Décomposition de Hodge de la cohomologie de Hochschild d'une algèbre commutative

Notes d'exposé du groupe de travail
Topologie Algébrique

(Nantes)

Salim RIVIERE

Février 2012

Ici A désigne une $\mathbb{K}$ algèbre commutative et unitaire. $\mathbb{K}$ est un anneau commutatif contenant $\mathbb{Q}$.

1 Préliminaires sur les algèbres de Hopf [Lod98]

Définition 1.0.1. *Une algèbre de Hopf est un $\mathbb{K}$-module H muni d'un produit mu : $H \otimes H \to H$, d'une unité $\eta : \mathbb{K} \to H$, d'un coproduit $\Delta : H \to H \otimes H$ et d'une counité $\varepsilon : H \to \mathbb{K}$ tels que :*

1. *(H, μ, η) est une $\mathbb{K}$-algèbre unitaire,*
2. *(H, Δ, ε) est une $\mathbb{K}$-cogèbre counitaire,*
3. *Δ et ε sont des morphismes d'algèbres unitaires, en particulier le diagramme*

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[rr, "\mu"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"] & & H \arrow[d, "\Delta"] \\ H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[r, "Id_H\otimes\tau\otimes Id_H"] & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[r, "\mu\otimes\mu"] & H \otimes H \end{tikzcd}$$

commute, avec $\tau : H \otimes H \to H \otimes H$ définie par $\tau(x \otimes y) := y \otimes x$ pour tous x et y dans H.

Exemple : $\mathbb{K}[G]$ l'algèbre d'un groupe G (car $\mathbb{K}[G \times G] \cong \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G]$)

Définition 1.0.2. *Soient (A, μ_A) une $\mathbb{K}$-algèbre et (C, Δ_C) une $\mathbb{K}$-cogèbre. Alors le $\mathbb{K}$-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$ est muni du produit de convolution $\star$ défini par*

$$f \star g := \mu_A(f \otimes g)\Delta_C$$

pour tous f et g dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$. Ce produit de convolution fait de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$ une algèbre associative. Si de plus A est unitaire d'unité η_1 et C est counitaire de counité ε, alors $\eta\varepsilon$ est une unité pour le produit de convolution.

Proposition 1.0.3. *Soit H une algèbre de Hopf et f, g, h trois éléments de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(H)$. Alors, si h est un morphisme de cogèbres*

$$(f \star g) \circ h = (f \circ h) \star (g \circ h) \tag{1}$$

De même, si h est une morphisme d'algèbres, alors

$$h \circ (f \star g) = (h \circ f) \star (h \circ g) \tag{2}$$

Si H est commutative (resp. cocommutative), le produit de convolution de deux morphismes d'algèbres (resp. de cogèbres) de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(H)$ est encore un morphisme d'algèbres (resp.de cogèbres).

Corollaire 1.0.4. *Soit H une algèbre de Hopf. Alors*

1. *$Id^{\star k} \circ Id^{\star l} = Id^{\star kl}$*

2. et si de plus H est commutative, $Id^{\star k}$ est un morphisme d'algèbres,

pour tous k et l entiers.

Ces constructions s'étendent sans problème au cas des algèbres de Hopf (commutatives) graduées.

Supposons que H est algèbre de Hopf commutative graduée ($H = \{H_i\}_{i \geqslant 0}$) telle que $H_0 = \mathbb{K}$. Si f est un endomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire de H de degré 0 qui s'annule sur H_0 alors la somme

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} f^{\star k}$$

est localement finie sur H et défini donc un $\mathbb{K}$-endomorphisme de H de degré 0.

Définition 1.0.5. *Pour tout entier i, le i-ème indempotent eulérien est l'application $\mathbb{K}$-linéaire graduée de degré 0 $e_i : H \to H$ définie par*

$$e_1 := \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (Id - \eta\varepsilon)^{\star k}$$

et

$$e_i := \frac{1}{i!} e_1^{\star i}$$

Par convention, $e_0 := \eta\varepsilon$.

Proposition 1.0.6.

a) Pour tout entier k,

$$Id^{\star k} = \sum_{\imath \geqslant 0} k^i e_i$$

b) Pour tous i et j entiers,

$$ei \circ e_j = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j \\ e_i & si\ i = j \end{cases}$$

Démonstration. a) L'identité entre séries formelles $\exp(k \log(X)) = X^k$ appliquée dans l'algèbre $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H, H), \star, \eta\varepsilon)$ à $X = Id$ permet de conclure en remarquant que $\log_\star(Id) = \log_\star(\eta\varepsilon + (Id - \eta\varepsilon)) = e_1$.

b) On raisonne sur H_n. Par a)es e_i ($0 \leqslant i \leqslant n$) sont solutions des $n+1$ equations

$$Id^{\star k} = \sum_{i=0}^{n} k^i e_i \quad , \quad 0 \leqslant k \leqslant n$$

