto H_j(IA_n; \mathbb{Q})$ définit, pour tout $j \in \mathbb{N}$, un foncteur $\mathbf{S}(\mathbf{ab}) \to \mathbb{Q}\text{-}\mathbf{Mod}$; on admet dans les lignes qui suivent la conjecture 6.6 (cf. chapitre suivant) relative à sa polynomialité. Elle implique, grâce au corollaire 4.13, qu'on dispose, en stabilisant, d'un isomorphisme naturel

$$E^2_{i,j}(\infty) = H_i(GL_\infty(\mathbb{Z}); H_j(IA_\infty; \mathbb{Q}) \otimes B_\infty) \simeq H_i(GL_\infty(\mathbb{Z}); \mathbb{Q}) \otimes H_0\big(GL_\infty(\mathbb{Z}); H_j(IA_\infty; \mathbb{Q}) \otimes B_\infty\big)$$

(où B_∞ désigne la colimite des $B(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n)$; on suppose que B est supposé polynomial).

L'homologie rationnelle stable $H_*(GL_\infty(\mathbb{Z}); \mathbb{Q})$ est une algèbre symétrique graduée sur $K_*(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$, qui est de dimension 1 en degré 0 ou $4n + 1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et nulle ailleurs, d'après les résultats de Borel [Bor74]. En particulier, $E^2_{i,j}(\infty) = 0$ pour $1 \leq i \leq 4$. On en déduit

$$E^\infty_d(\infty) \simeq H_0\big(GL_\infty(\mathbb{Z}); H_d(IA_\infty; \mathbb{Q}) \otimes B_\infty\big) \quad \text{pour} \quad d \leq 3.$$

Valable pour *tout* bifoncteur polynomial B, cet isomorphisme, combiné au théorème 5.18, devrait fournir des renseignements très précis sur l'image du foncteur $\mathbb{Z}^n \mapsto H_d(IA_n;\mathbb{Q})$ dans $\mathbf{St}(\mathbf{S}(\mathbf{ab}),\mathbb{Q}\text{-}\mathbf{Mod})$, pour $d \leq 3$ (au vu du théorème 1.10). Sachant que l'homologie, même rationnelle, des groupes IA_n (à coefficients constants) n'est bien comprise qu'en degré homologique ≤ 1 — on ne semble guère, au-delà, disposer d'autres informations que celles, très partielles, fournies par Pettet [Pet05], de tels résultats en bas degré présenteraient déjà un intérêt significatif.

Chapitre 6

Perspectives pour l'homologie stable des groupes de congruences

Contrairement à ce qui se passait dans les deux chapitres précédents, on s'intéresse ici à l'homologie stable de familles de groupes qui, pour des raisons fondamentales, n'entrent pas dans le cadre formel du chapitre 3. Ce cadre formel sera néanmoins omniprésent ; en fait, on devra le retravailler sous différents aspects afin d'en étudier une généralisation *relative* (provenant de foncteurs monoïdaux entre catégories entrant dans le cadre du chapitre 3).

À la différence des chapitres antérieurs de ce mémoire, ce chapitre prospectif ne présente pratiquement que des conjectures ; il s'appuie sur des travaux en cours n'existant pour l'heure que sous la forme de brouillons inachevés.

6.1 Introduction

Dans cette section, où l'on reste souvent informel, on considère des groupes de congruences au sens usuel : A désigne un anneau (unitaire) et I un idéal bilatère de A ; on s'intéresse aux groupes $\Gamma_n(I) := \mathrm{Ker}\big(GL_n(A) \to GL_n(A/I)\big)$ (ces groupes ne dépendent que de I, vu comme anneau sans unité, d'où la notation ; en revanche, A peut s'avérer utile pour enrichir la structure, grâce à l'action par conjugaison de $GL_n(A)$ sur $\Gamma_n(I)$). On doit à Charney [Cha84] la première étude substantielle des phénomènes de stabilisation pour l'homologie de ces groupes. L'observation essentielle est que, même lorsque A et I vérifient toutes les conditions de finitude et de régularité (conditions de Bass [Bas64]) raisonnables, l'homologie des $\Gamma_n(I)$ ne se stabilise généralement *pas* au sens usuel. L'exemple le plus simple est le suivant : supposons que le carré de l'idéal I soit nul. Alors le groupe $\Gamma_n(I)$ est abélien, isomorphe au groupe additif $\mathfrak{gl}_n(I)$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans I. Alors $n \mapsto H_d(\mathfrak{gl}_n(I))$ (les coefficients sont ici constants ; on ne précise pas, à ce stade, la catégorie source : cela sera fait ultérieurement) ne se stabilise pratiquement jamais, mais cet objet n'est pas dépourvu de structure ni de propriétés de finitude : c'est un foncteur polynomial de degré au plus $2d$ (et, en général, exactement $2d$). En fait, la stabilité homologique au sens usuel constitue l'exception et non la règle pour les $\Gamma_n(I)$: pour le seul degré 1, on peut vérifier directement que cette stabilité implique la condition $I^2 = I$.

Le grand mérite du travail [Cha84] de Charney fut de montrer que la question de la stabilité pour l'homologie des groupes de congruences se scinde en réalité en deux problèmes de natures assez disjointes :

1. le problème de l'excision en K-théorie algébrique, phénomène complètement nouveau par rapport à ceux qui apparaissent lorsqu'on étudie la stabilité homologique dans un contexte classique (cf. section 3.3), sur lequel nous allons revenir ; avec la terminologie

que nous avons exposée au chapitre 1, l'excision en K-théorie algébrique (jusqu'en degré d) pour l'idéal I revient à dire que le foncteur $n \mapsto H_i(\Gamma_n(I))$ est stablement constant (pour $i \leq d$; nous préciserons les choses plus loin).

2. Un problème « classique » de stabilité, qui est vérifié pour tous les idéaux qui ne sont pas trop « pathologiques » (typiquement, qui vérifient une condition de Bass). Charney montre plus précisément que la stabilité homologique se présente sous un jour usuel pour les groupes $\Sigma_n \ltimes \Gamma_n(I)$, où elle vaut sous une condition de Bass, comme elle l'établit en adaptant les techniques utilisées par van der Kallen [vdK80] pour les groupes linéaires. Si (et seulement si) I est excisif pour la K-théorie algébrique, on peut ensuite en déduire la stabilité homologique au sens usuel pour les groupes $\Gamma_n(I)$ (voir le théorème 5.2 de [Cha84]).

Dans la section 6.3, nous reviendrons sur la question de ce qu'on peut dire de l'homologie des groupes $\Gamma_n(I)$, qui généralise la stabilité homologique, lorsque I est assez gentil mais non excisif pour la K-théorie algébrique. Pour l'instant, discutons brièvement cette question d'excision (suivant notamment [Cha84] et Suslin-Wodzicki [SW92]). Notant $\overline{GL}_n(A/I)$ l'image du morphisme canonique $GL_n(A) \to GL_n(A/I)$, on obtient une fibration (à homotopie près) d'espaces pointés

$$B\Gamma_n(I) \to BGL_n(A) \to B\overline{GL}_n(A/I)\ ;$$

naïvement, on pourrait souhaiter que, après stabilisation par rapport à n, l'application de la construction plus induise une fibration (à homotopie près)

$$B\Gamma_\infty(I)^+ \to BGL_\infty(A)^+ \to B\overline{GL}_\infty(A/I)^+,$$

ce qui permettrait d'obtenir, en considérant la suite exacte longue d'homotopie associée, un résultat d'excision. Malheureusement, il n'en est presque jamais ainsi, et la seule *définition* de $B\Gamma_\infty(I)^+$ pose problème : le sous-groupe dérivé de $\Gamma_\infty(I)$ n'est parfait que si $I^2 = I$. Même sous cette condition, la suite d'espaces précédente n'est généralement pas une fibration à homotopie près. En fait, cette condition équivaut à dire que $\overline{GL}_\infty(A/I)$ opère trivialement sur $H_*(\Gamma_\infty(I); \mathbb{Z})$, ou encore (l'équivalence entre ces deux dernières conditions constitue un simple exercice — cf. lemme 6.2 ci-après) que son sous-groupe des matrices de permutation opère trivialement (pour le H_1, on vérifie sans peine que cette condition équivaut à $I^2 = I$).

Dans [SW92], Suslin et Wodzicki démontrent que, rationnellement (i.e. lorsque I est une $\mathbb{Q}$-algèbre, ou lorsqu'on s'intéresse à l'homologie et au type d'homotopie rationnels), cette condition d'excision est équivalente à l'exactitude du complexe barre sur l'anneau sans unité I. Suslin a donné peu après, dans [Sus95], par une méthode plus directe, une condition nécessaire et suffisante pour l'excision (sur $\mathbb{Z}$), à savoir l'annulation de $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z} \ltimes I}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où $\mathbb{Z} \ltimes I$ désigne l'anneau unitaire obtenu en adjoignant formellement une unité à I (le groupe abélien sous-jacent est $\mathbb{Z} \oplus I$). Plus récemment, Cortiñas [Cor06] (dans le cas rationnel) et Geisser-Hesselholt [GH06] (modulo un nombre premier) ont obtenu, à l'aide de méthodes homotopiques, des résultats relatifs à l'estimation du défaut d'excision en K-théorie algébrique.

