Introduction au problème de l'excision en K-théorie algébrique, d'après Suslin-Wodzicki

Notes d'exposés au groupe de travail de topologie algébrique

Nantes/Angers

Aurélien DJAMENT

Janvier/février 2013

En topologie, on dispose des foncteurs de (co)homologie singulière [1] (éventuellement réduite) : ils sont définis sur les espaces (éventuellement pointés) ou les paires d'espaces et à valeurs dans les groupes abéliens. La suite exacte longue de (co)homologie procure un lien entre les foncteurs des différents degrés. La (co)homologie des espaces et des paires d'espaces est reliée non seulement par la formule triviale $\tilde{H}(X) \simeq H(X,*)$ (pour X pointé), mais aussi par l'isomorphisme plus profond d'*excision* [2] : dans les bons cas — si l'inclusion de Y dans X est une cofibration — on dispose d'un isomorphisme naturel $H(X,Y) \simeq \tilde{H}(X/Y)$ (induit par la projection $(X,Y) \twoheadrightarrow (X/Y,*)$). Cela montre en particulier que, dans les bons cas, $H(X,Y)$ ne dépend que de X/Y, ce qui n'a rien d'évident (et est faux sans aucune hypothèse). L'excision en K-théorie algébrique est le problème semblable pour le foncteur gradué de K-théorie (algébrique), allant des anneaux ou paires d'anneaux (on doit alors faire attention à ce qu'on appelle anneau : il faut autoriser les anneaux dépourvus d'unité ; une paire est la donnée d'un anneau et d'un idéal bilatère de celui-ci) vers les groupes abéliens, et qui possède également une suite exacte longue des paires. La question principale se pose en les termes suivants : étant donnés un anneau A et un idéal bilatère I, quand le morphisme canonique $K_*(I) \to K_*(A,I)$ est-il un isomorphisme ?

Il s'agit d'un problème beaucoup plus difficile que pour les espaces topologiques (ou les ensembles simpliciaux), et la réponse s'avère assez différente. En degré inférieur ou égal à 0, *l'excision vaut sans aucune hypothèse*. En revanche, à partir du degré 1, elle n'a lieu qu'exceptionnellement (même pour des anneaux très raisonnables), mais n'est pas si facile à caractériser (et il est encore plus difficile de mesurer le défaut d'excision en K-théorie algébrique — cela a été fait dans les dix dernières années en utilisant des méthodes homotopiques avancées :

1. On pourrait bien sûr remplacer la (co)homologie singulière par toute autre théorie (co)homologique, comme par exemple la K-théorie topologique (qui se comporte notoirement de façon plus simple que la K-théorie algébrique).

2. Le terme d'excision désigne souvent des variantes (qui expliquent la terminologie) — notamment, pour l'inclusion de deux paires, par exemple : on considère $U \subset Y \subset X$ avec $\bar{U} \subset Int\, Y$, alors l'inclusion induit un isomorphisme $H(X \setminus U, Y \setminus U) \simeq H(X,Y)$. Mais ce genre de considération est moins utile pour introduire l'analogie avec la K-théorie algébrique.

voir [Cor06] et [GH06]). Dans un article publié en 1992, Suslin et Wodzicki donnent une condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau (non unitaire) vérifie la propriété d'excision en K-théorie algébrique rationnelle (Suslin ayant généralisé peu après, par une méthode plus directe, le résultat à la K-théorie algébrique entière ou à coefficients raisonnables). L'idée est de se ramener au problème d'excision en homologie de Hochschild ou cyclique, problème très nettement plus facile, car ces théories homologiques s'expriment raisonnablement à l'aide de foncteurs dérivés [3].

Comme en (co)homologie singulière, le problème de l'excision est essentiellement équivalent à celui de suites exactes de Mayer-Vietoris, aspect que nous taisons dans cet exposé. Pour une présentation détaillée dans le cas de la K-théorie algébrique de bas degré, on peut se reporter au livre [Mil71] de Milnor qui privilégie au contraire ce point de vue.

Table des matières

Dans cet exposé, les anneaux ne seront pas nécessairement unitaires (ni commutatifs, en revanche ils sont toujours, bien sûr, associatifs). On rappelle que tout idéal (à gauche ou à droite) d'un anneau unitaire (et aussi d'un anneau non unitaire) est un anneau pour les lois induites ; tout anneau A peut être vu

3. Certes, l'homologie du groupe linéaire sur un anneau sans unité A (en termes de laquelle on peut reformuler l'excision en K-théorie algébrique pour A), comme toute homologie de groupe, est également un foncteur Tor, mais d'une part l'homologie des groupes discrets est notoirement difficile d'accès, même pour des groupes peu compliqués, d'autre part, le foncteur associant $GL(A)$ à A est tout sauf facile à comprendre — c'est d'ailleurs là que réside l'un des intérêts de la K-théorie algébrique : aborder en utilisant des outils puissants de théorie de l'homotopie des questions d'algèbre linéaire difficiles.

comme idéal bilatère de l'anneau unitaire $\mathbb{Z} \ltimes A$ dont le groupe abélien sous-jacent est $\mathbb{Z} \oplus A$ et la multiplication donnée par

$$(n, a).(m, b) = (nm, ma + nb + ab).$$

(Si A est déjà unitaire, $\mathbb{Z} \ltimes A$ est isomorphe à l'anneau produit $\mathbb{Z} \times A$ via l'application $(n, a) \mapsto (n, n + a)$.)

On obtient ainsi un foncteur $A \mapsto \mathbb{Z} \ltimes A$ de la catégorie des anneaux vers celle des anneaux unitaires, avec morphismes unifères, qui est adjoint à gauche au foncteur d'oubli.

Les groupes linéaires sur un anneau (non nécessairement unitaire) sont définis par $GL_n(A) := Ker\,(GL_n(\mathbb{Z} \ltimes A) \to GL_n(\mathbb{Z}))$, morphisme induit par le morphisme unifère d'anneaux (unitaires) $\mathbb{Z} \ltimes A \to \mathbb{Z} \quad (n, a) \to n$ (augmentation). Cela définit des foncteurs GL_n des anneaux vers les groupes qui se manipulent essentiellement comme leur restriction aux anneaux unitaires et morphismes unifères. Notamment, on peut les stabiliser en prenant la colimite sur n de la façon usuelle. Ces groupes linéaires sont parfois appelés *groupes de congruences*, surtout lorsque A est un idéal de $\mathbb{Z}$. Ces groupes ont été très étudiés ; une propriété élémentaire (exercice sur la formule du binôme) qui contraste avec la situation des groupes linéaires sur les anneaux unitaires est par exemple que, pour p nombre premier impair, les groupes $GL_n(p\mathbb{Z})$ n'ont pas d'élément non trivial d'ordre fini.

Si I est un idéal d'un anneau unitaire A, $GL_n(I)$ est exactement le groupe des matrices de la forme $1_n + M$, où $M \in \mathfrak{gl}_n(I)$, qui appartiennent à $GL_n(A)$. En effet, l'inverse d'une telle matrice est nécessairement de la même forme, à cause de la relation

$$(1 + M)^{-1} = 1 - M.(1 + M)^{-1} = 1 - (1 + M)^{-1}.M$$

dans $GL_n(A)$.

Une observation triviale mais importante est que, pour tout idéal bilatère I d'un anneau A, le noyau du morphisme de groupes $GL_n(A) \to GL_n(A/I)$ induit par le morphisme d'anneaux $A \to A/I$ est égal à $GL_n(I)$; il ne dépend en particulier que de I !

Une autre observation immédiate mais utile est que si $A^2 = 0$ (produits triviaux dans A), alors $GL_n(A)$ est isomorphe au groupe additif $\mathfrak{gl}_n(A)$ (par l'application $M \mapsto M - 1_n$). Cela illustre qu'on doit s'attendre en général à des comportements des groupes de congruences fort différents de ceux des groupes linéaires sur un anneau unitaire. Noter aussi que, pour un anneau non unitaire A, il n'y a pas de matrice de permutation (hors l'identité) dans $GL_n(A)$.

1 La K-théorie algébrique absolue et relative et le problème de l'excision en degré au plus 2

(Une bonne référence pour cela est par exemple le livre [Mil71] de Milnor.)

1.1 K_0

Si A est un anneau unitaire, $K_0(A)$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie des A-modules à gauche projectifs de type fini. Autrement dit, c'est la complétion en groupes du monoïde commutatif des classes d'équivalence de A-modules projectifs de type fini, l'addition étant induite par la somme directe. Si M et N sont deux A-modules à gauche projectifs de type fini, leurs classes $[M]$ et $[N]$ dans $K_0(A)$ coïncident si et seulement si M et N sont *stablement isomorphes*, c'est-à-dire qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $M \oplus A^r$ et $N \oplus A^r$ soient isomorphes [4]. Cela définit un foncteur des anneaux unitaires vers les groupes abéliens, en utilisant, pour tout morphisme unifère d'anneaux (unitaires) $f : A \to B$, le changement de base $B \underset{A}{\otimes} -$ associé à f, qui préserve les modules projectifs de type fini et commute aux sommes directes. On définit, pour un anneau non unitaire A, $K_0(A)$ comme le noyau du morphisme $K_0(\mathbb{Z} \ltimes A) \to K_0(\mathbb{Z})$ induit par l'augmentation (cette définition est cohérente avec la précédente car K_0 commute aux produits finis).

