Le théorème de Loday-Quillen-Tsygan pour les algèbres H-unitaires

ou : l'excision pour l'homologie des algèbres de Lie de matrices en caractéristique nulle

Notes d'exposés au groupe de travail de topologie algébrique Nantes/Angers

Aurélien DJAMENT

Avril 2013

Résumé

Loday-Quillen et Tsygan ont décrit l'homologie d'algèbre de Lie des matrices infinies sur une algèbre (associative) unitaire sur $\mathbb{Q}$ à partir de son homologie cyclique. Le résultat a été étendu par Hanlon aux algèbres H-unitaires (Hanlon donne en fait une formule pour toutes les $\mathbb{Q}$-algèbres associatives, qui fait intervenir l'homologie cyclique et l'homologie barre).

Ces notes donnent toutes les étapes de la démonstration, mais pas les détails (qui seront partiellement abordés dans les exposés oraux). Ceux-ci sont sans mystère, mais calculatoires. On utilise également, d'un point de vue plus conceptuel, des résultats classiques de théorie des invariants et sur les algèbres de Hopf.

Table des matières

Dans tout cet exposé, on se fixe un corps commutatif $\mathbb{k}$ de caractéristique nulle (au-dessus tous les produits tensoriels non explicités, etc., seront pris). Le terme $\mathbb{k}$-algèbre sera à comprendre au sens minimal : on ne fera a priori aucune hypothèse de commutativité, d'unitarité ni même d'associativité (car on considérera aussi des algèbres de Lie).

1 Rappels de définitions et énoncé du résultat principal

On rencontrera dans cet exposé les théories homologiques suivantes :

1. homologie d'une ($\Bbbk$-)algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à coefficients dans une représentation M (pour nous, il s'agira de la représentation triviale $\Bbbk$), qu'on notera $H_*^{Lie}(\mathfrak{g};M)$ ou simplement $H_*(\mathfrak{g};M)$. On peut la définir formellement comme foncteur dérivé, à partir des Tor usuels sur l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$; ici c'est souvent le complexe concret classique, de Chevalley-Eilenberg qu'on utilisera. Il prend la forme suivante (on ne spécifie que le cas $M = \Bbbk$) : $CE_n(\mathfrak{g}) = \Lambda^n(\mathfrak{g})$ (n-ème puissance extérieure, prise naturellement sur $\Bbbk$) avec la différentielle
$$\Lambda^{n+1}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \Lambda^{n-1}(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^2(\mathfrak{g}) \to \Lambda^{n-1}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \Lambda^n(\mathfrak{g})$$
composée du coproduit, suivi de l'identité tensorisée avec le crochet, suivie du produit.
2. L'homologie barre $H_*^{bar}(A)$ d'une ($\Bbbk$-)algèbre associative A. C'est l'homologie du complexe barre, égal en degré n à $A^{\otimes n+1}$ dont la différentielle $A^{\otimes n+1} \to A^{\otimes n}$ est la somme alternée des n morphismes du type $a_0 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto a_0 \otimes \dots \otimes a_{i-1} \otimes (a_i a_{i+1}) \otimes a_{i+2} \otimes \dots \otimes a_n$. On rappelle que A est dite H-unitaire lorsque cette homologie est nulle en tout degré (ce qui est vrai en particulier lorsque A est unitaire). Nous utiliserons également $HB_*(A)$, défini par $HB_0(A) = \Bbbk$ et $HB_n(A) = H_{n-1}^{bar}(A)$ pour $n > 0$.
3. L'homologie cyclique d'une ($\Bbbk$-)algèbre associative A. (Noter que la définition qu'on donne ici fonctionne parce que A est une $\mathbb{Q}$-algèbre, mais n'est pas la bonne dans le cas général — cf. [Lod98], chap. 2, par exemple, pour plus de détails.) On part du complexe de Hochschild donné en degré n par $A^{\otimes n+1}$, avec la différentielle
$$a_0 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto (a_0 a_1) \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n - \dots$$
$$+(-1)^{n+1} a_0 \otimes \dots a_{n-2} \otimes (a_{n-1} a_n) + (-1)^n (a_n a_0) \otimes a_1 \dots \otimes a_{n-1}$$
et l'on fait opérer le groupe cyclique $\mathbb{Z}/(n+1)$ par permutation signée des facteurs : on vérifie que la différentielle précédente passe aux coïnvariants, fournissant un complexe $\big((A^{\otimes n+1})_{\mathbb{Z}/(n+1)}\big)_{n\geq 0}$ dont l'homologie s'appelle homologie cyclique de A et se note $HC_*(A)$.