6.2 Retour sur le cadre général

Soient $(\mathcal{C}, +, 0)$ et $(\mathcal{D}, +, 0)$ deux petites catégories monoïdales symétriques (on pourrait sans doute adapter cela, plus généralement, aux catégories prétressées) dont les unités sont des objets initiaux. On se donne un foncteur strictement monoïdal $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Les groupes de congruences généralisés associés à cette donnée sont les

$$\Gamma_\Phi(c) := \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(c) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}}(\Phi(c))\right) \quad \text{pour } c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}.$$

Les deux exemples fondamentaux que nous avons en vue sont les suivants :

1. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant deux petites catégories additives munies de foncteurs de dualité, tout foncteur additif $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ compatible aux foncteurs de dualité induit un foncteur monoïdal $\mathbf{H}(\mathcal{A}) \to \mathbf{H}(\mathcal{B})$. En particulier, tout foncteur additif $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre petites catégories additives (sans dualité) induit un foncteur monoïdal $\mathbf{S}(\mathcal{A}) \to \mathbf{S}(\mathcal{B})$. Les groupes obtenus dans ce cadre sont les généralisations les plus directes des groupes de congruences usuels.
2. Le foncteur d'abélianisation $\mathcal{G} \to \mathbf{S}(\mathbf{ab})$ donne lieu aux groupes IA_n.

Dans les exemples précédents, les catégories source et but $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ vérifient les hypothèses du théorème 3.4 ; de surcroît, elles satisfont l'hypothèse suivante : *il existe un foncteur monoïdal symétrique (au sens faible) $\mathcal{C} \to \mathbf{Grp}$ dont les valeurs sont les groupes d'automorphismes et dont l'effet sur les morphismes (indiqué par une étoile en bas) est tel que $(f_* u) \circ f = f \circ u$ pour tous $u \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x)$ et $f \in \mathcal{C}(x, y)$ (en particulier, son effet sur les isomorphismes est la conjugaison).* Dans la suite, nous supposerons toujours que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ vérifient cette condition, et que, de plus, pour tout morphisme $f \in \mathcal{C}(x, y)$, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x) \arrow[r, "\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(f)"] \arrow[d, "\Phi_*"'] & \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(y) \arrow[d, "\Phi_*"] \\
\mathrm{Aut}_{\mathcal{D}}(\Phi(x)) \arrow[r, "\mathrm{Aut}_{\mathcal{D}}(\Phi(f))"] & \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}}(\Phi(y))
\end{tikzcd}$$

est commutatif, de sorte que Γ_Φ définit un foncteur (faiblement monoïdal) $\mathcal{C} \to \mathbf{Grp}$. Nous supposerons également que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ vérifient les hypothèses du théorème 3.4.

Intéressons-nous maintenant à l'homologie de ces différents groupes. Tout d'abord, considérons le cas « absolu » des groupes d'automorphismes $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x)$.

Proposition 6.1. *Soient M un groupe abélien et $d \in \mathbb{N}$. Le foncteur*

$$\mathcal{C} \to \mathbf{Ab} \qquad x \mapsto H_d(\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x); M)$$

est stablement constant*, c'est-à-dire que son image dans $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$ est isomorphe à l'image d'un foncteur constant.*

Plus généralement, si $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ un foncteur, le foncteur

$$\mathcal{C} \to \mathcal{A} \qquad x \mapsto H_d(\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x); F(x))$$

est stablement constant.

Démonstration. Soit x un objet de $\mathcal{C}$. Notons i_1 et i_2 les éléments canoniques de $\mathcal{C}(x, x + x)$ (venant de ce que 0 est objet initial de $\mathcal{C}$) et τ l'automorphisme de tressage symétrique de $x+x$, de sorte que $i_1 = \tau \circ i_2$. La conclusion provient, via le lemme suivant, de ce que $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(\tau)$ est la conjugaison par τ, et induit donc l'identité en homologie. □

Lemme 6.2. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck et T un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$. Supposons que, pour tout objet x de $\mathcal{C}$, l'automorphisme de tressage de $x + x$ induise l'identité de $T(x + x)$. Alors T est stablement constant.*

Esquisse de démonstration. Disons que deux morphismes parallèles $f, g : a \to b$ de $\mathcal{C}$ sont F-stablement égaux s'il existe un objet t de $\mathcal{C}$ tel que les composés de $F(f)$ ou $F(g) : F(a) \to F(b)$ avec le morphisme $F(b) \to F(b+t)$ induit par le morphisme canonique $b \to b+t$ soient égaux. L'hypothèse implique que tout automorphisme f d'un objet x de $\mathcal{C}$ est F-stablement égal à l'identité (noter d'abord que les automorphismes $x+f$ et $f+x$ de $x+x$ sont F-égaux). En utilisant la deuxième hypothèse du théorème 3.4, on en déduit que deux flèches parallèles de $\mathcal{C}$ sont toujours F-stablement égales. Cela permet facilement de conclure. □

Si l'on remplace $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x)$ par $\Gamma_\Phi(x)$, l'analogue de la proposition 6.1 n'est généralement *plus* valide, car le tressage τ de $x+x$ n'appartient presque jamais à $\Gamma_\Phi(x+x)$, de sorte que la restriction à ce sous-groupe de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x+x)$ de la conjugaison par τ n'induit pas nécessairement l'identité en homologie. C'est exactement le problème de l'excision en K-théorie algébrique, posé dans le cadre formel plus général que nous venons d'introduire.

Toutefois, le fait que les automorphismes intérieurs opèrent trivialement en homologie implique que le foncteur $\mathcal{C} \to \mathbf{Ab} \quad x \mapsto H_i(\Gamma_\Phi(x);\Bbbk)$ n'est pas quelconque : les automorphismes de x dans $\mathcal{C}$ opèrent via le morphisme $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x) \xrightarrow{\Phi_*} \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}}(\Phi(x))$. Si l'on note $\bar{\mathcal{D}}$ la sous-catégorie monoïdale de $\mathcal{D}$ image du foncteur Φ, sous de légères hypothèses vérifiées dans les cas qui nous intéressent [1], $\bar{\mathcal{D}}$ satisfait aux mêmes axiomes catégoriques que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, et le foncteur $x \mapsto H_*(\Gamma_\Phi(x))$ se factorise par le foncteur canonique $\mathcal{C} \to \bar{\mathcal{D}}$ qu'induit Φ. Autrement dit, on ne perd guère de généralité à supposer que Φ est plein et essentiellement surjectif (en remplaçant $\mathcal{D}$ par $\bar{\mathcal{D}}$) et que notre foncteur d'homologie se factorise (de manière unique) par Φ.

Dès lors, les questions générales sur l'homologie stable proposées dans la section 3.1 se transforment, dans le cadre des groupes de congruences généralisés, en les suivantes :

1. *problème de l'excision* (jusqu'en degré d, à coefficients dans $\Bbbk$) : le foncteur $\mathcal{C} \to \mathbf{Ab} \quad x \mapsto H_i(\Gamma_\Phi(x);\Bbbk)$ (qui peut donc se définir, dans les cas usuels, depuis $\bar{\mathcal{D}}$) est-il un stablement constant (pour $i \leq d$) ?
2. *problème de la stabilité homologique* : pour le cas excisif, il se pose en les mêmes termes que dans le cadre du chapitre 3 ; le cas général est discuté ci-après, dans la section 6.3.
3. *estimation de l'homologie stable* (avec une hypothèse d'analycité sur les coefficients) : dans le cas excisif, il s'agit, comme au chapitre 3, de tenter de la décrire à coefficients tordus à partir de l'homologie stable à coefficients constants. Mais en général, l'homologie à coefficients constants pose déjà de redoutables problèmes qualitatifs. Avant de revenir plus en détail, dans la section 6.5, sur ces questions, posons un premier problème fondamental.

Problème 6.3. *Étant donné $i \in \mathbb{N}$, le foncteur $\mathcal{C} \to \mathbf{Ab} \quad x \mapsto H_i(\Gamma_\Phi(x);\Bbbk)$ est-il faiblement polynomial ? Si oui, peut-on estimer son degré, en fonction de i et du foncteur $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$?*

On s'attend à une réponse positive à ces questions dans les cas usuels, mais le seul cadre formel général où l'on s'est placé est beaucoup trop vaste pour assurer la propriété de polynomialité attendue, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 6.4. La catégorie $\mathcal{C}$ vérifiant les hypothèses précédentes, soit $\Gamma : \mathcal{C} \to \mathbf{Grp}$ un foncteur faiblement monoïdal. Remarquer que, du fait que l'unité 0 de la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ en est un objet initial, se donner une structure faiblement monoïdale sur un tel foncteur revient exactement à supposer que, lorsque a et b sont deux objets de $\mathcal{C}$, les images des morphismes de $\Gamma(a)$ et $\Gamma(b)$ respectivement dans $\Gamma(a+b)$ induits par les morphismes canoniques $a \to a+b$ et $b \to a+b$ sont permutables. En particulier, si Γ prend ses valeurs dans les groupes *abéliens*, il existe une et une seule structure (faiblement) monoïdale sur ce foncteur.