Voici une variante de cette définition (toujours pour un anneau unitaire A). Si e est un idempotent d'un anneau $\mathfrak{gl}_n(A)$, le sous-module (à gauche) $A^n.e$ de A^n est projectif de type fini. De plus, si e et e' sont conjugués sous l'action de $GL_n(A)$ sur les idempotents de $\mathfrak{gl}_n(A)$, $A^n.e$ et $A^n.e'$ sont isomorphes, de sorte qu'on définit une fonction $e \mapsto [A^n.e]$ de l'ensemble des idempotents de $\mathfrak{gl}_n(A)$ modulo l'action de $GL_n(A)$ vers $K_0(A)$. Cette fonction est compatible à la stabilisation en n, où l'on envoie un idempotent e de $\mathfrak{gl}_n(A)$ sur l'idempotent

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathfrak{gl}_{n+1}(A)$ (ce qui est équivariant relativement à l'applicatin de stabilisation usuelle $GL_n(A) \to GL_{n+1}(A)$). On obtient donc une fonction de l'ensemble des idempotents de $\mathfrak{gl}_\infty(A)$ modulo $GL_\infty(A)$ vers $K_0(A)$, qui est un morphisme de monoïdes commutatifs, où la loi sur les idempotents de $\mathfrak{gl}_\infty(A)$ est induite par la somme directe (elle commutative car $e \oplus e'$ et $e' \oplus e$ sont conjugués — par une matrice de permutation, ce qui illustre la nécessité que A soit unitaire : sinon, il n'y a pas de matrices de permutation dans les $GL_n(A)$). On vérifie aisément que cette application fait de $K_0(A)$ la complétion en groupes de ce monoïde commutatif d'idempotents modulo conjugaison.

Le foncteur K_0 des anneaux vers les groupes abéliens est surtout intéressant sur les anneaux unitaires, où il peut déjà s'avérer vite difficile à calculer (même s'il l'est beaucoup moins que les K_i pour $i > 0$).

Exemple 1.1. Si A est un corps (non nécessairement commutatif) ou un anneau (unitaire) principal, $K_0(A) \simeq \mathbb{Z}$. C'est également vrai pour un anneau unitaire local (non nul), comme conséquence classique du lemme de Nakayama.

Si A est un anneau unitaire *commutatif* non nul, le morphisme $\mathbb{Z} \simeq K_0(\mathbb{Z}) \to K_0(A)$ induit par l'unité est injectif ($A^n \simeq A^m$ comme A-modules à gauche entraîne $n = m$, par exemple par un argument de déterminant). C'est faux pour un anneau non commutatif : par exemple, pour tout anneau A, l'anneau des endomorphismes d'un A-module à gauche libre de rang infini a un K_0 nul. (Pour des phénomènes encore plus exotiques, voir la première partie de [KR00]).

4. Le problème de trouver des conditions suffisantes pour qu'une telle condition implique que M et N sont isomorphes est difficile. C'est un cas particulier des problèmes de stabilité en K-théorie algébrique. Sans hypothèse sur A, des pathologies très contre-intuitives peuvent advenir autour de ce genre de question — cf. par exemple la première partie de [KR00].

Proposition 1.2. *Si I est un idéal bilatère d'un anneau A, la suite*

$$K_0(I) \to K_0(A) \to K_0(A/I)$$

de groupes abéliens induite par l'inclusion et la projection est exacte.

La démonstration est laissée en exercice.

Noter que le morphisme $K_0(A) \to K_0(A/I)$ n'est généralement pas surjectif — considérer par exemple $A = \mathbb{Z}$, dont le K_0 est $\mathbb{Z}$ et $I = (6)$: $A/I \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3$, dont le K_0 est $\mathbb{Z}^2$. Il n'est pas difficile de définir (par des moyens purement algébriques) des foncteurs K_i, pour $i < 0$, des anneaux vers les groupes abéliens de manière à ce que la suite exacte de la proposition se prolonge en une suite exacte naturelle

$$\cdots \to K_i(I) \to K_i(A) \to K_i(A/I) \to K_{i-1}(I) \to \dots$$

ce qu'on ne peut pas faire pour les K_i, $i > 0$. Il suffit pour cela de procéder par décalage en plongeant l'anneau A (ou un anneau ayant même K-théorie) comme idéal bilatère dans un anneau *flasque*, par exemple l'anneau des endomorphismes d'un A-module à gauche libre de rang infini, ou en utilisant $A[t, t^{-1}]$.

1.2 K_1 pour un anneau unitaire et morphisme de liaison de K_1 vers K_0

Si A est un anneau *unitaire*, on définit $K_1(A)$ comme l'abélianisation du groupe linéaire $GL_\infty(A)$. Un résultat élémentaire mais fondamental (dû à Whitehead — au début des années 1950 ?) est que le sous-groupe dérivé de $GL_\infty(A)$ est engendré par les *matrices élémentaires*. Rappelons de quoi il s'agit, afin de fixer les notations.

On note, pour des entiers $1 \leq i, j \leq n$, $e^n_{i,j}$ (l'exposant n sera souvent omis, comme dans les notations analogues à venir) l'élément de $\mathfrak{gl}_n(A)$ dont le coefficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne est égal à 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. Si de plus i et j sont distincts, on note $E^n_{i,j}(a) := 1_n + a.e^n_{i,j}$: c'est un élément de $GL_n(A)$ (cela vaut d'ailleurs même si A n'a pas d'unité) d'inverse $E^n_{i,j}(-a)$; de fait, $E^n_{i,j}$ définit un morphisme du groupe additif sous-jacent à A dans $GL_n(A)$. Le sous-groupe de $GL_n(A)$ engendré par les $E^n_{i,j}(a)$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$ et $a \in A$ est noté $E_n(A)$ et appelé sous-groupe des matrices élémentaires (attention : on appelle souvent matrice élémentaire une matrice de la forme $E_{i,j}(a)$, ce terme est donc assez ambigu) ; par passage à la colimite sur n, on obtient un sous-groupe $E_\infty(A)$ de $GL_\infty(A)$.

On peut noter que toute matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) stricte (i.e. avec une diagonale constituée de 1) est une matrice élémentaire ; cela autorise des arguments de calcul par blocs très utiles sur les matrices élémentaires. Une manière d'exprimer cela est de noter que l'isomorphisme évident $GL_n(\mathfrak{gl}_m(A)) \xrightarrow{\simeq} GL_{nm}(A)$ envoie $E_n(\mathfrak{gl}_m(A))$ dans $E_{nm}(A)$.

Remarque 1.3. L'étude des $E_n(A)$ est beaucoup plus délicate que celle de $E_\infty(A)$ (c'est encore un problème de stabilité en K-théorie algébrique) : en général, $E_\infty(A) \cap GL_n(A)$ contient strictement $E_n(A)$ (mais il n'est généralement pas facile du tout de vérifier cela sur un anneau A donné).

Suslin a montré (de manière élémentaire, mais astucieuse) que $E_n(A)$ est distingué dans $GL_n(A)$ lorsque $n \geq 3$ (pour $n = 2$, c'est souvent faux) et que A

est *commutatif*; il semble qu'on ne sache toujours pas si l'on peut s'affranchir de cette hypothèse de commutativité.

Le lemme de Whitehead qui sert de point de départ à l'étude du K_1 est le suivant :

Proposition 1.4. *On a*

$$E_\infty(A) = [E_\infty(A), E_\infty(A)] = [GL_\infty(A), GL_\infty(A)].$$

Supposons que I est un idéal bilatère d'un anneau unitaire A. On va construire un morphisme naturel $K_1(A/I) \to K_0(I)$. On va utiliser pour cela (il y a bien sûr d'autres manières de procéder) le lemme calculatoire suivant :

Lemme 1.5. *Soit A un anneau. Dans $\mathfrak{gl}_2(A)$, la conjugaison par l'élément $E_{1,2}(-u)E_{2,1}(t)E_{1,2}(-u)$ de $E_2(A)$ applique*

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sur

$$\begin{pmatrix} (1-ut)e(1-ut) & (1-ut)eu\big(1+(1-ut)u\big) \\ te(1-ut) & te\big(u+(1-ut)u\big) \end{pmatrix}$$

Soit x un élément de $K_1(A/I)$: on peut le représenter par un élément α d'un $GL_n(A/I)$. Choisissons des relèvements t et u de α et α^{-1} respectivement dans $\mathfrak{gl}_n(A)$. Ainsi, $tu-1$ et $ut-1$ appartiennent à $\mathfrak{gl}_n(I)$. Appliquons le lemme à l'anneau $\mathfrak{gl}_n(A)$ avec ce choix de t et u, et $e = 1$: on obtient ainsi, par la conjugaison appropriée, un idempotent de $\mathfrak{gl}_2(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{Z} \ltimes I)) \simeq \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{Z} \ltimes I)$ dont la classe dans $K_0(\mathbb{Z} \ltimes I)$ à laquelle on retranche la classe de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$$

donne un élément de $K_0(I)$. On vérifie facilement que cet élément ne dépend que de x.