Théorème 1.1 (Loday-Quillen, (Feigin-)Tsygan, Hanlon). *Soit A une $\Bbbk$-algèbre associative H-unitaire. L'homologie $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A);\Bbbk)$ de la $\Bbbk$-algèbre de Lie des matrices carrées infinies presque nulles à coefficients dans A est naturellement isomorphe à l'algèbre symétrique (au sens gradué) sur l'homologie cyclique suspendue (i.e. décalée de 1 en degré) de A.*

Ce résultat a été d'abord établi pour les algèbres unitaires par Loday et Quillen dans [LQ83] et [LQ84]. Tsygan a obtenu en même temps et indépendamment, dans [Tsy83], un résultat essentiellement équivalent (mais je n'ai pas regardé son travail). La généralisation au cas H-unitaire a été démontrée indépendamment par Hanlon ([Han88]) et Feigin-Tsygan ([FT87] [1]), qui en effet démontrent davantage (un résultat pour toute algèbre associative) — nous en parlerons bientôt.

Pour préciser l'énoncé du théorème 1.1, nous avons besoin d'examiner les structures existant naturellement sur les homologies qui apparaissent.

Pour toute $\Bbbk$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, l'homologie $H_*(\mathfrak{g}) := H_*^{Lie}(\mathfrak{g};\Bbbk)$ est munie d'une structure naturelle de $\Bbbk$-cogèbre graduée coassociative, commutative (au sens gradué), coünitaire et connexe, dont le coproduit est induit par la diagonale :

$$H_*(\mathfrak{g}) \to H_*(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \simeq H_*(\mathfrak{g}) \otimes H_*(\mathfrak{g})$$

où le dernier isomorphisme provient de la formule de Künneth (tout cela fonctionne bien parce que $\Bbbk$ est un corps) et de l'isomorphisme naturel d'algèbres enveloppantes $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}) \simeq U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})$.

Soit A une algèbre associative. Pour tous entiers naturels i et j, on dispose par ailleurs d'un morphisme d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{gl}_i(A) \times \mathfrak{gl}_j(A) \to \mathfrak{gl}_{i+j}(A) \qquad (M, N) \mapsto M \oplus N$$

qui induit en homologie (via la formule de Künneth) un morphisme

$$H_*(\mathfrak{gl}_i(A)) \otimes H_*(\mathfrak{gl}_j(A)) \to H_*(\mathfrak{gl}_{i+j}(A)). \tag{1}$$

On a envie de prendre la colimite sur i et j de la façon usuelle pour en déduire un morphisme

$$H_*\big(\mathfrak{gl}_\infty(A)\big) \otimes H_*\big(\mathfrak{gl}_\infty(A)\big) \to H_*\big(\mathfrak{gl}_\infty(A)\big).$$

qui fasse de $H_*\big(\mathfrak{gl}_\infty(A)\big)$ une algèbre associative, commutative (au sens gradué) et unitaire. Quand cela marche, on obtient même une algèbre de Hopf (tout morphisme d'algèbres de Lie induit en homologie un morphisme de cogèbres, le coproduit précédemment défini étant naturel). Le problème est que cela ne marche en général pas (et ce pour la même raison que celle, analysée dans les exposés introductifs à l'excision en K-théorie algébrique, pour l'homologie des groupes linéaires sur des anneaux sans unité), d'abord parce que les morphismes (1) ne sont pas compatibles à la stabilisation relativement à i.

Pour que tout se passe comme on espère, on a besoin que l'action naturelle des groupes symétriques sur l'homologie des algèbres de Lie de matrices soit triviale. C'est vrai si l'algèbre A est unitaire, car $\mathfrak{gl}_i(A)$ contient alors les matrices de permutation, et la description de l'homologie d'algèbre de Lie comme foncteur dérivé implique aussitôt que l'action (d'algèbre de Lie — i.e. adjointe) d'un élément d'une algèbre de Lie sur elle-même induit le morphisme nul en homologie.