Notons $\mathcal{C}_\Gamma$ la construction de Grothendieck associée à la composée de Γ et du plongement pleinement fidèle canonique des groupes dans les petites catégories. Ainsi $\mathcal{C}_\Gamma$ possède les mêmes objets que $\mathcal{C}$, hérite d'une structure monoïdale symétrique telle que le foncteur canonique $\Phi : \mathcal{C}_\Gamma \to \mathcal{C}$ soit strictement monoïdal, et $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_\Gamma}(x) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x) \ltimes \Gamma(x)$.

On vérifie aisément que $\mathcal{C}_\Gamma$ vérifie, comme $\mathcal{C}$, les hypothèses prescrites dans toute cette section sur nos catégories sources et buts. On a $\Gamma_\Phi = \Gamma \circ \Phi$.

1. En modifiant, de façon non fondamentale, les hypothèses du théorème 3.4, on peut éviter toute restriction de ce type : la forme « optimale » du cadre catégorique pour les considérations de ce chapitre reste à affiner.

Se restreignant aux foncteurs dans les groupes abéliens, on voit ainsi que tout foncteur $\Gamma : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ entre dans le cadre de cette section. En particulier, considérant la seule homologie de degré 1, on peut obtenir *n'importe quel* foncteur $\mathcal{C}_\Phi \to \mathbf{Ab}$ se factorisant par Φ !

L'exemple précédent montre aussi qu'*on peut se ramener au cas où la catégorie but est Θ et où le foncteur Φ possède une section* : pour étudier les groupes $\Gamma_\Phi(a^{+n})$, appliquer la construction précédente à la composée du foncteur Γ_Φ et du foncteur monoïdal strict $\Theta \to \mathcal{C}$ envoyant $\mathbf{1}$ sur a.

6.3 Retour sur la question de la stabilité

À partir du travail de Charney [Cha84], Putman [Put15], Church-Ellenberg-Farb-Nagpal [CEFN14] puis Church-Ellenberg [CE] ont obtenu (par des méthodes analogues, avec des variantes dans les énoncés — dont certains donnent des bornes, exponentielles, pour le degré polynomial — et les démonstrations) des résultats qui, avec notre terminologie, peuvent s'exprimer comme suit.

Théorème 6.5 (Putman, Church-Ellenberg-Farb-Nagpal, Church-Ellenberg)**.** *Soit I un idéal d'un anneau commutatif possédant un rang stable de Bass fini. Pour tout entier $d \in \mathbb{N}$, le foncteur*

$$\Theta \to \mathbf{Ab} \qquad \mathbf{n} \mapsto H_d(\Gamma_n(I); \mathbb{Z})$$

est fortement polynomial.

Lorsque l'anneau sans unité I est excisif pour la K-théorie algébrique (par exemple, si c'est un anneau unitaire !), c'est-à-dire que ces foncteurs sont stablement constants, cet énoncé équivaut à la stabilité homologique ordinaire.

Il paraît très raisonnable d'émettre la conjecture suivante, qui semble ouverte pour toutes les valeurs de $d \geq 2$.

Conjecture 6.6. *Pour tout $d \in \mathbb{N}$, le foncteur*

$$\mathbf{S}(\mathbf{ab}) \to \mathbf{Ab} \qquad \mathbb{Z}^n \mapsto H_d(IA_n; \mathbb{Z})$$

est fortement polynomial.

Plus généralement, sous les hypothèses de la section 6.2, se pose la question suivante qui étend celle de la stabilité homologique usuelle (qui correspond, comme précédemment, à la situation excisive).

Problème 6.7. *Trouver des conditions suffisantes sur les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ et le foncteur $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (inspirées par exemple de [RWW]) pour que le foncteur*

$$\mathcal{C} \to \mathbf{Ab} \qquad x \mapsto H_d(\Gamma_\Phi(x); \mathbb{Z})$$

soit fortement polynomial pour tout $d \in \mathbb{N}$.

Remarque 6.8. Dans [PS], Putman et Sam établissent un résultat plus faible, mais allant dans la même direction, pour des groupes analogues. Plus précisément, soient $N \geq 2$ un entier et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{IA}_n(N) := \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}) \twoheadrightarrow GL_n(\mathbb{Z}) \to GL_n(\mathbb{Z}/N)\right).$$

Pour tout entier $d \in \mathbb{N}$, on dispose d'un foncteur $(\mathbb{Z}/N)^n \mapsto H_d(\mathrm{IA}_n(N); \mathbb{Z})$ de $\mathcal{F}(\mathbf{S}(\mathbb{Z}/N); \mathbb{Z})$; Putman et Sam montrent qu'il est *de type fini.* Leur démonstration repose sur le même type d'approche que celle du théorème 6.5 et sur un profond résultat de finitude (qu'ils établissent dans la première partie de leur travail [PS]), à savoir le caractère localement noethérien de la catégorie abélienne $\mathcal{F}(\mathbf{S}(\mathbb{Z}/N);\mathbb{Z})$. Malheureusement, la catégorie $\mathcal{F}(\mathbf{S}(\mathbb{Z});\mathbb{Z})$ n'est *pas* localement noethérienne (car l'anneau de groupe $\mathbb{Z}[GL_n(\mathbb{Z})]$ n'est jamais localement noethérien, pour $n \geq 2$), de sorte que leur méthode ne peut pas être utilisée pour établir une version affaiblie de la conjecture 6.6 où *fortement polynomial* serait remplacé par *de type fini*.

L'approche utilisée pour montrer le théorème 6.5 se généralise manifestement sans difficulté à notre situation générale, lorsqu'on sait montrer la stabilité homologique au sens usuel pour les groupes d'automorphismes d'objets de la catégorie source $\mathcal{C}$, *dès lors que* $\mathcal{D}$ *est la catégorie* Θ. On peut certes s'y ramener sans changer les groupes Γ_Φ (cf. fin de la section 6.2), mais cette opération modifie également la catégorie source, d'une façon qui ne la rend pas toujours accessible aux méthodes disponibles pour montrer la stabilité homologique usuelle. Une idée supplémentaire semble donc nécessaire pour aborder la conjecture 6.6, par exemple.

Une approche possible pour cela consiste à « déstabiliser » les méthodes que nous allons développer dans la suite de ce chapitre. Toutefois, cela pourrait s'avérer inutilement compliqué : nous pensons qu'une approche plus directe pourrait exister.

Remarque 6.9. Le théorème 3.6 constitue une autre illustration des liens entre la propriété polynomiale forte, les groupes « de type congruences » et la stabilité homologique, y compris dans un sens usuel. En effet, les groupes de Fouxe-Rabinovitch sont « de type congruences » ; toutefois, ils sont parmi les seuls de cette sorte dont le calcul de l'homologie puisse être abordé par des méthodes plus ou moins directes. Ainsi, l'approche générale pour les groupes de type congruences, dont on présente plusieurs facettes dans ce chapitre est *inverse* de celle du théorème 3.6 : on part en général de renseignements sur les groupes d'automorphismes usuels (comme la stabilité homologique) pour en déduire des propriétés homologiques sur les groupes de type congruences, plus difficiles d'accès la plupart du temps.

6.4 La suite spectrale fondamentale

Soient $(\mathcal{C},+,0)$ une petite catégorie monoïdale symétrique et $\Bbbk$ un anneau de base commutatif de base. On note

$$\underset{[\mathcal{C},+]}{\otimes} : \mathcal{F}(\mathcal{C};\Bbbk)\times\mathcal{F}(\mathcal{C};\Bbbk)\to\mathcal{F}(\mathcal{C};\Bbbk)$$

le foncteur composé du produit tensoriel extérieur (sur $\Bbbk$) $\boxtimes : \mathcal{F}(\mathcal{C};\Bbbk)\times\mathcal{F}(\mathcal{C};\Bbbk)\to\mathcal{F}(\mathcal{C}\times\mathcal{C};\Bbbk)$ et de l'extension de Kan à gauche le long du foncteur $+ : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$.

Supposons de plus que 0 est objet initial de $\mathcal{C}$: on vérifie alors sans difficulté que ce foncteur induit un foncteur, encore noté de la même façon,

$$\underset{[\mathcal{C},+]}{\otimes} : \mathbf{St}(\mathcal{C};\Bbbk)\times\mathbf{St}(\mathcal{C};\Bbbk)\to\mathbf{St}(\mathcal{C};\Bbbk).$$

Sous quelques hypothèses supplémentaires, vérifiées si $\mathcal{C}$ est du type $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ ou $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ (où $\mathcal{A}$ est une petite catégorie additive, munie d'un foncteur de dualité dans le deuxième cas), ou encore la catégorie de groupes libres $\mathcal{G}$, on peut dériver le bifoncteur $\underset{[\mathcal{C},+]}{\otimes}$ (qui est exact à droite relativement à chaque variable) comme un produit tensoriel usuel. Précisons un peu. On suppose (« axiome de la somme ») qu'à chaque morphisme f de $\mathcal{C}$ on peut associer un objet $\mathfrak{c}(f)$ de $\mathcal{C}$ de sorte qu'on dispose de bijections

$$\mathcal{C}(x+t,u)\simeq\bigsqcup_{f\in\mathcal{C}(x,u)}\mathcal{C}(t,\mathfrak{c}(f))$$

avec des conditions de naturalité dont on s'abstiendra de donner les détails (tout se passe de façon immédiate dans les applications qu'on a en vue, rappelées ci-dessus).