Proposition 1.6. *Si I est un idéal bilatère d'un anneau unitaire A, la suite*

$$K_1(A) \to K_1(A/I) \to K_0(I) \to K_0(A) \to K_0(A/I)$$

de groupes abéliens prolongeant celle de la proposition 1.2 grâce au morphisme de liaison défini ci-avant est exacte.

(Démonstration en exercice ; pour l'exactitude en $K_0(I)$, utiliser encore le lemme.)

1.3 K_1 relatif

Si I est un anneau (sans unité), on définit $K_1(I) := Ker\,(K_1(\mathbb{Z} \ltimes I) \to K_1(\mathbb{Z}))$ (ce qui est encore compatible avec la définition précédente lorsque I est unitaire parce que K_1 commute aux produits finis). On vérifie aussitôt des isomorphismes canoniques

$$K_1(I) \simeq GL(I)/[GL(I), GL(\mathbb{Z} \ltimes I)] \simeq \big(GL(I)_{ab}\big)_{GL(\mathbb{Z})} \tag{1}$$

(on écrit GL pour GL_∞ ; l'opération de $GL(\mathbb{Z})$ est induite par la conjugaison). *En général, $GL(\mathbb{Z})$ n'opère pas trivialement sur $GL(I)_{ab}$, de sorte que $K_1(I)$ en est seulement un quotient naturel.* Un phénomène (tout à fait relié) qui montre que $GL(I)$ ne se comporte généralement pas comme le groupe linéaire infini d'un anneau unitaire, même une fois abélianisés, est le suivant : les matrices élémentaires de $GL(I)$ ne sont généralement pas des commutateurs (il faut regarder des matrices élémentaires à coefficients dans I^2 pour en être assuré) ; $[GL(I), GL(I)]$ ne se décrit pas en ces termes et n'est généralement pas un groupe parfait.

On peut prolonger de façon évidente la suite exacte de la proposition 1.6, en une suite exacte

$$K_1(I) \to K_1(A) \to K_1(A/I) \to K_0(I) \to K_0(A) \to K_0(A/I) \tag{2}$$

(pour I idéal bilatère d'un anneau unitaire A).

On a donc l'impression qu'on pourrait se contenter de ce $K_1(I)$, lorsque I est un idéal de A anneau unitaire, mais dès que l'on cherche à étudier le K_2 (cf. infra), on voit que cela ne suffit plus. De fait, les isomorphismes (1) conduisent naturellement à introduire la définition suivante (on suppose toujours que I est un idéal bilatère de l'anneau unitaire A) :

$$K_1(A, I) := GL(I)/[GL(I), GL(A)] \simeq \big(GL(I)_{ab}\big)_{GL(A)} = \big(GL(I)_{ab}\big)_{\overline{GL}(A/I)}$$

où $\overline{GL}(A/I)$ désigne l'image de $GL(A)$ dans $GL(A/I)$ (cette notation est abusive, car cela ne dépend pas que de A/I, mais classique). Cette définition est fonctorielle en un sens évident ; $K_1(I)$ s'identifie canoniquement à $K_1(\mathbb{Z} \ltimes I, I)$. Le morphisme canonique $K_1(I) \to K_1(A, I)$ est toujours surjectif, au vu de la définition, mais il n'est pas toujours injectif. Cela a été observé par Swan dans [Swa71]. Il montre notamment que dès que I est commutatif, mais non central, dans A, cette surjectivité est en défaut (ce n'est pas difficile). Il exhibe également des contre-exemples avec A commutatif (cela requiert déjà davantage de travail).

On peut améliorer la suite exacte (2) comme suit.

Proposition 1.7. *Si I est un idéal bilatère d'un anneau unitaire A, la suite*

$$K_1(A, I) \to K_1(A) \to K_1(A/I) \to K_0(I) \to K_0(A) \to K_0(A/I)$$

de groupes abéliens prolongeant celle de la proposition 1.6, où la première flèche est induite par l'inclusion (de (A, I) dans (A, A), notant que $K_1(A, A) = K_1(A)$), est exacte.

1.4 K_2

Si A est un anneau unitaire, le *groupe de Steinberg* $St(A)$ est le groupe défini par générateurs et relations comme suit. Il est engendré par des éléments $\mathrm{e}_{i,j}(a)$, pour i, j entiers naturels non nuls distincts et a élément de A, soumis aux relations suivantes :

1. $\mathrm{e}_{i,j}(a)\mathrm{e}_{i,j}(b) = \mathrm{e}_{i,j}(a + b)$;
2. $[\mathrm{e}_{i,j}(a), \mathrm{e}_{k,l}(b)] = 1$ pour $j \neq k$ et $i \neq l$;
3. $[\mathrm{e}_{i,j}(a), \mathrm{e}_{j,k}(b)] = \mathrm{e}_{i,k}(ab)$.

On dispose d'un morphisme de groupe naturel évident $St(A) \to GL(A)$ dont l'image est $E(A)$. On peut montrer que son noyau est exactement le centre du groupe $St(A)$ (voir [Mil71], § 5) ; c'est ce groupe abélien qu'on note $K_2(A)$.

Si I est un idéal bilatère de l'anneau unitaire A, définissons un morphisme de liaison $\partial : K_2(A/I) \to K_1(A, I)$. Soit x un élément de $K_2(A/I)$. Du fait que le foncteur St des anneaux unitaires vers les groupes abéliens préserve les surjections, x se relève en un élément $\tilde{x}$ de $St(A)$. Son image dans $GL(A)$ appartient en fait à $GL(I)$ (elle est tuée dans $GL(A/I)$) ; $\partial(x)$ est la classe de cette image dans $K_1(A, I)$. Pour voir qu'elle ne dépend pas du choix du relevé $\tilde{x}$ de x, on constate que le noyau de $St(A) \to St(A/I)$ est le sous-groupe *distingué* de $St(A)$ engendré par les éléments du type $\mathrm{e}_{i,j}(t)$ pour lesquels $t \in I$. Par conséquent, l'image dans $GL(A)$ de ce noyau est incluse dans le sous-groupe distingué $E(A, I)$ engendré par les matrices $E_{i,j}(t)$ pour lesquelles $t \in I$, or $E(A, I)$ est précisément le noyau de $GL(I) \twoheadrightarrow K_1(A, I)$.

Une manière plus conceptuelle de voir ce morphisme de liaison est la suivante. On peut montrer que l'extension centrale

$$0 \to K_2(A) \to St(A) \to E(A) \to 1$$

est *universelle*, c'est-à-dire initiale parmi les extensions centrales du groupe $E(A)$, d'où l'on déduit un isomorphisme naturel

$$K_2(A) \simeq H_2(E(A))$$

(voir encore [Mil71], § 5). Notre morphisme de liaison $K_2(A/I) \to K_1(A, I)$ peut être vu comme la composée suivante

$$K_2(A/I) \simeq H_2(E(A/I)) \to H_2\big(\overline{GL}(A/I)\big) \to H_0\big(\overline{GL}(A/I); H_1(GL(I))\big) \simeq K_1(A, I)$$

où la flèche de gauche est induite par l'inclusion $E(A/I) \hookrightarrow \overline{GL}(A/I)$ (qui provient de ce que le foncteur E préserver les surjections) et celle de droite est celle de la suite exacte à cinq termes en homologie associée à l'extension de groupes

$$1 \to GL(I) \to GL(A) \to \overline{GL}(A/I) \to 1.$$

On peut alors compléter la suite exacte de la proposition 1.7 en

$$K_2(A) \to K_2(A/I) \xrightarrow{\partial} K_1(A, I) \to K_1(A) \to \dots.$$

Pour le K_2 d'un anneau sans unité, la définition est la même que d'habitude ; on peut définir plus généralement $K_2(A, I)$ pour I idéal bilatère d'un anneau unitaire A (groupe abélien qui dépend non seulement de I, mais aussi de A, comme pour le K_1) et prolonger la suite exacte précédente en ajoutant un $K_2(A, I)$ à gauche. Toutefois, nous n'en aurons pas usage et préférons nous concentrer par la suite sur la K-théorie algébrique supérieure.