La matrice de Vandermonde associée à ce système est inversible dans $\mathbb{Q}$ donc les e_i s'écrivent de manière unique comme $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire des $Id^{\star k}(0 \leqslant k \leqslant n)$ et il existe donc une famille de rationnels $(a_{ijm})_{i,j,m}$ telle que

$$e_i e_j = \sum_{m=0}^{n} a_{ijm} e_m$$

sur H_n. Ainsi pour tous k et k' entiers, en appliquant a) de nouveau, il vient

$$Id^{\star kk'} = Id^{\star k} Id^{\star k'} = \sum_{i,j=0}^{n} k^i k'^j e_i e_j = \sum_{m=0}^{n} (\sum_{i,j=0}^{n} a_{ijm} k^i k'^j) e_m$$

d'où, par unicité,

$$(kk')^m = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ijm} k^i k'^j$$

pour tous k, k' entiers et $0 \leqslant m \leqslant n$. Ceci implique que $a_{ijm} = 0$ si $i \neq j$ ou $i \neq m$, et $a_{mmm} = 1$.

□

2 Application au complexe de Hochschild [Lod98]

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre commutative unitaire. Le complexe de Hochschild de A, noté $C_*(A)$, est défini par

$$C_n(A) := A \otimes A^{\otimes n}$$

pour tout entier naturel n. La différentielle $d_n : C_n(A) \to C_{n-1}(A)$ s'écrit $d_n := \sum_{i=0}^{n} d_n^i$ avec

$$d_n^i(a[a_1, \cdots, a_n]) := \begin{cases} aa_1[a_2, \cdots, a_n] & \text{si } i = 0 \\ a[a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_n] & \text{si } 0 < i < n \\ aa_n[a_1, \cdots, a_{n-1}] & \text{si } i = n \end{cases}$$

pour tout i entre 0 et n. Considérons l'algèbre tensorielle graduée commutative $T_*(A)$ définie par $T_n(A) := A^{\otimes n}$ pour tout entier n. Elle est munie du produit shuffle signé gradué μ défini par

$$\mu([a_1, \cdots, a_n] \otimes [a_{n+1}, \cdots, a_{n+m}]) := \sum_{\sigma \in \Sigma_{n,m}} \operatorname{sgn}(\sigma)[a_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, a_{\sigma^{-1}(n+m)}]$$

et du coproduit de déconcaténation $\Delta : T_*(A) \to T_*(A) \otimes T_*(A)$ défini par

$$\Delta([a_1, \cdots, a_n]) := \sum_{i=0}^{n} [a_1, \cdots, a_i] \otimes [a_{i+1}, \cdots, a_n]$$

pour tous a_1, ..., a_{n+m} dans A, qui en font une algèbre de Hopf graduée commutative. Les considérations de la section précédente s'appliquent pour définir une famille d'idempotents eulériens $(e_i)_{i \geqslant 0}$ sur $T_*(A)$. Comme $C_*(A) = A \otimes T_*(A)$, il est possible de prolonger ces idempotents au complexe de Hochschild en tensorisant à gauche chaque e_i par Id_A, définissant ainsi une nouvelle famille d'idempotents, toujours notés $e_i : C_*(A) \to C_*(A)$. Les proprietés $a)$ et $b)$ de la proposition 1.0.6 sont encore vérifiée par ces nouveaux e_i. Le produit $\mu(x \otimes y)$ de deux éléments homogènes x et y de $T_*(A)$ sera noté xy.

Proposition 2.0.7. *Pour tout entier i, e_i est un morphisme de complexes, i.e*

$$e_i d = d e_i$$

Démonstration. Comme les e_i sont combinaisons linéaires des $Id \otimes Id^{\star k}$ il suffit de montrer que $Id_A \otimes Id^{\star k}$ et d commutent.

Lemme 2.0.8. *La différentielle d est une dérivation pour le produit shuffle i.e*

$$d(a \otimes xy) = d(a \otimes x) \cdot y + (-1)^{|x|} x \cdot d(a \otimes y)$$

où la stucture de $T_*(A)$-bimodule sur $A \otimes T_*(A)$ est donnée par $x(a \otimes y)z := a \otimes xyz$ pour tous x, y , z éléments homogènes de $T_*(A)$ et pour tout a dans A.

Preuve du lemme : Soient $x := [a_1, \cdots, a_m]$ et $y := [a_{m+1}, \cdots, a_n]$. Alors $d_i(xy)$ est une somme de termes de type $a \otimes [a_{j_1}, \cdots, a_{j_i} a_{j_{i+1}}, \cdots, a_{j_n}]$. Si j_i et j_{i+1} sont entre 1 et m, ce terme apparait dans $d(a \otimes x) \cdot y$. Si j_i et j_{i+1} sont entre $m+1$ et n, ce terme apparait dans $x \cdot d(a \otimes y)$. Si $1 \leqslant j_i \leqslant m$ et $m+1 \leqslant j_{i+1} \leqslant n$, il existe exactement deux suffles dont il peut provenir qui différent d'une transposition (celle qui permute j_i et j_{i+1}) et la signature qui est en facteur de l'un est opposée à celle devant l'autre ce qui fait qu'ils s'annulent mutuellement et n'apparaissent en fait pas. Il reste à verifier que les signes concordent ce qui est laissé au lecteur.