Cette hypothèse implique que, pour tout objet t de $\mathcal{C}$, le foncteur $P_t^{\mathcal{C}} \underset{[\mathcal{C},+]}{\otimes} - : \mathcal{F}(\mathcal{C};\Bbbk) \to \mathcal{F}(\mathcal{C};\Bbbk)$ est *exact* ; son effet sur les objets est donné par

$$\big(P_t^{\mathcal{C}} \underset{[\mathcal{C},+]}{\otimes} F\big)(x) \simeq \bigoplus_{f\in\mathcal{C}(t,x)} F\big(\mathfrak{c}(f)\big). \tag{6.1}$$

Par conséquent, $\underset{[\mathcal{C},+]}{\otimes}$, bifoncteur équilibré, induit entre catégories dérivées des foncteurs

$$\overset{\mathbf{L}}{\underset{[\mathcal{C},+]}{\otimes}} : \mathbf{D}^-(\mathcal{F}(\mathcal{C};\Bbbk)) \times \mathbf{D}^-(\mathcal{F}(\mathcal{C};\Bbbk)) \to \mathbf{D}^-(\mathcal{F}(\mathcal{C};\Bbbk))$$

et

$$\overset{\mathbf{L}}{\underset{[\mathcal{C},+]}{\otimes}} : \mathbf{D}^-(\mathbf{St}(\mathcal{C};\Bbbk)) \times \mathbf{D}^-(\mathbf{St}(\mathcal{C};\Bbbk)) \to \mathbf{D}^-(\mathbf{St}(\mathcal{C};\Bbbk))$$

(où $\mathbf{D}^-$ désigne la catégorie dérivée bornée à droite — complexes nuls en degré assez grand, avec les conventions *co*homologiques). Les dérivés à gauche au sens naïf seront notés $\mathrm{Tor}_*^{[\mathcal{C},+]}$.

Considérons maintenant un foncteur monoïdal $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, où toutes les hypothèses de la section 6.2 sont vérifiées (y compris que Φ est plein et essentiellement surjectif — dans le cas des groupes de congruences usuels, pour s'y placer, le mieux est de considérer un anneau sans unité I et l'épimorphisme *scindé* d'anneaux unitaires $\mathbb{Z} \ltimes I \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$), ainsi que l'axiome de la somme précédent, pour $\mathcal{C}$ comme pour $\mathcal{D}$. Si F est un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C};\Bbbk)$ et i un entier, on a vu que $x \mapsto H_i(\Gamma_\Phi(x); F(x))$ se factorise par Φ en un foncteur dans $\mathcal{F}(\mathcal{D};\Bbbk)$. Cette construction définit un foncteur $\mathbf{Fct}(\mathcal{C};\Bbbk) \to \mathbf{Fct}(\mathcal{D};\Bbbk)$. On dispose également d'un foncteur $\Phi_! : \mathbf{Fct}(\mathcal{C};\Bbbk) \to \mathbf{Fct}(\mathcal{D};\Bbbk)$, l'extension de Kan à gauche le long de Φ. On vérifie facilement que tous ces foncteurs induisent des foncteurs $\mathbf{St}(\mathcal{C};\Bbbk) \to \mathbf{St}(\mathcal{D};\Bbbk)$; celui induit par le i-ème groupe d'homologie de Γ_Φ sera noté $\mathcal{H}_i$, tandis que celui qu'induit l'extension de Kan sera toujours noté $\Phi_!$.

Proposition 6.10. *Il existe dans $\mathcal{F}(\mathcal{C};\Bbbk)$ ou dans $\mathbf{St}(\mathcal{D};\Bbbk)$ une suite spectrale*

$$E^2_{p,q} = \mathbf{L}_p\big((- \underset{[\mathcal{D},+]}{\otimes} \mathcal{H}_q(\Bbbk)) \circ \Phi_!\big)(F) \Rightarrow \mathcal{H}_{p+q}(F)$$

naturelle en l'objet F de $\mathbf{St}(\mathcal{C};\Bbbk)$.

Sa deuxième page est l'aboutissement d'une autre suite spectrale naturelle :

$$E'^2_{i,j} = \mathrm{Tor}_i^{[\mathcal{D},+]}(\mathbf{L}_j(\Phi_!)(F), X) \Rightarrow \mathbf{L}_{i+j}\big((- \underset{[\mathcal{D},+]}{\otimes} X) \circ \Phi_!\big)(F).$$

Esquisse de démonstration. Il suffit de montrer le premier point lorsque $F = P_c^{\mathcal{C}}$. En utilisant l'axiome de la somme et la plénitude de Φ, on obtient un isomorphisme naturel

$$\mathcal{C}(c,x) \simeq \coprod_{f\in\mathcal{D}(\Phi(c),\Phi(x))} \Gamma_\Phi(x)/\Gamma_\Phi(\mathfrak{c}(f))$$

de $\Gamma_\Phi(x)$-ensembles, pour $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, d'où l'on tire, par le lemme de Shapiro

$$\mathcal{H}_n(P_c^{\mathcal{C}}) \simeq \mathcal{H}_n(\Bbbk) \underset{[\mathcal{D},+]}{\otimes} P^{\mathcal{D}}_{\Phi(c)}$$

ce qui donne la conclusion. $\square$

Dans la situation excisive (i.e. où les $\mathcal{H}_q(\Bbbk)$ sont constants), cette suite spectrale s'arrête à la deuxième page et donne un résultat complètement analogue à celui de la situation « absolue » (théorème 3.4). Dans le cas où, de plus, $\Bbbk$ est un corps, on obtient par exemple $\mathcal{H}_n(F) \simeq \bigoplus_{p+q=n} \mathbf{L}_p(\Phi_!)(F) \underset{\Bbbk}{\otimes} \mathcal{H}_q(\Bbbk)$.

6.5 Conjectures

Si le foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{C};\Bbbk)$ se factorise en $T\circ\Phi$, pour T dans $\mathcal{F}(\mathcal{D};\Bbbk)$, l'action de $\Gamma_\Phi(x)$ sur $F(x)$ est *triviale*. Autrement dit, $\mathcal{H}_*(F)$ s'exprime facilement à partir de $\mathcal{H}_*(\Bbbk)$ — si $\Bbbk$ est un corps, par exemple, il est isomorphe à $\mathcal{H}_*(\Bbbk)\otimes T$. La proposition 6.10 fait donc apparaître $\mathcal{H}_*(\Bbbk)$ à la fois dans sa deuxième page et son aboutissement.

Par commodité technique, on suppose (ce n'est manifestement pas essentiel) que $\Bbbk$ est un corps, dans ce qui suit.

Proposition 6.11. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *les objets $\mathcal{H}_q(\Bbbk)$ de $\mathbf{St}(\mathcal{D};\Bbbk)$ sont tous constants (situation excisive) ;*
2. *pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, l'endofoncteur $\mathbf{L}_i(\Phi_!)\circ\Phi^*$ de $\mathbf{St}(\mathcal{D};\Bbbk)$ est nul ;*
3. *pour tout $i\in\mathbb{N}^*$ et tout objet d de $\mathcal{D}$, l'objet $(\mathbf{L}_i(\Phi_!)\circ\Phi^*)(\Bbbk[\mathcal{D}(d,-)])$ de $\mathbf{St}(\mathcal{D};\Bbbk)$ est nul.*

Esquisse de démonstration. (Tous les raisonnements sont menés dans $\mathbf{St}(\mathcal{D};\Bbbk)$.)
1.⇒ 2. Les hypothèses sur $\mathcal{H}_*(\Bbbk)$ et sur $\Bbbk$ impliquent que la suite spectrale de la proposition 6.10 prend la forme, pour $F=\Phi^*G$:

$$E^2_{p,q}=\mathbf{L}_p(\Phi_!)(\Phi^*G)\otimes\mathcal{H}_q(\Bbbk)\Rightarrow\mathcal{H}_{p+q}(\Bbbk)\otimes G\ ;$$

le morphisme de coin $E^2_{0,q}=\Phi_!(\Phi^*G)\otimes\mathcal{H}_q(\Bbbk)\to\mathcal{H}_q(\Bbbk)\otimes G$ est induit par la coünité de l'adjonction $\Phi_!\Phi^*\to\mathrm{Id}$, qui est un isomorphisme parce que Φ est plein et essentiellement surjectif. Un raisonnement formel permet alors de montrer, par récurrence sur $i>0$, que $\mathbf{L}_i(\Phi_!)\circ\Phi^*$ est nul. *3.⇒ 1.* L'hypothèse et l'observation précédente de coünité montrent que la suite spectrale de la proposition 6.10 se réduit, pour $F=\Phi^*P^{\mathcal{D}}_d$, au fait que le morphisme de coin

$$E^2_{0,q}=P^{\mathcal{D}}_d\underset{[\mathcal{D},+]}{\otimes}\mathcal{H}_q(\Bbbk)\to P^{\mathcal{D}}_d\otimes\mathcal{H}_q(\Bbbk),$$

qui est le morphisme canonique, est toujours un isomorphisme. Pour conclure, il suffit donc d'observer que, dans le formalisme de la section 6.4, un objet T de $\mathbf{St}(\mathcal{C};\Bbbk)$ est constant si et seulement si le morphisme canonique $P^{\mathcal{C}}_c\underset{[\mathcal{C},+]}{\otimes}T\to P^{\mathcal{C}}_c\otimes T$ (dans lequel le morphisme canonique précédent se lit de façon évidente) est un isomorphisme pour tout objet t de $\mathcal{C}$, ce qu'on déduit facilement de l'isomorphisme (6.1). □

Afin de discuter les conditions qui apparaissent dans cette proposition, examinons une situation analogue additive, nettement plus simple.