1.5 L'action de $\overline{GL}(A/I)$ sur $H_1(GL(I))$

Avant cela, nous examinons de façon directe le problème de la trivialité de l'action de $\overline{GL}(A/I)$ sur $H_1(GL(I))$, qui sous-tend l'excision en degré 1.

Proposition 1.8. *La fonction $GL_n(I) \to \mathfrak{gl}_n(I/I^2)$ $\quad M \mapsto [M - 1_n]$ définit un morphisme de groupes, et donc un morphisme de groupes $H_1(GL_n(I)) \to \mathfrak{gl}_n(I/I^2)$. Celui-ci vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Il est $\overline{GL}_n(A/I)$-équivariant (pour les actions induites par la conjugaison) et compatible, lorsque n varie, aux applications de stabilisation ;*
2. *son image contient $\mathfrak{sl}_n(I/I^2)$;*
3. *l'action de $\overline{GL}_n(A/I)$ sur ses noyau et conoyau est stablement triviale (i.e. devient triviale quand on passe à la colimite sur n).*

Démonstration. Le fait que la formule en question définit bien un morphisme de groupes compatible à l'action de $\overline{GL}_n(A/I)$ est évident.

Pour le deuxième point, on note que le groupe abélien $\mathfrak{gl}_n(I/I^2)$ est engendré par des matrices venant (modulo permutation des indices) de matrices 2×2 — de sorte qu'on peut supposer $n = 2$ — à savoir les matrices $t.e^n_{i,j}$ ($i \neq j$, $t \in I/I^2$), qu'on relève de façon évidente par des matrices élémentaires de $GL_n(I)$, et les matrices du type :

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & -\bar{a} \end{pmatrix}$$

où $\bar{a}$ est la classe dans I/I^2 de $a \in I$.

La matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 + a - a^2 + a^3 & -a^2 \\ a^2 & 1 - a \end{pmatrix}$$

appartient à $GL_2(I)$ et relève la précédente.

Pour le dernier point, l'assertion relative au conoyau est évidente. Le noyau de notre morphisme est exactement $GL(I^2)$; il s'agit donc de vérifier l'inclusion $[GL(I^2), GL(A)] \subset [GL(I), GL(I)]$. Elle provient de ce que $[GL(I^2), GL(A)] \subset E(I^2)$ (cf. [Bas64], corollaire 1.9) et que $E(I^2) \subset [E(I), E(I)]$ par la formule usuelle sur le commutateur de matrices élémentaires. Cela achève la démonstration.

□

Remarque 1.9. On vérifie (exercice) qu'on dispose d'un isomorphisme naturel

$$H_0\big(\overline{GL}(A/I), \mathfrak{gl}(I/I^2)\big) \simeq HH_0(A/I; I/I^2).$$

Cela peut aider à comprendre intuitivement (sans rien démontrer, même pour le seul H_1, déjà assez subtil) pourquoi des conditions liées à l'homologie de Hochschild apparaissent dans l'étude de l'excision en K-théorie algébrique (le résultat principal de Suslin-Wodzicki implique qu'une $\mathbb{Q}$-algèbre est excisive en K-théorie algébrique si et seulement si elle est excisive en homologie cyclique).

Corollaire 1.10. *Soit I un anneau sans unité. Si le groupe $GL(\mathbb{Z})$ opère trivialement sur $H_1(GL(I))$, alors $I = I^2$.*

Réciproquement, si $I = I^2$, alors, pour tout anneau unitaire A contenant I comme idéal bilatère, $\overline{GL}(A/I)$ opère trivialement sur $H_1(GL(I))$. De plus, les morphismes canoniques

$$H_1(GL(I)) \to K_1(I) \to K_1(A, I)$$

sont des isomorphismes (ainsi, I est excisif pour le K_1).

Bien sûr, la condition $I = I^2$ est très restrictive (elle n'arrive par exemple jamais si I est un idéal non trivial d'un anneau intègre noethérien [5]), ce qui illustre que l'excision en K-théorie algébrique constitue plus une situation exceptionnelle que le cas ordinaire.

Remarque 1.11. Le morphisme de la proposition 1.8 se généralise de la façon suivante (cf. [Sus95]), qui permet de comprendre d'où vient la condition générale d'excisivité en K-théorie entière (qui est indiquée à la fin de cet exposé). Soient I un anneau, n et i des entiers naturels, avec $i > 0$. On peut définit un morphisme naturel

$$H_i(GL_n(I);\mathbb{Z}) \to \mathfrak{gl}_n\big(\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}\ltimes I}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})\big)$$

qui est $GL_n(\mathbb{Z})$-équivariant et compatible aux morphismes de stabilisation (quand n varie) comme suit. Le morphisme (unifère) d'anneaux unitaires évident $\mathbb{Z}[GL_n(I)] \to \mathbb{Z}\ltimes\mathfrak{gl}_n(I)$ induit en homologie un morphisme

$$H_i(GL_n(I);\mathbb{Z}) = \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}[GL_n(I)]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \to \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}\ltimes\mathfrak{gl}_n(I)}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Tor}_{i-1}^{\mathbb{Z}\ltimes\mathfrak{gl}_n(I)}(\mathbb{Z},\mathfrak{gl}_n(I))$$

(argument de décalage élémentaire), ensuite on compose avec le morphisme naturel

$$\mathrm{Tor}_{i-1}^{\mathbb{Z}\ltimes\mathfrak{gl}_n(I)}(\mathbb{Z},\mathfrak{gl}_n(I)) \to \mathfrak{gl}_n\big(\mathrm{Tor}_{i-1}^{\mathbb{Z}\ltimes I}(\mathbb{Z},I)\big)$$

qu'on va définir plus bas puis enfin avec l'isomorphisme de décalage

$$\mathfrak{gl}_n\big(\mathrm{Tor}_{i-1}^{\mathbb{Z}\ltimes I}(\mathbb{Z},I)\big) \simeq \mathfrak{gl}_n\big(\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}\ltimes I}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})\big)$$

analogue au précédent.

Le morphisme qu'il nous reste à définir est un cas particulier du morphisme naturel gradué

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathbb{Z}\ltimes\mathfrak{gl}_n(I)}(\mathbb{Z},\mathfrak{gl}_n(M)) \to \mathfrak{gl}_n\big(\mathrm{Tor}_*^{\mathbb{Z}\ltimes I}(\mathbb{Z},M)\big),$$

où M est un $(\mathbb{Z}\ltimes I)$-module à gauche, obtenu en dérivant l'isomorphisme canonique

$$\mathbb{Z}\underset{\mathbb{Z}\ltimes\mathfrak{gl}_n(I)}{\otimes}\mathfrak{gl}_n(M) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{gl}_n\big(\mathbb{Z}\underset{\mathbb{Z}\ltimes I}{\otimes} M\big)$$

2 La K-théorie algébrique absolue et relative et le problème de l'excision en degré supérieur

2.1 La construction + de Quillen

Dans la proposition qui suit, *espace* peut signifier tout aussi bien ensemble simplicial qu'espace topologique (raisonnable).

Proposition 2.1 (Quillen)**.** *Soit X un espace pointé connexe dont le groupe fondamental G est parfait (i.e. $G = [G,G]$). Il existe un espace pointé connexe X^+ et un morphisme $f : X \to X^+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *f induit un isomorphisme en homologie ;*
2. *$\pi_1(X^+)$ est trivial.*

5. Exercice : cela persiste-t-il en ôtant l'hypothèse d'intégrité et en supposant seulement que l'anneau ambiant est commutatif noethérien et sans idempotent non trivial ?

De plus, cette construction est unique et fonctorielle à homotopie près.

Esquisse de démonstration. Considérons un morphisme (pointé) d'un bouquet de cercles dans X qui induit une surjection entre groupes fondamentaux et formons sa cofibre homotopique Y : elle est simplement connexe. En homologie, elle ne diffère de X qu'en degré 2, via la suite exacte d'excision

$$0 \to H_2(X) \to H_2(Y) \to L \to 0$$

où L est un groupe abélien libre (H_1 du bouquet de cercles). On choisit une section du morphisme $H_2(Y) \twoheadrightarrow L$: comme $\pi_2(Y) \simeq H_2(Y)$ (Hurewicz), il lui correspond un morphisme d'un bouquet de sphères $\mathbb{S}^2$ dans Y. Sa cofibre homotopique n'est autre que X^+. □

Corollaire 2.2 (Quillen)**.** *Soient X un espace pointé connexe et G un sous-groupe distingué parfait de $\pi_1(X)$. Il existe un espace pointé X^+ et un morphisme $f : X \to X^+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$\pi_1(f)$ est isomorphe à la projection $\pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1(X)/G$;*
2. *pour tout $\pi_1(X^+)$-module M, le morphisme*

$$H_*(X; M) \to H_*(X^+; M)$$

qu'induit f est un isomorphisme.