Dans le cas où A n'est pas unitaire, un moyen formel de rendre triviale l'action des matrices de permutation est de prendre les coïnvariants sous l'action du groupe $GL_\infty(\Bbbk)$ (pas de $GL_\infty(A)$, qui ne contient pas non plus de matrices de permutation !) de l'homologie $H_*\big(\mathfrak{gl}_\infty(A)\big)$. Ce que montrent en fait Loday et Quillen est le résultat suivant :

1. Il n'est pas si clair pour moi de retrouver dans ce très long article le cas non unitaire, dont Hanlon affirme qu'il s'y trouve, mais je n'ai fait que le feuilleter. Pour le cas unitaire, la méthode employée semble la même que celle de Loday-Quillen.

Théorème 1.2 (Loday-Quillen)**.** *Soit A une $\Bbbk$-algèbre associative. Le $\Bbbk$-espace vectoriel gradué des éléments primitifs de l'algèbre de Hopf graduée connexe (unitaire, coünitaire, commutative, associative, cocommutative, coassociative) $H_*\big(\mathfrak{gl}_\infty(A)\big)_{GL_\infty(\Bbbk)}$ est naturellement isomorphe à l'homologie cyclique de A suspendue.*

Le théorème de structure des algèbres de Hopf graduées connexes (commutatives, cocommutatives etc.) décrit par ailleurs $H_*\big(\mathfrak{gl}_\infty(A)\big)_{GL_\infty(\Bbbk)}$ comme algèbre symétrique graduée sur ses éléments primitifs.

Le théorème 1.1, connaissant le précédent, est équivalent au fait que, pour une algèbre associative H-unitaire A, l'action du groupe $GL_\infty(\Bbbk)$ sur l'homologie $H_*\big(\mathfrak{gl}_\infty(A)\big)$ est triviale (ce qui constitue un énoncé d'excision, au vu de la discussion des premiers exposés).

Nous déduirons le théorème 1 du théorème 1.2 et du suivant :

Théorème 1.3. *Soit A une $\Bbbk$-algèbre associative. Pour tout entier naturel i, le $H_*\big(\mathfrak{gl}_\infty(A)\big)_{GL_\infty(\Bbbk)}$-module gradué $\big(H_*\big(\mathfrak{gl}_\infty(A)\big)\otimes\mathfrak{gl}_\infty(\Bbbk)^{\otimes i}\big)_{GL_\infty(\Bbbk)}$ est naturellement isomorphe à*

$$H_*\big(\mathfrak{gl}_\infty(A)\big)_{GL_\infty(\Bbbk)}\otimes HB_*(A)^{\otimes i}[\Sigma_i].$$

2 Considérations de coïnvariants

Notons $\mathbf{S}(\Bbbk)$ la catégorie dont les objets sont les $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie et les morphismes sont donnés par

$$\mathbf{S}(\Bbbk)(U,V)=\{(f,g)\in\mathrm{Hom}_\Bbbk(U,V)\times\mathrm{Hom}_\Bbbk(V,U)\,|\,g\circ f=Id_U\}$$

(où $\mathrm{Hom}_\Bbbk(U,V)$ désigne le $\Bbbk$-espace vectoriel des applications ($\Bbbk$-)linéaires de U dans V), avec pour composition : $(f',g')\circ(f,g):=(f'\circ f,g\circ g')$. Notons également $\mathbf{S}(\Bbbk)-\mathbf{Mod}$ la catégorie des foncteurs de $\mathbf{S}(\Bbbk)$ vers les $\Bbbk$-espaces vectoriels. On dispose d'un foncteur $p:\mathbf{S}(\Bbbk)\to\mathcal{E}_\Bbbk^{op}\times\mathcal{E}_\Bbbk$, où $\mathcal{E}_\Bbbk$ désigne la catégorie des $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie, donné par $p(V)=(V,V)$ sur les objets et $p(f,g)=(g,f)$ sur les morphismes. On désigne par gl l'objet $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_\Bbbk}\circ p$ de $\mathbf{S}(\Bbbk)-\mathbf{Mod}$.