Proposition 6.12. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des catégories additives petites et $\Psi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ un foncteur additif plein et essentiellement surjectif. On note $Add(\mathcal{A},\Bbbk)$ la catégorie des foncteurs additifs de $\mathcal{A}$ vers $\Bbbk$-*$\mathbf{Mod}$.

1. *Si $A:\mathcal{A}^{op}\to\mathbf{Ab}$ et $T:\mathcal{A}\to\Bbbk\text{-}\mathbf{Mod}$ sont des foncteurs additifs, on dispose d'un isomorphisme naturel de $\Bbbk$-modules gradués*

   $$\mathrm{Tor}^{\mathcal{A}}_*(\Bbbk[A],T)\simeq Tor^{add}_*(A,T)$$

   où le symbole Tor^{add}_* désigne le bifoncteur gradué obtenu en dérivant à gauche (par rapport à l'un ou l'autre des arguments) la restriction à $Add(\mathcal{A}^{op},\mathbb{Z})\times Add(\mathcal{A},\Bbbk)$ du bifoncteur $\underset{\mathcal{A}}{\otimes}$.

2. *Si $A:\mathcal{A}^{op}\to\mathbf{Ab}$ et $B:\mathcal{A}\to\mathbf{Ab}$ sont des foncteurs additifs tels que $Tor^{add}_i(A,B)=0$ pour tout $i>0$, alors $\mathrm{Tor}^{\mathcal{A}}_i(\Bbbk[A],\Bbbk[B])=0$ pour tout $i>0$.*

3. *Notant* $\Psi_! : \mathcal{F}(\mathcal{A};\Bbbk) \to \mathcal{F}(\mathcal{B};\Bbbk)$ *l'extension de Kan à gauche le long de* Ψ*, les assertions suivantes sont équivalentes.*
   (a) *Les foncteurs* $\mathbf{L}_i\Psi_! \circ \Psi^* : \mathcal{F}(\mathcal{B};\Bbbk) \to \mathcal{F}(\mathcal{B};\Bbbk)$ *sont nuls pour tout* $i > 0$ *;*
   (b) *Les foncteurs* $\mathbf{L}_i\Psi_! \circ \Psi^*$ *s'annulent sur les foncteurs additifs pour tout* $i > 0$ *;*
   (c) *Les foncteurs* $\mathbf{L}_i\Psi_! \circ \Psi^*$ *s'annulent sur la* $\Bbbk$*-linéarisation des foncteurs additifs pour tout* $i > 0$ *;*
   (d) $Tor_i^{add}(\Psi^*A, \Psi^*B) = 0$ *pour tout* $i > 0$ *et tous foncteurs additifs* $A : \mathcal{B}^{op} \to \mathbf{Ab}$ *et* $B : \mathcal{B} \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Mod}$*, lorsque* A *est projectif dans* $Add(\mathcal{A}^{op}, \mathbb{Z})$*.*

   Si I *est un anneau sans unité et* $\Psi : (\mathbb{Z} \ltimes I)\text{-}\mathbf{mod} \to \mathbf{ab}$ *le foncteur* $\mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}\ltimes I}{\otimes} -$*, alors ces conditions équivalent encore à la nullité de* $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}\ltimes I}(\mathbb{Z}, \Bbbk)$ *pour tout* $i > 0$*.*
4. *Les foncteurs* $\mathbf{L}_i\Psi_!$ *envoient* $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A};\Bbbk)$ *dans* $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{B};\Bbbk)$ *pour tous* $i, d \in \mathbb{N}$*.*

Esquisse de démonstration. Le premier point découle d'une variante du théorème 4 de Troesch [Tro02]. Le second s'obtient en considérant une résolution *simpliciale* de A dans la catégorie des foncteurs additifs et en utilisant l'isomorphisme canonique $\Bbbk[A] \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \Bbbk[B] \simeq \Bbbk[A \underset{\mathcal{A}}{\otimes} B]$ pour A et B additifs projectifs, ainsi que la préservation des ensembles simpliciaux contractiles par le foncteur $\Bbbk[-]$.

La formule explicite

$$\mathbf{L}_\bullet(\Psi_!)(F)(b) = \mathrm{Tor}_\bullet^{\mathcal{A}}(\Bbbk[\mathcal{B}(-,b) \circ \Psi], F)$$

permet de faire le lien entre les deux premiers points et le troisième. Elle montre l'équivalence entre *3b* et *3d*, grâce à la première assertion, tandis que la deuxième établit l'implication *3d*$\Rightarrow$ *3c*. L'équivalence entre *3a* et *3c* provient d'un argument formel, en utilisant le fait que la coünité $\Psi_!\Psi^* \to \mathrm{Id}$ est un isomorphisme, puisque Ψ est plein et essentiellement surjectif.

Le cas particulier lié à un anneau sans unité découle de l'équivalence de catégories $Add(A\text{-}\mathbf{mod}, \Bbbk) \simeq \mathbf{Mod}\text{-}(A \otimes \Bbbk)$ pour tout anneau A.

La dernière assertion découle de la première et de la formule explicite ci-dessus pour $d = 1$; le cas général s'en déduit par récurrence. $\square$

La conjecture suivante constitue une généralisation « relative » du théorème 4.3 ; on s'attend à ce qu'elle puisse être abordée à l'aide du même type d'outils. (Comme dans le chapitre 4, on exprime les résultats attendus dans un contexte hermitien, qui étend le cas linéaire qu'on a principalement en vue et ne devrait pas être plus difficile à aborder.)

Conjecture 6.13. *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *des petites catégories additives munies d'un foncteur de dualité,* $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *un foncteur additif compatible à la dualité,* $i_{\mathcal{A}} : \mathbf{H}(\mathcal{A}) \to \mathbf{HD}(\mathcal{A})$ *le foncteur (pleinement fidèle) d'inclusion de la catégorie* $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ *dans la catégorie des objets hermitiens éventuellement dégénérés et* $p_{\mathcal{A}} : \mathbf{HD}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ *le foncteur d'oubli. On adopte des notations analogues pour* $\mathcal{B}$ *et l'on note* $\Phi := \mathbf{H}(\Psi)$*. Alors, pour tout foncteur* analytique F *de* $\mathcal{F}(\mathcal{A};\Bbbk)$*, le morphisme canonique*

$$\mathbf{L}_\bullet(\Phi_!)i_{\mathcal{A}}^*p_{\mathcal{A}}^*(F) \to i_{\mathcal{B}}^*\mathbf{L}_\bullet\mathbf{HD}(\Psi)_!(F)$$

est un isomorphisme.

Comme la catégorie $\mathbf{HD}(\mathcal{A})$ est une catégorie d'éléments, l'algèbre homologique sur cette catégorie est reliée de façon beaucoup plus simple à l'algèbre homologique sur $\mathcal{A}$. De la sorte, on s'attend au résultat suivant (au vu de la proposition 6.11), dont la conjonction avec la dernière partie de la troisième assertion de la proposition 6.12 redonnerait aussitôt le critère de Suslin d'excisivité en K-théorie algébrique déjà mentionné.