De plus, cette construction est unique et fonctorielle à homotopie près.

Esquisse de démonstration. Soit $\pi : Y \to X$ le revêtement galoisien tel que $G = \pi_1(Y)$. On peut appliquer la proposition 2.1 à Y. On définit X^+ par le diagramme commutatif homotopiquement cocartésien suivant.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & Y^+ \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X^+ \end{tikzcd}$$

□

Remarque 2.3. À homotopie près, Y^+ est le revêtement universel de X^+.

Tout groupe possède un plus grand sous-groupe distingué parfait ; sauf mention contraire, la construction plus sur un espace pointé connexe est prise relativement au plus grand sous-groupe distingué parfait de son groupe fondamental.

Pour $GL(A)$, où A est un anneau *unitaire*, le plus grand sous-groupe distingué parfait est $E(A)$, grâce au lemme de Whitehead.

Définition 2.4. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on définit le i-ème groupe de K-théorie algébrique (de Quillen) de l'anneau unitaire A par

$$K_i^Q(A) := \pi_i(BGL(A)^+).$$

Il faut bien sûr voir que cette définition concorde avec les définitions « naïves » pour $i = 1$ ou 2. Pour $i = 1$ c'est clair ; pour $i = 2$ cela résultera de l'observation suivante : si E est le plus grand sous-groupe distingué parfait d'un groupe G et que H est un sous-groupe de G contenant E (de sorte que E est encore le plus grand sous-groupe parfait distingué dans E), alors l'inclusion $H \to G$ induit un morphisme $BH^+ \to BG^+$ qui induit un isomorphisme entre les π_i pour $i \geq 2$ (grâce à la remarque 2.3). On en tire

$$K_2^Q(A) \simeq \pi_2(BE(A)^+) \simeq H_2(BE(A)^+) \simeq H_2(BE(A)) \simeq K_2(A)$$

où le deuxième isomorphisme est celui de Hurewicz. À partir de cela, on se dispensera de l'exposant Q dans la notation de la K-théorie de Quillen.

Une propriété fondamentale de l'espace $BGL(A)^+$ est sa structure de H-espace commutatif à homotopie près.

Commençons par une observation : l'opération de somme directe des matrices fait de l'homologie $H_*(GL(A))$ une algèbre graduée associative, commutative et unitaire. Toutefois, cette structure n'est pas induite par une structure homotopique sur le classifiant $BGL(A)$, car on utilise que la conjugaison induit une opération triviale en homologie, ce qui n'est pas le cas en homotopie. La construction plus permet de transporter cette structure homologique sur $BGL(A)$ en une structure homotopique sur $BGL(A)^+$. Noter que $BGL(A)^+$ est (à homotopie près) le seul H-espace connexe homologiquement équivalent à $BGL(A)$, à cause de l'unicité homotopique de la construction plus (un H-espace connexe dont le H_1 est nul est forcément simplement connexe, puisque son π_1 est commutatif).

D'une manière générale, calculer la K-théorie d'un anneau A est un problème extrêmement difficile, tout comme calculer l'homologie de $GL(A)$. Les deux questions sont reliées, mais passer de l'un à l'autre est tout sauf facile en général. Toutefois, rationnellement, la structure de H-espace commutatif (à homotopie près) sur $BGL(A)^+$ implique formellement (théorème de Milnor-Moore) :

Proposition 2.5. *Pour tout anneau A unitaire, la K-théorie algébrique rationnelle $K_*(A) \otimes \mathbb{Q}$, restreinte aux degrés $* > 0$, est naturellement isomorphe au $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des indécomposables de l'algèbre de Hopf $H_*(GL(A);\mathbb{Q})$. Cette algèbre de Hopf graduée est isomorphe à l'algèbre symétrique graduée sur ses indécomposables.*

2.2 K-théorie algébrique supérieure relative

Supposons que I est un idéal bilatère d'un anneau unitaire A. Soit $F(A, I)$ l'espace pointé fibre homotopique du morphisme $BGL(A)^+ \to BGL(A/I)^+$ induit par la projection. On pose $K_i(A, I) = \pi_i(F(A, I))$ pour $i > 0$. La suite exacte longue d'homotopie d'une fibration montre que cette K-théorie algébrique relative donne lieu à la suite exacte qu'on attend :

$$\cdots \to K_{i+1}(A) \to K_{i+1}(A/I) \to K_i(A, I) \to K_i(A) \to K_i(A/I) \to \ldots.$$

Pour un anneau sans unité I, on définit

$$K_i(I) = K_i(\mathbb{Z} \ltimes I, I) = Ker\left(K_i(\mathbb{Z} \ltimes I) \to K_i(\mathbb{Z})\right)$$

(cette dernière égalité provient de ce que, la projection $\mathbb{Z} \ltimes I \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ étant scindée, le morphisme de liaison de la suite exacte longue précédente est nul dans ce cas particulier).

Le morphisme d'anneaux canonique $\mathbb{Z} \ltimes I \to A$, où I est un idéal bilatère d'un anneau unitaire A, procure un morphisme naturel $K_*(I) \to K_*(A, I)$.

Définition 2.6. On dit que l'anneau I est **excisif en K-théorie algébrique (resp. en K-théorie algébrique rationnelle)** si le morphisme précédent est un isomorphisme (resp. est rationnellement un isomorphisme) pour tout anneau unitaire A contenant I comme idéal bilatère.

On peut bien sûr donner plusieurs raffinements très naturels de cette définition ; notamment, on dispose d'une notion claire d'anneau excisif (en K-théorie algébrique, éventuellement rationnelle) en degrés au plus n.

Dans le cas excisif, on peut donner une description de la K-théorie algébrique de I complètement analogue à celle des anneaux unitaires, c'est-à-dire :

$$K_n(I) \simeq \pi_n(BGL(I)^+) \quad \text{pour } I \text{ excisif et } n > 0.$$

Ceci n'est pas évident ; pour commencer, le plus grand sous-groupe distingué parfait de $GL(I)$ n'est pas facile à déterminer pour I anneau (sans unité) quelconque. Mais la condition d'excision en degré 1 est équivalente à l'égalité $I = I^2$ (cf. § 1.5), auquel cas on a

$$[GL(I), GL(I)] = E(I) = [E(I), E(I)]$$

où $E(I)$ désigne le sous-groupe de $GL(I)$ *distingué dans* $GL(\mathbb{Z} \ltimes I)$ engendré par les matrices élémentaires $E_{i,j}(t)$ ($i \neq j$, $t \in I$) — cf. [Bas64], ch. I, § 1. Ainsi, sous l'hypothèse $I = I^2$ (qu'on supposera presque toujours vérifiée dans la suite), le plus grand sous-groupe distingué parfait de $GL(I)$ est $E(I)$. (Dans d'autres situations, par exemple, si l'intersection des puissances de I est nulle, il n'y a pas de sous-groupe distingué parfait non trivial dans $GL(I)$, de sorte que $BGL(I)^+ = BGL(I)$ n'est certainement pas un bon modèle pour la K-théorie de I !)

Si $1 \to H \to G \to K \to 1$ est une suite exacte de groupes, alors $BH \to BG \to BK$ est une fibration. Si l'on applique la construction plus à chaque espace, on n'obtient plus nécessairement une fibration, c'est ce qui explique l'excision en K-théorie algébrique n'a généralement pas lieu. Toutefois, la composée $BGL(I)^+ \to BGL(A)^+ \to BGL(A/I)^+$ (où I est un idéal bilatère de l'anneau unitaire A) est homotopiquement triviale, de sorte que la flèche $BGL(I)^+ \to BGL(A)^+$ se factorise (à homotopie près) par $F(A, I) \to BGL(A)^+$. Plutôt que la définition originelle de l'excision, on s'intéressera, suivant Suslin et Wodzicki ([SW92]), à la condition suivante sur l'anneau I (qui implique l'excision ; la réciproque est vraie mais non triviale et non abordée dans l'article [SW92] — elle avait déjà été traitée, au moins dans le cas rationnel, par Wodzicki dans [Wod89]) : *le morphisme $BGL(I)^+ \to F(A, I)$ est une équivalence d'homotopie (ou une équivalence faible) pour tout anneau unitaire A contenant I comme idéal bilatère.*

Sous l'hypothèse excisive, $BGL(I)^+$ se comporte en gros comme si I était un anneau unitaire ; en particulier, c'est un encore un H-espace commutatif à homotopie près. Pour plus de détails, voir [SW92], § 1.