$\square$

Remarquons que $Id_A \otimes Id^{\star k} = Id_A \otimes (\mu^k \circ \Delta^k)$, avec $\mu^n := \mu^{n-1} \circ (Id^{\otimes(n-2)} \otimes \mu)$ et $\Delta^n = (Id^{\otimes(n-2)} \otimes \Delta) \circ \Delta^{n-1}$ définis par récurrence sur n. Soit $a \otimes x$ un tenseur élémentaire homogène dans $C_n(A)$, et notons $\Delta^k(x) = x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_k$

$$\begin{aligned} d \circ (Id_A \otimes Id^{\star k})(a \otimes x) &= d(a \otimes x_1 x_2 \cdots x_k) \\ &= d(a \otimes x_1) x_2 \cdots x_k + (-1)^{|x_1|} x_1 d(a \otimes x_2) x_3 \cdots x_k \\ &\quad + \cdots + (-1)^{|x_1| + \cdots + |x_{k-1}|} x_1 \cdots x_{k-1} d(a \otimes x_k) \quad (*) \end{aligned}$$

Or, pour $x = [a_1, \cdots a_n]$, et $0 < i < n$:

$$Id_A \otimes \Delta^k((-1)^i d_i a \otimes x) = (-1)^i a \otimes \sum_{0 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_{k-1} \leqslant n} [a_1, \cdots, a_{i_1}] \otimes [a_{i_1+1}, \cdots a_{i_2}] \otimes \cdots$$
$$\cdots \otimes [a_{i_j+1}, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{i_{j+1}}] \otimes [a_{i_{k-1}+1}, \cdots, a_n]$$

où chaque i_j est différent de $i+1$. Considérons un des termes $a \otimes [a_1, \cdots, a_{i_1}] \otimes [a_{i_1+1}, \cdots, a_{i_2}] \otimes \cdots \otimes [a_{i_{k-1}+1}, \cdots, a_n]$ de la somme et supposons que $i+1$ est entre i_j+1 et i_{j+1}. En lui appliquant μ^k, celui ci devient

$$(-1)^{i_j}(-1)^{i-i_j}[a_1, \cdots, a_{i_1}] \cdots [a_{i_{j-1}}, \cdots, a_{i_j}] d_{i-i_j}(a \otimes [a_{i_j+1}, \cdots, a_{i_{j+1}}])[a_{i_{j+1}+1}, \cdots, a_{i_{j+2}}] \cdots$$
$$\cdots [a_{i_{k-1}}, \cdots, a_n]$$

c'est à dire $(-1)^{|x_1|+\cdots+|x_j|} x_1 \cdots x_j (-1)^p d_p(a \otimes x_{j+1}) x_{j+2} \cdots x_k$ avec $p = i - i_j$. Tous les termes apparaissant dans $(*)$ sont obtenus de cette façon car les termes en d_0 et d_{i_j} se simplifient mutuellement pour les différentes valeurs de i_j possibles. □

Ainsi, le complexe de Hochschild $C_*(A)$ se scinde en somme directe de sous-complexes $C_*^i(A) := \mathrm{Im}\, e_i$:

$$C_n(A) = \bigoplus_{i=0}^{n} C_n^i(A) \tag{3}$$

pour tout entier n.

3 Application : dégénérescence de la suite spectrale d'hypercohomologie [Swa96]

Rappelons que si X est une varieté algébrique de faisceau structural $\mathcal{O}_X$, et F est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules, alors l'homologie de Hochschild de X à coefficients dans F, notée $HH_*(X; F)$ est le groupe abélien gradué défini par

$$HH^n(X, F) := \mathbb{E}\mathrm{xt}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{C}_*, F) \quad (**)$$

pour tout entier n. Ici, F est vu comme complexe de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules concentré en degré 0 et $\mathcal{C}_*$ est le faisceautisé du complexe de pré-faisceaux $U \to C_*(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$. La suite spectrale d'hypercohomologie associée est la suivante :

$$E_2^{pq} = Ext^p_{\mathcal{O}_X}(H_q(\mathcal{C}_*); F) \Rightarrow HH^{p+q}(X; F)$$

Grâce aux sections précédentes, le complexe $\mathcal{C}_*$ se scinde en somme directe de sous-complexes $\mathcal{C}_*^i$. Si $F \to I^*$ est une résolution injective, $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_*, I^*)$ se décompose donc en somme des $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_*^i, I^*)$ et la suite spectrale $(**)$ se scinde en somme directe de suites spectrales dont la deuxième page est $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_X}(H_q(\mathcal{C}_*^i); F)$. Si X est lisse, cette deuxième page est concentrée sur une ligne et la suite spectrale s'effondre donc au terme suivant. En effet, en remarquant que le n-ème idempotent eulérien correspond, sur $C_n(A)$, à l'application d'antisymétrisation, le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg permet d'écrire, quand A est lisse, que $HH_n^i(A) = 0$ si $i \neq n$.

Références

[Lod98] J-L Loday. *Cyclic homology.* Springer-Verlag, 1998.

[Swa96] Richard G. Swan. Hochschild cohomology of quasiprojective schemes. *J. Pure Appl. Algebra*, 110(1) :57–80, 1996.