Conjecture 6.14. *Les hypothèses et notations étant celles de la conjecture 6.13, il y a équivalence entre les assertions suivantes.*

1. *Les foncteurs* $\mathbf{L}_i\Psi_! \circ \Psi^* : \mathcal{F}(\mathcal{B};\Bbbk) \to \mathcal{F}(\mathcal{B};\Bbbk)$ *sont nuls pour tout* $i > 0$ *;*
2. *Les foncteurs* $\mathbf{L}_i\Psi_! \circ \Psi^* : \mathcal{F}(\mathcal{B};\Bbbk) \to \mathcal{F}(\mathcal{B};\Bbbk)$ *sont nuls sur les foncteurs polynomiaux pour tout* $i > 0$ *;*
3. *Les foncteurs* $\mathbf{L}_i\mathbf{HD}(\Psi)_! \circ \mathbf{HD}(\Psi)^* : \mathcal{F}(\mathbf{HD}(\mathcal{B});\Bbbk) \to \mathcal{F}(\mathbf{HD}(\mathcal{B});\Bbbk)$ *prennent des valeurs stablement nulles pour tout* $i > 0$ *;*
4. *Les foncteurs* $\mathbf{L}_i\mathbf{HD}(\Psi)_! \circ \mathbf{HD}(\Psi)^* : \mathcal{F}(\mathbf{HD}(\mathcal{B});\Bbbk) \to \mathcal{F}(\mathbf{HD}(\mathcal{B});\Bbbk)$ *prennent des valeurs stablement nulles sur les foncteurs polynomiaux pour tout* $i > 0$ *;*
5. *Les foncteurs* $\mathbf{L}_i\mathbf{H}(\Psi)_! \circ \mathbf{H}(\Psi)^* : \mathcal{F}(\mathbf{H}(\mathcal{B});\Bbbk) \to \mathcal{F}(\mathbf{H}(\mathcal{B});\Bbbk)$ *prennent des valeurs stablement nulles pour tout* $i > 0$ *;*
6. *Les foncteurs* $\mathbf{L}_i\mathbf{H}(\Psi)_! \circ \mathbf{H}(\Psi)^* : \mathcal{F}(\mathbf{H}(\mathcal{B});\Bbbk) \to \mathcal{F}(\mathbf{H}(\mathcal{B});\Bbbk)$ *prennent des valeurs stablement nulles sur les foncteurs polynomiaux pour tout* $i > 0$.

En étudiant plus précisément ces extensions de Kan dérivées et l'effet des foncteurs $\mathrm{Tor}_*^{[\mathbf{S}(\mathcal{A}),\oplus]}$ sur les foncteurs polynomiaux, on s'attend ensuite à pouvoir aborder la conjecture et le problème qui suivent, et à être en mesure de donner des renseignements sur l'homologie stable à coefficients polynomiaux des groupes de congruences (quelques calculs complets dans le cas excisif, supposant connue l'homologie stable à coefficients constants, mais aussi des informations partielles allant en ce sens dans certains situations non excisives).

Conjecture 6.15. *Soient* $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *un foncteur additif, plein et essentiellement surjectif, entre petites catégories additives et* $\Phi := \mathbf{S}(\Psi) : \mathbf{S}(\mathcal{A}) \to \mathbf{S}(\mathcal{B})$*. Pour tout entier* $d \geq 0$*, l'objet* $\mathcal{H}_d(\Bbbk)$ *de* $\mathbf{St}(\mathbf{S}(\mathcal{B});\Bbbk)$ *est polynomial de degré au plus* $2d$*.*

Problème 6.16. *Dans la situation précédente, que peut-on dire de l'image de* $\mathcal{H}_d(\Bbbk)$ *dans* $\mathcal{P}ol_{2d}(\mathbf{S}(\mathcal{B});\Bbbk)/\mathcal{P}ol_{2d-1}(\mathbf{S}(\mathcal{B});\Bbbk)$ *?*

La conjecture et le problème précédents puisent leur inspiration dans la description de Suslin [Sus95] de $\mathcal{H}_q(\Bbbk)$ (avec les notations de la section 6.4), dans le cas « classique » des groupes de congruences associés à un anneau sans unité I, où q est le plus petit degré non excisif (autrement dit, lorsque $\mathcal{H}_i(\Bbbk)$ est constant pour $i < q$).

Suslin construit d'abord, en toute généralité (et de façon directe), un morphisme naturel (compatible à la stabilisation)

$$H_q(\Gamma_n(I);\mathbb{Z}) \to \mathfrak{gl}_n\big(\mathrm{Tor}_q^{\mathbb{Z}\ltimes I}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})\big).$$

Le membre de droite définit un foncteur polynomial de degré 2 (lorsqu'il n'est pas nul) en $\mathbb{Z}^n$. Avec notre terminologie, le résultat qu'établit Suslin dans [Sus95] est que le noyau et le conoyau du morphisme précédent sont faiblement polynomiaux de degré au plus 0, lorsque I est excisif pour la K-théorie algébrique jusqu'en degré $q-1$. C'est ce type de résultat qu'on espère étendre aux degrés supérieurs (dans le contexte plus général de catégories du type $\mathbf{H}(\mathcal{A})$).

Signalons également que le lemme 3.5 de l'article [Cal15] de Calegari implique que la conjecture 6.15 est vraie pour certains idéaux des anneaux d'entiers de corps de nombres.

Cas des groupes IA

Nous nous penchons désormais sur le cas où $\Phi : \mathcal{G} \to \mathbf{S}(\mathbf{ab})$ est le foncteur d'abélianisation, de sorte que $\Gamma_\Phi(\mathbb{Z}^{*n}) = IA_n$. La situation est non excisive dès le degré homologique 1 : avec les notations de la section 6.4, on dispose d'un isomorphisme

$$\mathcal{H}_1(V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, \Lambda^2(V))$$

naturel en l'objet V de $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$ (cf. [Kaw06], section 6). Notons qu'on obtient ici un foncteur de degré 3 en V, alors que, dans la situation linéaire discutée précédemment, le premier groupe d'homologie définit un foncteur de degré (faible) 2 (dans la situation non excisive).

Contrairement à ce cas du degré 1, exceptionnel puisqu'accessible par une technique directe permettant un calcul complet (y compris instable), on ne s'attend pas, dans la conjecture 6.6, à obtenir des degrés *forts* significatifs. Ce sont plutôt les degrés *faibles* qui vont nous intéresser maintenant.

Suivant une stratégie analogue à celle esquissée ci-avant pour les groupes de congruences usuels, on commence par étudier l'extension de Kan à gauche dérivée le long du foncteur d'abélianisation des groupes libres de rang fini vers les groupes abéliens libres de rang fini, mais avec les morphismes usuels.

Proposition 6.17. *Soient $\Psi : \mathbf{gr} \to \mathbf{ab}$ le foncteur d'abélianisation et $\Psi_! : \mathcal{F}(\mathbf{gr};\Bbbk) \to \mathcal{F}(\mathbf{ab};\Bbbk)$ l'extension de Kan à gauche le long de Ψ. Pour tous entiers naturels i et d, $\mathbf{L}_i(\Psi_!)$ envoie $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{gr};\Bbbk)$ dans $\mathcal{P}ol_{i+d}(\mathbf{ab};\Bbbk)$.*

Esquisse de démonstration. La résolution barre et la formule de Künneth montrent que $\mathbf{L}_i(\Psi_!)$ envoie la d-ème puissance tensorielle de l'abélianisation sur un foncteur de degré $d+i$. Le cas général s'en déduit, par récurrence sur le degré polynomial, à l'aide de la proposition 5.4 (d'une façon tout à fait analogue à celle dont la proposition 6.3 de [DV2] s'en déduit). $\square$

Nous espérons pouvoir utiliser cette extension de Kan dérivée « naïve » pour étudier le comportement de celle qui nous intéresse (le long de Φ) ; nous nous attendons notamment à pouvoir en tirer le résultat suivant.

Conjecture 6.18. *Pour tout $d \in \mathbb{N}$, le foncteur*

$$\mathbf{S}(\mathbf{ab}) \to \mathbf{Ab} \qquad \mathbb{Z}^n \mapsto H_d(IA_n;\mathbb{Z})$$

est polynomial de degré faible $3d$.

Se pose ensuite la question d'une description de l'image de ce foncteur dans la catégorie $\mathcal{P}ol_{3d}(\mathbf{S}(\mathbf{ab});\mathbb{Z})/\mathcal{P}ol_{3d-1}(\mathbf{S}(\mathbf{ab});\mathbb{Z})$.

Bibliographie

[Aus66] Maurice Auslander. Coherent functors. In *Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif., 1965)*, pages 189–231. Springer, New York, 1966.

[Bas64] H. Bass. K-theory and stable algebra. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (22) :5–60, 1964.

[BBD98] Marcel Bökstedt, Morten Brun, and Johan Dupont. Homology of $\mathrm{O}(n)$ and $\mathrm{O}^1(1,n)$ made discrete : an application of edgewise subdivision. *J. Pure Appl. Algebra*, 123(1-3) :131–152, 1998.

[BDFP01] Hans-Joachim Baues, Winfried Dreckmann, Vincent Franjou, and Teimuraz Pirashvili. Foncteurs polynomiaux et foncteurs de Mackey non linéaires. *Bull. Soc. Math. France*, 129(2) :237–257, 2001.

[Bet89] Stanislaw Betley. Vanishing theorems for homology of $\mathrm{Gl}_n R$. *J. Pure Appl. Algebra*, 58(3) :213–226, 1989.

[Bet92] Stanisław Betley. Homology of $\mathrm{Gl}(R)$ with coefficients in a functor of finite degree. *J. Algebra*, 150(1) :73–86, 1992.

[Bet99] Stanislaw Betley. Stable K-theory of finite fields. *K-Theory*, 17(2) :103–111, 1999.

[Bet01] Stanisław Betley. Stable derived functors, the Steenrod algebra and homological algebra in the category of functors. *Fund. Math.*, 168(3) :279–293, 2001.