2.3 La construction de Volodin

Soient G un groupe et $\mathcal{G}$ un ensemble de sous-groupes de G. Par définition, l'*espace de Volodin* $V(G, \mathcal{G})$ est le produit fibré des morphismes (d'ensembles simpliciaux pointés, par exemple) $EG \twoheadrightarrow BG$ (G-fibré principal universel) et

$$\bigcup_{H \in \mathcal{G}} BH \hookrightarrow BG.$$

Si A est un anneau, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $V_n(A)$ l'espace de Volodin $V(GL_n(A), \mathcal{T}_n(A))$, où $\mathcal{T}_n(A)$ désigne l'ensemble des sous-groupes triangulaires stricts de $GL_n(A)$, c'est-à-dire les sous-groupes constitués des matrices M telles que $M_{i,j} = 0$ sauf si $i \overset{\sigma}{<} j$, où σ est un ordre *partiel* donné sur $\{1, \dots, n\}$ (sous-groupe noté T_n^σ, qui est *nilpotent*). Noter que si σ est une relation d'ordre plus fine que τ, alors $T_n^\tau \subset T_n^\sigma$, de sorte qu'on obtiendrait exactement le même espace de Volodin en se restreignant aux sous-groupes triangulaires stricts associés à des ordres totaux. La famille de tous les groupes triangulaires présente l'avantage d'être stable par intersection non vide. (On peut faire des choses « à la Čech » ensuite avec la réunion des classifiants de ces groupes triangulaires.)

Finalement, on peut prendre la colimite sur n des $V_n(A)$ de la façon habituelle pour obtenir l'*espace de Volodin de* A, noté $V(A)$.

Théorème 2.7. *Pour tout entier naturel $n > 0$ et tout anneau unitaire A, il existe un isomorphisme naturel*

$$K_n(A) \simeq \pi_{n-1}(V(A)).$$

Ce résultat est dû initialement à Volodin (ou/et Vaserstein ?) ; Suslin en a donné une démonstration courte dans [Sus81].

Il semble que Suslin et Wodzicki *n'*utilisent *pas* ce résultat dans leur travail sur l'excision en K-théorie algébrique ; en revanche, *ils utilisent la construction de Volodin*, qui leur sert à établir un lien (sous forme de suite spectrale) entre l'homologie du groupe $GL(A)$ et l'homologie des groupes *nilpotents* $T^\sigma(A)$. En fait, ils utilisent la construction de Volodin usuelle (présentée ici) et un analogue pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(A)$; cette idée était déjà employée par Goodwillie (qui lui utilisait l'équivalence entre les définitions de Quillen et de Volodin) dans [Goo85].

2.4 Culture : autres constructions, quelques résultats classiques

La construction Q de Quillen, fondamentale, est davantage utilisée que la construction plus (l'équivalence des deux définitions est loin d'être une trivialité) pour beaucoup de propriétés fondatrices de la K-théorie — cf. [Qui73]. En revanche, pour étudier l'excision, la construction plus semble vraiment la plus appropriée.

Une autre manière de construire la K-théorie algébrique de l'anneau unitaire A consiste à considérer le classifiant du monoïde topologique donné par la somme (au sens des espaces non pointés) des classifiants des groupes d'automorphismes des différents A-modules à gauche projectifs de type fini (en choisir exactement un par classe d'isomorphisme) puis à prendre l'espace des lacets et les groupes d'homotopie. L'équivalence avec la définition que nous utilisons est donnée par le théorème de la complétion en groupe (voir par exemple [MS76]).

L'invariance homotopique est une propriété de base très importante, valable sous hypothèse sur l'anneau unitaire A (noethérien régulier), affirmant que A

et $A[t]$ ont la même K-théorie (l'importance de l'hypothèse sur l'anneau est clarifiée par la construction Q ; voir [Qui73] pour la démonstration).

Sur les corps commutatifs, de nombreux (et souvent difficiles) résultats (permettant certains calculs explicites) existent : les premiers sont dus à Quillen (calcul de la K-théorie des corps finis dans [Qui72]), Suslin a fait beaucoup sur le sujet, pour ne citer que deux noms revenant souvent par ailleurs dans cette exposé. Le problème du calcul de la K-théorie de $\mathbb{Z}$ est extrêmement difficile (et pas encore totalement résolu, même si des résultats très significatifs sont connus). Si l'on se limite à la K-théorie rationnelle, les calculs de K-théorie algébrique sont déjà hautement non triviaux, mais tout de même plus accessibles. Ainsi, les méthodes d'A. Borel utilisant la cohomologie continue permettent de déterminer entièrement la K-théorie rationnelle des anneaux d'entiers de corps de nombres.

Signalons également que la K-théorie algébrique peut se définir dans des cadres plus généraux, ou légèrement différents, de celui des anneaux : pour les schémas (dans le cas d'un schéma affine, c'est la K-théorie de l'anneau commutatif des fonctions globales), les (petites) catégories exactes (généralisation des catégories abéliennes ; la construction Q fait cela naturellement), ou encore des catégories monoïdales symétriques appropriées.

3 Énoncés et plan de la démonstration de Suslin-Wodzicki

On donne ici la stratégie de la démonstration de Suslin et Wodzicki de leur caractérisation des anneaux excisifs en K-théorie algébrique rationnelle (sans forcément respecter l'ordre qu'ils suivent : de nombreuses étapes sont totalement indépendantes), et qui est également rappelée de façon efficace dans le survol de Loday [Lod92] au séminaire Bourbaki. Mais il est à noter que l'article [SW92] fait davantage (sur 10 sections, seules les n°1, 2, 4, 5 et 6 sont consacrées à la démonstration du résultat principal) : il étudie aussi des propriétés des algèbres H-unitaires (notion définie ci-après), de la construction de Volodin et démontre une conjecture de Karoubi dont on ne dira rien ici.

3.1 Les algèbres H-unitaires

La *résolution barre* d'un anneau A est le complexe semi-simplicial $B_*(A)$

$$\cdots \to A^{\otimes(n+1)} \to A^{\otimes n} \to \cdots \to A^{\otimes 2} \to A$$

dont la différentielle est la somme alternée des n morphismes $A^{\otimes(n+1)} \to A^{\otimes n}$ donnés par

$$a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto a_0 \otimes \cdots \otimes (a_i.a_{i+1}) \otimes \cdots \otimes a_n.$$

On dit que l'anneau A est *homologiquement unitaire*, ou simplement *H-unitaire*, si l'homologie de ce complexe est nulle en tout degré. (Noter que la première condition signifie exactement $A^2 = A$.) La terminologie provient de ce que tout anneau unitaire vérifie cette propriété (avec l'unité de A, on construit une homotopie simpliciale évidente entre 0 et l'identité de $B_*(A)$).

Cette notion a été introduite par Wodzicki dans [Wod89], qui y démontre également la propriété (élémentaire) suivante :

Proposition 3.1 (Wodzicki). *Étant donné un anneau A, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est H-unitaire ;*
2. *A est excisif en homologie de Hochschild ;*
3. *A est excisif en homologie cyclique.*

(On ne détaille pas ici ce que signifie l'excision pour les homologies cyclique et de Hochschild, cela fera l'objet d'un exposé ultérieur.)

Les deux théorèmes principaux de l'article de Suslin et Wodzicki sont les suivants :

Théorème 3.2 (Théorème A de [SW92]). *Un anneau A est excisif en K-théorie rationnelle si et seulement si la $\mathbb{Q}$-algèbre $A_{\mathbb{Q}}$ est H-unitaire.*

Théorème 3.3 (Théorème B de [SW92]). *Une $\mathbb{Q}$-algèbre est excisive en K-théorie algébrique (entière) si et seulement si elle est H-unitaire.*

3.2 Première étape : réduction à un problème d'homologie de groupes linéaires

Cette étape fonctionne très bien pour le théorème 3.3. Pour le théorème 3.2, il faut travailler un peu plus ; dans la section 6 de [SW92], Suslin et Wodzicki utilisent un raisonnement spécifique, tout en laissant entendre que l'on pourrait s'en sortir comme pour le théorème 3.3 en utilisant un résultat plus fort de comparaison de suites spectrales. Dans le présent exposé, on se contentera de présenter la réduction à un problème d'homologie des groupes linéaires utile pour le théorème 3.3.

Théorème 3.4. *Soit I un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *le morphisme canonique $BGL(I)^+ \to F(A, I)$ est une équivalence pour tout anneau unitaire A contenant I comme idéal ;*
2. *le morphisme canonique $BGL(I)^+ \to F(\mathbb{Z} \ltimes I, I)$ est une équivalence ;*
3. *le groupe $\overline{GL}(A/I)$ opère trivialement sur $H_*(GL(I))$ pour tout anneau unitaire A contenant I comme idéal bilatère ;*
4. *le groupe $GL(\mathbb{Z})$ opère trivialement sur $H_*(GL(I))$;*
5. *le sous-groupe Σ des matrices de permutation de $GL(\mathbb{Z})$ opère trivialement sur $H_*(GL(I))$.*

Remarque 3.5. On a aussi des variantes tronquées (supposer que les énoncés ne sont valables qu'en degré homologique inférieur à une constante fixée, et dans le premier remplacer équivalence par hautement connexe, la signification précise de *hautement* étant prescrite par la constante).