Plutôt que d'étudier directement l'homologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_\infty(A)$, où A est une algèbre associative, avec son action de $GL_\infty(\Bbbk)$, on étudie fonctoriellement l'homologie des algèbres de Lie $gl(V)\otimes A$, où V est un objet de $\mathcal{E}_\Bbbk$. De fait, le complexe de Chevalley-Eilenberg peut se voir comme un complexe (fonctoriel en l'algèbre A)

$$\cdots\to\Lambda^n(gl\otimes A)\to\Lambda^{n-1}(gl\otimes A)\to\cdots\tag{2}$$

d'objets de $\mathbf{S}(\Bbbk)-\mathbf{Mod}$ (noter que tous les foncteurs se factorisent par p, mais l'on ne peut pas voir ce complexe comme un complexe de bifoncteurs sur $\mathcal{E}_\Bbbk$ car les morphismes ne proviennent pas de morphismes de bifoncteurs).

Définition 2.1. Soient V un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie et W une $\Bbbk$-représentation de dimension finie du groupe linéaire $GL(V)$. On dit que W est *rationnelle* si le morphisme de groupes $GL(V)\to GL(W)$ associé à l'action de $GL(V)$ sur W est donné matriciellement, une fois choisies des bases de V

et W, par des fonctions rationnelles des coefficients de la matrice à la source (propriété qui ne dépend clairement pas du choix des bases).

Une représentation de dimension infinie de $GL(V)$ qui est colimite filtrante de sous-représentations de dimension finie rationnelles sera encore dite rationnelle.

Proposition 2.2. *Pour toute algèbre associative A et tout objet V de $\mathcal{E}_{\Bbbk}$, les termes et les espaces vectoriels d'homologie du complexe de foncteurs* (2) *évalué en V sont des représentations rationnelles de $GL(V)$.*

Le corollaire suivant peut soit se déduire de cette proposition, soit de la fonctorialité relative à $\mathbf{S}(\Bbbk)$ (les deux points de vue sont loin d'être indépendants, même s'ils ne sont pas équivalents).

Corollaire 2.3.
1. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\big(H_*\big(\mathfrak{gl}_\infty(A)\big) \otimes \mathfrak{gl}_\infty(\Bbbk)^{\otimes i}\big)_{GL_\infty(\Bbbk)}$ est naturellement isomorphe à l'homologie du complexe* (2) *tensorisé par $gl^{\otimes i}$ et auquel on a appliqué le foncteur $(-)_{GL_\infty(\Bbbk)}$.*
2. *L'action du groupe $GL_\infty(\Bbbk)$ sur $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))$ est triviale si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la projection canonique*

$$\big(H_*\big(\mathfrak{gl}_\infty(A)\big)\otimes\mathfrak{gl}_\infty(\Bbbk)^{\otimes i}\big)_{GL_\infty(\Bbbk)} \twoheadrightarrow H_*\big(\mathfrak{gl}_\infty(A)\big)_{GL_\infty(\Bbbk)}\otimes\big(\mathfrak{gl}_\infty(\Bbbk)^{\otimes i}\big)_{GL_\infty(\Bbbk)}$$

est un isomorphisme.

Le deuxième point de ce corollaire permet de voir (en utilisant un résultat classique de théorie des invariants rappelé ci-après) que le théorème 1.3 implique l'équivalence entre le caractère H-unitaire de A et la trivialité de l'action de $GL_\infty(\Bbbk)$ sur $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))$ et qu'il permet de déduire le théorème 1.1 du théorème 1.2.

Soit $\sigma \in \Sigma_n$; notons $S_1, \dots, S_r$ les supports (y compris ceux réduits à un élément) des cycles disjoints $C_1, \dots, C_r$ dont le produit est σ, et écrivons $C_i = (a_1^i \quad \dots \quad a_{l(i)}^i)$. On définit une application linéaire $t_\sigma : gl(V)^{\otimes n} \to \Bbbk$, où V est un objet de $\mathcal{E}_{\Bbbk}$, par

$$t_\sigma(M_1 \otimes \cdots \otimes M_n) = \prod_{i=1}^{r} Tr(M_{a_1^i} \dots M_{a_{l(i)}^i})$$

(la propriété de la trace $Tr(AB) = Tr(BA)$ montre que cette définition ne dépend pas du choix de l'élément a_1^i par lequel on a commencé à écrire le cycle C_i). On vérifie aussitôt que t_σ définit en fait une transformation naturelle $gl^{\otimes n} \to \Bbbk$ de foncteurs de $\mathbf{S}(\Bbbk) - \mathbf{Mod}$.