[Bet02] Stanislaw Betley. Twisted homology of symmetric groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(12) :3439–3445 (electronic), 2002.

[BM11] Lawrence Breen and Roman Mikhailov. Derived functors of nonadditive functors and homotopy theory. *Algebr. Geom. Topol.*, 11(1) :327–415, 2011.

[Bor74] Armand Borel. Stable real cohomology of arithmetic groups. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 7 :235–272 (1975), 1974.

[Bre78] Lawrence Breen. Extensions du groupe additif. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (48) :39–125, 1978.

[Cal15] Frank Calegari. The stable homology of congruence subgroups. *Geom. Topol.*, 19(6) :3149–3191, 2015.

[CE] Thomas Church and Jordan Ellenberg. Homology of FI-modules. arXiv : 1506.01022.

[CEF15] Thomas Church, Jordan S. Ellenberg, and Benson Farb. FI-modules and stability for representations of symmetric groups. *Duke Math. J.*, 164(9) :1833–1910, 2015.

[CEFN14] Thomas Church, Jordan S. Ellenberg, Benson Farb, and Rohit Nagpal. FI-modules over Noetherian rings. *Geom. Topol.*, 18(5) :2951–2984, 2014.

[Cha84] Ruth Charney. On the problem of homology stability for congruence subgroups. *Comm. Algebra*, 12(17-18) :2081–2123, 1984.

[Cha87] Ruth Charney. A generalization of a theorem of Vogtmann. In *Proceedings of the Northwestern conference on cohomology of groups (Evanston, Ill., 1985)*, volume 44, pages 107–125, 1987.

[Cor06] Guillermo Cortiñas. The obstruction to excision in K-theory and in cyclic homology. *Invent. Math.*, 164(1) :143–173, 2006.

[Cur63] Edward Curtis. Lower central series of semi-simplicial complexes. *Topology*, 2 :159–171, 1963.

[Cur65] Edward B. Curtis. Some relations between homotopy and homology. *Ann. of Math. (2)*, 82 :386–413, 1965.

[CV86] Marc Culler and Karen Vogtmann. Moduli of graphs and automorphisms of free groups. *Invent. Math.*, 84(1) :91–119, 1986.

[Dol60] Albrecht Dold. Zur Homotopietheorie der Kettenkomplexe. *Math. Ann.*, 140 :278–298, 1960.

[DP61] Albrecht Dold and Dieter Puppe. Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 11 :201–312, 1961.

[Dwy80] W. G. Dwyer. Twisted homological stability for general linear groups. *Ann. of Math. (2)*, 111(2) :239–251, 1980.

[EML54] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation. *Ann. of Math. (2)*, 60 :49–139, 1954.

[FFPS03] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Teimuraz Pirashvili, and Lionel Schwartz. *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, volume 16 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[FFSS99] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Alexander Scorichenko, and Andrei Suslin. General linear and functor cohomology over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 150(2) :663–728, 1999.

[FLS94] Vincent Franjou, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis. *Invent. Math.*, 115(3) :513–538, 1994.

[FP78] Zbigniew Fiedorowicz and Stewart Priddy. *Homology of classical groups over finite fields and their associated infinite loop spaces*, volume 674 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1978.

[FP98] Vincent Franjou and Teimuraz Pirashvili. On the Mac Lane cohomology for the ring of integers. *Topology*, 37(1) :109–114, 1998.

[FPS$^+$95] Z. Fiedorowicz, T. Pirashvili, R. Schwänzl, R. Vogt, and F. Waldhausen. Mac Lane homology and topological Hochschild homology. *Math. Ann.*, 303(1) :149–164, 1995.

[Fra96] Vincent Franjou. Extensions entre puissances extérieures et entre puissances symétriques. *J. Algebra*, 179(2) :501–522, 1996.

[FS95] Vincent Franjou and Jeffrey H. Smith. A duality for polynomial functors. *J. Pure Appl. Algebra*, 104(1) :33–39, 1995.

[FS97] Eric M. Friedlander and Andrei Suslin. Cohomology of finite group schemes over a field. *Invent. Math.*, 127(2) :209–270, 1997.

[Gab62] Pierre Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90 :323–448, 1962.

[Gal11] Søren Galatius. Stable homology of automorphism groups of free groups. *Ann. of Math. (2)*, 173(2) :705–768, 2011.

[GH06] Thomas Geisser and Lars Hesselholt. Bi-relative algebraic K-theory and topological cyclic homology. *Invent. Math.*, 166(2) :359–395, 2006.

[Gra76] Daniel Grayson. Higher algebraic K-theory. II (after Daniel Quillen). In *Algebraic K-theory (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1976)*, pages 217–240. Lecture Notes in Math., Vol. 551. Springer, Berlin, 1976.

[HLS93] Hans-Werner Henn, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects. *Amer. J. Math.*, 115(5) :1053–1106, 1993.

[HPV15] Manfred Hartl, Teimuraz Pirashvili, and Christine Vespa. Polynomial functors from algebras over a set-operad and nonlinear Mackey functors. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (6) :1461–1554, 2015.

[HV98] Allen Hatcher and Karen Vogtmann. Cerf theory for graphs. *J. London Math. Soc. (2)*, 58(3) :633–655, 1998.

[HV04] Allen Hatcher and Karen Vogtmann. Homology stability for outer automorphism groups of free groups. *Algebr. Geom. Topol.*, 4 :1253–1272, 2004.

[HV11] Manfred Hartl and Christine Vespa. Quadratic functors on pointed categories. *Adv. Math.*, 226(5) :3927–4010, 2011.

[HVW06] Allan Hatcher, Karen Vogtmann, and Nathalie Wahl. Erratum to : "Homology stability for outer automorphism groups of free groups [Algebr. Geom. Topol. **4** (2004), 1253–1272 (electronic)] by Hatcher and Vogtmann. *Algebr. Geom. Topol.*, 6 :573–579 (electronic), 2006.

[HW05] Allen Hatcher and Nathalie Wahl. Stabilization for the automorphisms of free groups with boundaries. *Geom. Topol.*, 9 :1295–1336 (electronic), 2005.

[HW08] Allen Hatcher and Nathalie Wahl. Erratum to : "Stabilization for the automorphisms of free groups with boundaries" [Geom. Topol. **9** (2005), 1295–1336 ; 2174267]. *Geom. Topol.*, 12(2) :639–641, 2008.

[HW10] Allen Hatcher and Nathalie Wahl. Stabilization for mapping class groups of 3-manifolds. *Duke Math. J.*, 155(2) :205–269, 2010.

[JM98] Brenda Johnson and Randy McCarthy. Linearization, Dold-Puppe stabilization, and Mac Lane's Q-construction. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350, 1998.

[JM04] B. Johnson and R. McCarthy. Deriving calculus with cotriples. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(2) :757–803 (electronic), 2004.

[JP91] Mamuka Jibladze and Teimuraz Pirashvili. Cohomology of algebraic theories. *J. Algebra*, 137(2) :253–296, 1991.

[Kaw06] Nariya Kawazumi. Cohomological aspects of Magnus expansions. arXiv : math.GT/0505497, 2006.

[Kaw08] Nariya Kawazumi. Twisted Morita-Mumford classes on braid groups. In *Groups, homotopy and configuration spaces*, volume 13 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 293–306. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2008.

[Knu91] Max-Albert Knus. *Quadratic and Hermitian forms over rings*, volume 294 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991. With a foreword by I. Bertuccioni.

[Kuh94] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II. *K-Theory*, 8(4) :395–428, 1994.

[Kuh95] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. III. *K-Theory*, 9(3) :273–303, 1995.

[Lan92] Jean Lannes. Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (75) :135–244, 1992. With an appendix by Michel Zisman.

[Lod98] Jean-Louis Loday. *Cyclic homology*, volume 301 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998. Appendix E by María O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili.

[Lyd99] Manos Lydakis. Smash products and Γ-spaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 126(2) :311–328, 1999.

[Mac79] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979. Oxford Mathematical Monographs.

[Mit72] Barry Mitchell. Rings with several objects. *Advances in Math.*, 8 :1–161, 1972.

[ML57] Saunders Mac Lane. Homologie des anneaux et des modules. In *Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956*, pages 55–80. Georges Thone, Liège ; Masson & Cie, Paris, 1957.

[ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[MM96] Darryl McCullough and Andy Miller. Symmetric automorphisms of free products. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 122(582) :viii+97, 1996.

[Mor06] Shigeyuki Morita. Cohomological structure of the mapping class group and beyond. In *Problems on mapping class groups and related topics*, volume 74 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 329–354. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[MR01] J. C. McConnell and J. C. Robson. *Noncommutative Noetherian rings*, volume 30 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, revised edition, 2001. With the cooperation of L. W. Small.

[Nag] Rohit Nagpal. Homology of fI-modules and the cohomology of modular representations of symmetric groups. arXiv : 1505.04294.

[Nak60] Minoru Nakaoka. Decomposition theorem for homology groups of symmetric groups. *Ann. of Math. (2)*, 71 :16–42, 1960.