La démonstration du théorème précédent (que donnent Suslin et Wodzicki au début du § 1 de [SW92]) repose sur le résultat classique suivant, dont on trouvera par exemple une démonstration dans [McC01] (dont c'est le théorème 3.26).

Lemme 3.6 (Théorème de comparaison de suites spectrales de Zeeman). *Soient $E^*_{*,*}$ et $E'^*_{*,*}$ deux suites spectrales (de groupes abéliens) du premier quadrant (i.e. $E^r_{p,q} = 0$ pour $p < 0$ ou $q < 0$) de type homologique (la différentielle*

$d^r : E^r \to E^r$ est de bidegré $(-r, r-1)$) et $f : E \to E'$ un morphisme de suite spectrale. On suppose qu'existe un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E^2_{p,0} \otimes E^2_{0,q} \arrow[r] \arrow[d, "f^2_{p,0} \otimes f^2_{q,0}"] & E^2_{p,q} \arrow[r] \arrow[d, "f^2_{p,q}"] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(E^2_{p-1,0}, E^2_{0,q}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tor}(f^2_{p-1,0}, f^2_{0,q})"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E'^2_{p,0} \otimes E'^2_{0,q} \arrow[r] & E'^2_{p,q} \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(E'^2_{p-1,0}, E'^2_{0,q}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Si f induit un isomorphisme entre les aboutissements des suites spectrales, alors $f^2 : E^2 \to E'^2$ est un isomorphisme entre leurs deuxièmes pages.

Démonstration du théorème 3.4. – $1 \Rightarrow 2$: évident.

– $2 \Rightarrow 4$: l'hypothèse indique qu'on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} BGL(I) \arrow[r] \arrow[d] & BGL(\mathbb{Z} \ltimes I) \arrow[r] \arrow[d] & BGL(\mathbb{Z}) \arrow[d] \\ BGL(I)^+ \arrow[r] & BGL(\mathbb{Z} \ltimes I)^+ \arrow[r] & BGL(\mathbb{Z})^+ \end{tikzcd}$$

dont les lignes sont (à homotopie près) des fibrations. Par conséquent, la flèche verticale de gauche induit un morphisme $H_*(GL(I)) = H_*(BGL(I)) \to H_*(BGL(I)^+)$ qui est équivariant relativement à l'action des groupes fondamentaux des bases des fibrations — action qui n'est autre, sur la source, que l'action canonique (induite par la conjugaison) de $GL(\mathbb{Z})$ sur $H_*(GL(I))$. Comme ce morphisme est un isomorphisme (par définition de la construction plus) et que la flèche verticale de droite induit entre les groupes fondamentaux, à isomorphisme près, la projection de $GL(\mathbb{Z})$ sur $GL(\mathbb{Z})/E(\mathbb{Z})$, on en déduit que $E(\mathbb{Z})$ opère trivialement sur $H_*(GL(I))$. Comme $SL(\mathbb{Z}) = E(\mathbb{Z})$, cela montre que l'action d'une matrice de $GL(\mathbb{Z})$ sur $H_*(GL(I))$ ne dépend que de son déterminant. On obtient alors la trivialité de cette action par un argument de colimite en notant que, pour tout entier naturel impair n, la matrice $-1_n \in GL_n(\mathbb{Z})$ a pour déterminant -1 et opère trivialement sur $H_*(GL_n(I))$. (On peut aussi éviter ce dernier argument en utilisant que $BGL(\mathbb{Z} \ltimes I)^+ \to BGL(\mathbb{Z})^+$ est un morphisme de H-espaces, ce qui implique que l'action du groupe fondamental de la base sur l'homologie de la fibre est triviale.)

– $4 \Rightarrow 5$: évident.

– $5 \Rightarrow 3$: il s'agit de montrer que, pour tout entier naturel n, tout $g \in GL_n(A)$ opère trivialement sur l'image de $H_*(GL_n(I))$ dans $H_*(GL(I))$. Pour cela, on utilise l'identité

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$$

de $GL_{2n}(A)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$ opère trivialement sur $H_*(GL(I))$ par hypothèse, tandis que $\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ opère trivialement sur l'image de $H_*(GL_n(I))$ dans $H_*(GL_{2n}(I))$ (cette matrice commutant à l'image de $GL_n(I)$ dans $GL_{2n}(I)$), d'où l'implication.

– $3 \Rightarrow 1$: le lemme 3.6, la suite spectrale de Serre et l'hypothèse impliquent que le morphisme $BGL(I)^+ \to F(A,I)$ induit un isomorphisme en homologie (l'action du groupe fondamental de $B\overline{GL}(A/I)^+$ sur l'homologie de $F(A,I)$ est triviale car la fibration $BGL(A)^+ \to B\overline{GL}(A/I)^+$ est un morphisme de H-espaces). Comme ces espaces sont *simples* (au sens où leur groupe fondamental opère trivialement sur tous leurs groupes d'homotopie), cela implique que c'est une équivalence d'homotopie. (On laisse les détails en exercice ; on pourra s'aider du chapitre 8bis de [McC01] pour la partie homotopique.)

□

En fait, Suslin et Wodzicki montrent les conditions du théorème 3.4 pour les $\mathbb{Q}$-algèbres H-unitaires en utilisant le critère simple suivant. On note, suivant [SW92],

$$\widetilde{GL(I)} = GL(I) \ltimes \mathcal{M}_{\infty,1}(I) \quad \text{et} \quad \widetilde{\widetilde{GL}}(I) = \mathcal{M}_{1,\infty}(I) \rtimes GL(I)$$

(où I est un anneau).

Proposition 3.7. *Si les inclusions $GL(I) \hookrightarrow \widetilde{GL}(I)$ et $GL(I) \hookrightarrow \widetilde{\widetilde{GL}}(I)$ induisent des isomorphismes en homologie, alors les conditions du théorème 3.4 sont satisfaites.*

Esquisse de démonstration. On procède comme suit pour montrer la propriété 4 du théorème.

1. On montre que (sans aucune hypothèse sur I) l'endomorphisme
$$u : g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$$
de $GL(I)$ induit un monomorphisme en homologie. Cela se fait en passant par les différents $GL_n(I)$ et en utilisant la matrice de permutation qui permet de transformer ce plongement (ou plutôt son analogue $GL_n(I) \to GL_{n+1}(I)$) en le plongement standard (cf. [SW92], lemme 1.4 pour les détails).
2. On considère, pour $i \in \mathbb{N}^*$, le diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd} GL(I) \arrow[d, equal] & \widetilde{GL(I)} \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}\,\varepsilon_i"] & GL(I) \arrow[d, "\mathrm{Ad}\,E_{i+1,1}(1)"] \\ GL(I) & \widetilde{GL(I)} \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "\tilde{u}"] & GL(I) \end{tikzcd}$$
où $\tilde{u} : \widetilde{GL}(I) \to GL(I)$ est le morphisme de groupes prolongeant u donné par
$$\tilde{u} : (g,v) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & g \end{pmatrix}$$
Ad désigne l'action par conjugaison et ε_i l'élément $(1, e_i)$ (où e_i est le i-ème vecteur de la « base » canonique de $\mathcal{M}_{\infty,1}(I)$). Comme p, qui est une rétraction de l'inclusion $GL(I) \hookrightarrow \widetilde{GL}(I)$, induit comme celle-ci un isomorphisme en homologie, en utilisant le point précédent, on voit que $E_{i+1,1}(1)$ opère trivialement sur l'image de $H_*(u)$.

3. En raisonnant de façon analogue avec $\widetilde{\widetilde{GL}}(I)$, on voit que $E_{1,i+1}(1)$ opère aussi trivialement sur l'image de $H_*(u)$.
4. Comme les matrices du type précédent, ainsi que $-1 \in GL_1(\mathbb{Z}) \subset GL(\mathbb{Z})$, qui opère aussi trivialement sur ladite image, engendrent $GL(\mathbb{Z})$, on voit que ce groupe opère trivialement sur l'image de $H_*(u)$.
5. On conclut en utilisant de nouveau le premier point de cette démonstration et l'endomorphisme
$$g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$$
du groupe $GL(\mathbb{Z})$ cette fois-ci.

$\square$

On remarque que la transposition induit un isomorphisme entre $\widetilde{\widetilde{GL}}(I)$ et $\widetilde{GL}(I^{op})^{op}$, de sorte qu'on peut se contenter, suivant [SW92], de traiter de $\widetilde{GL}(I)$.

Remarque 3.8. Les conditions de la proposition sont satisfaites par tout anneau unitaire (mais c'est non trivial) ; cela découle de résultats d'annulation dus à Betley.