Par ailleurs, étant donnés des entiers i et j distincts compris entre 1 et n, on définit une fonction $\alpha_n(i,j) : \Sigma_{n-1} \to \Sigma_n$ de la façon suivante. Notons d'abord $\phi : \{1, \dots, n-1\} \to \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ l'unique bijection croissante. La permutation $\tau = \alpha_n(i,j)(\sigma)$ est définie par $\tau(l) = \phi\sigma\phi^{-1}(l)$ pour $l \notin \{i,j\}$, $\tau(i) = j$ et $\tau(j) = \phi\sigma\phi^{-1}(i)$. On remarque que $\alpha_n(i,j) : \Sigma_{n-1} \to \Sigma_n$ est une fonction injective dont l'image est le sous-ensemble $\Sigma_n^{i \to j}$ des permutations de Σ_n envoyant i sur j ; la bijection $\Sigma_n^{i \to j} \to \Sigma_{n-1}$ réciproque de $\alpha_n(i,j)$ sera notée $\beta_n(i,j)$.

Proposition 2.4. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Les différents morphismes t_σ, pour $\sigma \in \Sigma_n$, définissent un isomorphisme entre $\Bbbk[\Sigma_n]$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(\Bbbk)-\mathbf{Mod}}(gl^{\otimes n}, \Bbbk)$.*
2. *L'application linéaire $(gl(V)^{\otimes n})_{GL(V)} \to \Bbbk[\Sigma_n]$ qu'on en déduit par évaluation sur V est un isomorphisme si V est de dimension assez grande.*
3. *Soient i et j deux éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$ et $m_n(i,j) : gl^{\otimes n} \to gl^{\otimes n-1}$ le morphisme supprimant d'un tenseur son j-ème terme et multipliant à droite par celui-ci son i-ème terme. Pour V de dimension assez grande, le morphisme $\Bbbk[\Sigma_n] \to \Bbbk[\Sigma_{n-1}]$ qu'induit $m_n(i,j)$ sur V après prise des coïnvariants sous l'action de $GL(V)$ envoie une permutation sur son image par $\beta_n(i,j)(\sigma)$ si elle appartient à $\Sigma_n^{i\to j}$ et sur 0 sinon.*

Corollaire 2.5. *Soient $n > 0$ et $d \geq 0$ des entiers. Pour V de dimension assez grande, le n-ème terme du complexe (2) évalué en V, tensorisé par $gl(V)^{\otimes d}$ est naturellement isomorphe, après prise des coïnvariants sous l'action de $GL(V)$, à*

$$\big(\Bbbk[\Sigma_{n+d}] \otimes A^{\otimes n}\big)_{\Sigma_n}$$

où Σ_n opère par conjugaison sur Σ_{n+d} (où l'on plonge Σ_n dans Σ_{n+d} de manière usuelle) et par permutation des facteurs tordue par la signature *sur $A^{\otimes n}$.*

De plus, la différentielle du complexe induit le morphisme

$$\big(\Bbbk[\Sigma_{n+d}] \otimes A^{\otimes n}\big)_{\Sigma_n} \to \big(\Bbbk[\Sigma_{n+d-1}] \otimes A^{\otimes n-1}\big)_{\Sigma_{n-1}}$$

donné par

$$[\sigma\otimes(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)] \mapsto \sum_i \pm[\beta_{n+d}(i,\sigma(i))(\sigma)\otimes(a_1\otimes\cdots\otimes\widehat{a_{\sigma(i)}}\otimes\cdots\otimes(a_i a_{\sigma(i)})\otimes\cdots\otimes a_n)]$$

où la somme est prise sur les entiers $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(i) \leq n$; le signe est $(-1)^{i+\sigma(i)+1}$ si $i < \sigma(i)$ et $(-1)^{i+\sigma(i)}$ si $i > \sigma(i)$; les crochets indiquent l'image d'un élément de $\Bbbk[\Sigma_{n+d}] \otimes A^{\otimes n}$ ou $\Bbbk[\Sigma_{n+d-1}] \otimes A^{\otimes n-1}$ dans le quotient consistant à prendre les coïnvariants sous l'action du groupe symétrique correspondant.