[Nak61] Minoru Nakaoka. Homology of the infinite symmetric group. *Ann. of Math. (2)*, 73 :229–257, 1961.

[Pet05] Alexandra Pettet. The Johnson homomorphism and the second cohomology of IA_n. *Algebr. Geom. Topol.*, 5 :725–740, 2005.

[Pir88a] T. I. Pirashvili. Higher additivizations. *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR*, 91 :44–54, 1988.

[Pir88b] T. I. Pirashvili. Polynomial functors. *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR*, 91 :55–66, 1988.

[Pir93] Teimuraz Pirashvili. Polynomial approximation of Ext and Tor groups in functor categories. *Comm. Algebra*, 21(5) :1705–1719, 1993.

[Pir96] Teimuraz Pirashvili. Kan extension and stable homology of Eilenberg-Mac Lane spaces. *Topology*, 35(4) :883–886, 1996.

[Pir97] Laurent Piriou. Sous-objets de $\overline{I} \otimes \Lambda^n$ dans la catégorie des foncteurs entre $\mathbf{F}_2$-espaces vectoriels. *J. Algebra*, 194(1) :53–78, 1997.

[Pir00a] Teimuraz Pirashvili. Dold-Kan type theorem for Γ-groups. *Math. Ann.*, 318(2) :277–298, 2000.

[Pir00b] Teimuraz Pirashvili. Hodge decomposition for higher order Hochschild homology. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 33(2) :151–179, 2000.

[Pir03] Teimuraz Pirashvili. André-Quillen homology via functor homology. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(6) :1687–1694 (electronic), 2003.

[Pop73] N. Popescu. *Abelian categories with applications to rings and modules.* Academic Press, London-New York, 1973. London Mathematical Society Monographs, No. 3.

[Pow98a] Geoffrey M. L. Powell. The Artinian conjecture for $I^{\otimes 2}$. *J. Pure Appl. Algebra*, 128(3) :291–310, 1998. With an appendix by Lionel Schwartz.

[Pow98b] Geoffrey M. L. Powell. Polynomial filtrations and Lannes' T-functor. *K-Theory*, 13(3) :279–304, 1998.

[Pow98c] Geoffrey M. L. Powell. The structure of indecomposable injectives in generic representation theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(10) :4167–4193, 1998.

[Pow00] Geoffrey M. L. Powell. On Artinian objects in the category of functors between $\mathbf{F}_2$-vector spaces. In *Infinite length modules (Bielefeld, 1998)*, Trends Math., pages 213–228. Birkhäuser, Basel, 2000.

[PR02] T. Pirashvili and B. Richter. Hochschild and cyclic homology via functor homology. *K-Theory*, 25(1) :39–49, 2002.

[PS] Andrew Putman and Steven Sam. Representation stability and finite linear groups. arXiv : 1408.3694.

[Put15] Andrew Putman. Stability in the homology of congruence subgroups. *Invent. Math.*, 202(3) :987–1027, 2015.

[Qui72] Daniel Quillen. On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field. *Ann. of Math. (2)*, 96 :552–586, 1972.

[Qui73] Daniel Quillen. Higher algebraic K-theory. I. In *Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, pages 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341. Springer, Berlin, 1973.

[Ric86] Günther Richter. Noetherian semigroup rings with several objects. In *Group and semigroup rings (Johannesburg, 1985)*, volume 126 of *North-Holland Math. Stud.*, pages 231–246. North-Holland, Amsterdam, 1986.

[Ric01] Birgit Richter. Taylor towers for Γ-modules. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(4) :995–1023, 2001.

[RW10] Oscar Randal-Williams. The stable cohomology of automorphisms of free groups with coefficients in the homology representation. arXiv : math.AT/1012.1433, 2010.

[RW16] Oscar Randal-Williams. Cohomology of automorphisms groups of free groups with twisted coefficients. arXiv : 1604.01701, 2016.

[RWW] Oscar Randal-Williams and Nathalie Wahl. Homological stability for automorphism groups. Prépublication arXiv :1409.3541.

[Sat06] Takao Satoh. Twisted first homology groups of the automorphism group of a free group. *J. Pure Appl. Algebra*, 204(2) :334–348, 2006.

[Sat07] Takao Satoh. Twisted second homology groups of the automorphism group of a free group. *J. Pure Appl. Algebra*, 211(2) :547–565, 2007.

[Sat13] Takao Satoh. First cohomologies and the Johnson homomorphisms of the automorphism group of a free group. *J. Pure Appl. Algebra*, 217(1) :137–152, 2013.

[Sch99] Stefan Schwede. Stable homotopical algebra and Γ-spaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 126(2) :329–356, 1999.

[Sco00] Alexander Scorichenko. *Stable K-theory and functor homology over a ring.* PhD thesis, Evanston, 2000.

[Seg74] Graeme Segal. Categories and cohomology theories. *Topology*, 13 :293–312, 1974.

[SS] Steven Sam and Andrew Snowden. Gröbner methods for representations of combinatorial categories. arXiv : 1408.3694.

[Sus83] A. Suslin. On the K-theory of algebraically closed fields. *Invent. Math.*, 73(2) :241–245, 1983.

[Sus95] A. A. Suslin. Excision in integer algebraic K-theory. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 208(Teor. Chisel, Algebra i Algebr. Geom.) :290–317, 1995. Dedicated to Academician Igor′ Rostislavovich Shafarevich on the occasion of his seventieth birthday (Russian).

[SW92] Andrei A. Suslin and Mariusz Wodzicki. Excision in algebraic K-theory. *Ann. of Math. (2)*, 136(1) :51–122, 1992.

[Tou10] Antoine Touzé. Cohomology of classical algebraic groups from the functorial viewpoint. *Adv. Math.*, 225(1) :33–68, 2010.

[Tou12] Antoine Touzé. Troesch complexes and extensions of strict polynomial functors. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 45(1) :53–99, 2012.

[Tou13] Antoine Touzé. Ringel duality and derivatives of non-additive functors. *J. Pure Appl. Algebra*, 217(9) :1642–1673, 2013.

[Tro02] Alain Troesch. Quelques calculs de cohomologie de compositions de puissances symétriques. *Comm. Algebra*, 30(7) :3351–3382, 2002.

[vdK80] Wilberd van der Kallen. Homology stability for linear groups. *Invent. Math.*, 60(3) :269–295, 1980.

[Ves] Christine Vespa. Extensions between functors from groups. arXiv :1511.03098.

[Ves08] Christine Vespa. Generic representations of orthogonal groups : projective functors in the category $\mathcal{F}_{\mathrm{quad}}$. *Fund. Math.*, 200(3) :243–278, 2008.

[Vog82] K. Vogtmann. A Stiefel complex for the orthogonal group of a field. *Comment. Math. Helv.*, 57(1) :11–21, 1982.

Table des matières

Résumé du mémoire d'habilitation à diriger des recherches en mathématiques

Méthodes fonctorielles pour l'étude de l'homologie stable des groupes

Aurélien Djament

Les catégories de foncteurs, et plus particulièrement les *foncteurs polynomiaux*, depuis une petite catégorie vers une catégorie de modules forment le fil conducteur de ce mémoire. On examine quelques questions intrinsèques sur ces catégories abéliennes, comme leurs propriétés de finitude ou celles de leurs groupes d'extensions, mais surtout leur utilisation dans l'étude de l'homologie stable à coefficients tordus (supposant connue l'homologie stable à coefficients constants) de familles remarquables de groupes, tels que les groupes linéaires, unitaires ou les groupes d'automorphismes des groupes libres. La stratégie générale consiste à identifier cette homologie stable d'abord à l'homologie d'une catégorie non directement accessible au calcul, puis, sous une hypothèse de polynomialité sur les coefficients, à celle d'une catégorie plus usuelle qui se prête à des calculs explicites. La première étape s'insère dans un cadre formel introduit avec C. Vespa pour les groupes d'automorphismes d'objets d'une catégorie monoïdale symétrique vérifiant des hypothèses appropriées. La deuxième étape utilise des arguments d'annulation en homologie des foncteurs à coefficients polynomiaux dus à, ou inspirés par, A. Scorichenko.

Le dernier chapitre de ce travail examine d'autres familles de groupes n'entrant pas dans le cadre formel qu'on vient d'évoquer, comme les sous-groupes de congruences des groupes linéaires ou unitaires, ou les groupes d'automorphismes des groupes libres induisant l'identité sur leur abélianisation. On propose une généralisation « relative » dudit cadre formel pour aborder ces questions d'homologie stable (y compris à coefficients constants), reliées, dans le cas linéaire, au problème du défaut d'excision en K-théorie algébrique. En général, l'homologie de ces groupes se comporte de façon beaucoup plus délicate que celle des familles de groupes mentionnées au début ; il convient de l'étudier stablement *comme foncteur*. On donne plusieurs conjectures, notamment en matière de polynomialité des foncteurs ainsi obtenus. La notion de polynomialité ici en jeu, plus générale que celle issue des travaux classiques d'Eilenberg et Mac Lane (entre catégories de modules), a été introduite récemment avec Vespa et fait l'objet de rappels dans la première partie du mémoire.