3.3 Les autres étapes ; suggestion de découpage pour la suite du groupe de travail

Compte-tenu de ce qui précède, au moins si l'on se contente de l'implication du théorème 3.3 non traitée par [Wod89], il suffit de montrer que, si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre H-unitaire, alors l'inclusion $GL(A) \hookrightarrow \widetilde{GL}(A)$ induit un isomorphisme en homologie (on peut se contenter de l'homologie rationnelle — regarder la suite spectrale de Serre correspondante). Cela se fait de la manière suivante :

1. On montre que cette condition est équivalente au fait que l'inclusion d'algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(A) \hookrightarrow \widetilde{\mathfrak{gl}}(A)$ analogue induit un isomorphisme en homologie (d'algèbres de Lie). Pour cela, on utilise la théorie de Malcev qui compare, y compris du point de vue de l'homologie rationnelle, groupes nilpotents et algèbres de Lie nilpotentes (sur $\mathbb{Q}$) — cf. [Pic78]. Bien sûr, l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(A)$ et le groupe $GL(A)$ ne sont généralement pas nilpotents (cela peut toutefois arriver, si A est nilpotent au sens où $A^n = 0$ pour un $n \in \mathbb{N}$!) ; pour se ramener à une situation nilpotente, on utilise la construction de Volodin.
2. À partir du théorème de Loday-Quillen-Tsygan et de sa généralisation par Hanlon ([Han88]) aux algèbres H-unitaires, on interprète, pour une $\mathbb{Q}$-algèbre H-unitaire A, l'homologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(A)$ et d'une algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(A_1)$, où A_1 est une algèbre H-unitaire construite à partir de A de sorte que $\mathfrak{gl}(A_1)$ soit étroitement reliée à $\widetilde{\mathfrak{gl}}(A)$, en termes d'homologie cyclique.
3. À l'aide d'un théorème (pas très difficile) de Wodzicki établi dans [Wod89] (dont c'est le théorème 11.1), on identifie l'homologie cyclique de A_1 à partir de celle de A et l'on conclut.

(La première de ces trois étapes est de loin la plus longue.)

Le sens « facile », traité par Wodzicki seul dans [Wod89], repose entre autres sur [Goo86] et pourrait faire l'objet (en admettant ce travail profond de Goodwillie) d'un exposé (ou deux ?).

Voici des suggestions d'exposés pour la suite du groupe de travail ; certains sont optionnels, et l'ordre peut varier dans une certaine mesure, de nombreuses étapes étant indépendantes.

1. Définition et premières propriétés des algèbres H-unitaires ; rappels sur l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique, éventuellement, excision dans cette situation (un ou deux exposés) ;
2. (optionnel) d'autres résultats sur les algèbres H-unitaires : le théorème 11.1 de [Wod89], le sens « facile », traité par Wodzicki dans [Wod89], des équivalences des théorèmes 3.2 et 3.3 (un ou deux exposés, à coordonner avec les précédents).
3. (Optionnel) Le théorème de Loday-Quillen-Tsygan, généralisé aux algèbres H-unitaires (un ou deux exposés).
4. Propriétés de la construction de Volodin pour les groupes linéaires (§ 2 de [SW92] ; un exposé) ;
5. l'homologie des algèbres de Lie et la théorie de Malcev (un ou deux exposés) ;
6. la construction de Volodin pour les algèbres de Lie (un exposé).
7. Démonstration du résultat principal (un ou deux exposés, selon qu'on ne traite que le théorème 3.3 ou qu'on aborde aussi les petites difficultés supplémentaires à contourner pour le théorème 3.2).
8. (Optionnel) On pourrait aussi consacrer quelques séances à des propriétés supplémentaires abordées dans l'article (selon les souhaits).

Noter que, dans [Sus95], Suslin traite de l'excision en K-théorie algébrique entière (et aussi à coefficients — son travail inclut donc aussi celui de l'article [SW92] avec Wodzicki) par une approche beaucoup plus directe (pas de comparaison avec de l'homologie d'algèbre de Lie, ni d'utilisation de la construction de Volodin, ni de l'homologie de Hochschild ou cyclique). Sa méthode repose sur des considérations d'algèbre homologique assez générales. Signalons au moins ici le résultat principal de l'article de Suslin :

Théorème 3.9 (Suslin). *Un anneau I est excisif en K-théorie algébrique si et seulement si* $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}\ltimes I}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})=0$ *pour tout entier* $n>0$.

(Si I est une $\mathbb{Q}$-algèbre, on voit sans trop de difficulté que cette condition équivaut à dire que I est H-unitaire, mais ce n'est pas le cas en général.)

S'il y a des volontaires et le temps nécessaire, cela pourrait peut-être se traiter en quelques exposés, après les séances dédiées à l'article [SW92].

Comme autre possibilité d'exposés reliés, mais à simple titre culturel [6], voici quelques sujets classiques de K-théorie algébrique (ou de topologie algébrique pour le dernier) potentiellement abordables :

6. Ils sont surtout là pour faire joli, donner des idées pour des exposés dans un futur plus lointain, ou des idées de lecture aux participants peu familiers à la K-théorie algébrique ayant envie de l'apprendre.

1. l'équivalence des différentes constructions de la K-théorie algébrique (pour Volodin, suivre Suslin [Sus81] ; si l'on veut tout faire — construction Q, théorème de la complétion en groupe... — il y a énormément de travail) ;
2. l'invariance homotopique en K-théorie algébrique, d'après Quillen (cela nécessite la construction Q) ;
3. le calcul de la K-théorie des corps finis (Quillen [Qui72] ; on peut séparer les cas, indépendants, de la caractéristique des coefficients égale ou différente de celle du corps) ;
4. le fait que l'homologie rationnelle d'un H-espace commutatif est l'algèbre symétrique graduée sur son homotopie rationnelle.

Références

[Bas64] H. Bass – « K-theory and stable algebra », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1964), no. 22, p. 5–60.

[Cor06] G. Cortiñas – « The obstruction to excision in K-theory and in cyclic homology », *Invent. Math.* **164** (2006), no. 1, p. 143–173.

[GH06] T. Geisser & L. Hesselholt – « Bi-relative algebraic K-theory and topological cyclic homology », *Invent. Math.* **166** (2006), no. 2, p. 359–395.

[Goo85] T. G. Goodwillie – « On the general linear group and Hochschild homology », *Ann. of Math. (2)* **121** (1985), no. 2, p. 383–407.

[Goo86] — , « Relative algebraic K-theory and cyclic homology », *Ann. of Math. (2)* **124** (1986), no. 2, p. 347–402.

[Han88] P. Hanlon – « On the complete $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$-decomposition of the stable cohomology of $\mathrm{gl}_n(A)$ », *Trans. Amer. Math. Soc.* **308** (1988), no. 1, p. 209–225.

[KR00] H. Krause & C. M. Ringel (éds.) – *Infinite length modules*, Trends in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000, Invited lectures from the conference held in Bielefeld, September 7–11, 1998.

[Lod92] J.-L. Loday – « Excision en K-théorie algébrique, d'après A. Suslin et M. Wodzicki », *Astérisque* (1992), no. 206, p. Exp. No. 752, 4, 251–271, Séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92.

[McC01] J. McCleary – *A user's guide to spectral sequences*, second éd., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 58, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Mil71] J. Milnor – *Introduction to algebraic K-theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971, Annals of Mathematics Studies, No. 72.

[MS76] D. McDuff & G. Segal – « Homology fibrations and the "group-completion" theorem », *Invent. Math.* **31** (1975/76), no. 3, p. 279–284.

[Pic78] P. F. Pickel – « Rational cohomology of nilpotent groups and Lie algebras », *Comm. Algebra* **6** (1978), no. 4, p. 409–419.

[Qui72] D. Quillen – « On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field », *Ann. of Math. (2)* **96** (1972), p. 552–586.

[Qui73] — , « Higher algebraic K-theory. I », in *Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, Springer, Berlin, 1973, p. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341.

[Sus81] A. A. Suslin – « On the equivalence of K-theories », *Comm. Algebra* **9** (1981), no. 15, p. 1559–1566.

[Sus95] — , « Excision in integer algebraic K-theory », *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **208** (1995), no. Teor. Chisel, Algebra i Algebr. Geom., p. 290–317, Dedicated to Academician Igor′ Rostislavovich Shafarevich on the occasion of his seventieth birthday (Russian).

[SW92] A. A. Suslin & M. Wodzicki – « Excision in algebraic K-theory », *Ann. of Math. (2)* **136** (1992), no. 1, p. 51–122.

[Swa71] R. G. Swan – « Excision in algebraic K-theory », *J. Pure Appl. Algebra* **1** (1971), no. 3, p. 221–252.

[Wod89] M. Wodzicki – « Excision in cyclic homology and in rational algebraic K-theory », *Ann. of Math. (2)* **129** (1989), no. 3, p. 591–639.