3 Décomposition des complexes de coïnvariants et conclusion

Proposition 3.1. *Soient $d, n \in \mathbb{N}$ et A une algèbre associative. L'application linéaire*

$$\bigoplus_{i+j_1+\cdots+j_d=n} \big(\Bbbk[\Sigma_{i+d}] \otimes A^{\otimes i}\big)_{\Sigma_i} \otimes A^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A^{\otimes j_d}[\Sigma_d] \to \big(\Bbbk[\Sigma_{n+d}] \otimes A^{\otimes n}\big)_{\Sigma_n}$$

(où les actions des groupes symétriques sont celles explicitées dans le corollaire 2.5) donnée par

$$[\sigma\otimes(a_1\otimes\cdots\otimes a_i)]\otimes\big((a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_{i+j_1})\otimes\cdots\otimes(a_{i+j_1+\cdots+j_{d-1}+1}\otimes\cdots\otimes a_n)\big)\tau \mapsto [\rho\otimes(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)]$$

où les a_t sont des éléments de A, $\sigma \in \Sigma_{i+d}$, $\tau \in \Sigma_d$ et ρ est défini juste après, est un isomorphisme.

Écrivons

$$\tau = (s_1^1 \quad \dots \quad s_{l(1)}^1) \dots (s_1^r \quad \dots \quad s_{l(r)}^r)$$

la décomposition de τ en cycles disjoints (en écrivant également les cycles de support réduit à un élément ; on fait un choix *dans l'ordre dans lequel on écrit la liste des éléments des supports, par exemple, commencer par le plus petit élément), la permutation $\rho \in \Sigma_{n+d}$ est définie comme l'image par le morphisme usuel $\Sigma_{i+d} \times \Sigma_{n-i} \to \Sigma_{n+d}$ du couple formé de σ et du produit des cycles*

$$(s_1^1 \quad 1 \quad \dots \quad j_1 \quad s_2^1 \quad \dots \quad s_{l(1)}^1 \quad j_1 + \cdots + j_{l(1)-1} + 1 \quad \dots \quad j_1 + \cdots + j_{l(1)}),$$

$$(s_1^2 \quad \Big(\sum_{t \le l(1)} j_t\Big) + 1 \quad \dots \quad \Big(\sum_{t \le l(1)+1} j_t\Big) \quad s_2^2 \quad \dots$$

$$s_{l(2)}^2 \quad \Big(\sum_{t < l(1)+l(2)} j_t\Big) + 1 \quad \dots \quad \Big(\sum_{t \le l(1)+l(2)} j_t\Big)), \dots,$$

$$(s_1^r \quad \Big(\sum_{t \le l(1)+\cdots+l(r-1)}\Big) + 1 \quad \dots \quad \Big(\sum_{t \le l(1)+\cdots+l(r-1)+1}\Big) \quad s_2^r \quad \dots$$

$$s_{l(r)}^r \quad \Big(\sum_{t<d} j_t\Big) + 1 \quad \dots \quad \Big(\sum_{t \le d} j_t\Big)).$$

De surcroît, cet isomorphisme est compatible aux différentielles induites, où l'on munit $\big(\Bbbk[\Sigma_{\bullet+d}] \otimes A^{\otimes \bullet}\big)_{\Sigma_\bullet}$ de la différentielle explicitée dans le corollaire 2.5 et $A^{\otimes \bullet}$ de la différentielle barre (il faut accepter l'indice 0 dans les graduations).

Le théorème 1.3 se déduit immédiatement de cette proposition et du corollaire 2.5.

Pour établir le théorème 1.2, on montre le résultat suivant. Dans cet énoncé, on munit le complexe $\big(\Bbbk[\Sigma_\bullet] \otimes A^{\otimes \bullet}\big)_{\Sigma_\bullet}$ du corollaire 2.5 de la structure de cogèbre induite par celle du complexe de Chevalley-Eilenberg (qui induit la structure de cogèbre sur l'homologie d'algèbre de Lie et est donnée par la structure de cogèbre des puissances extérieures).

Proposition 3.2. *1. Le coproduit de la cogèbre graduée $\big(\Bbbk[\Sigma_\bullet] \otimes A^{\otimes \bullet}\big)_{\Sigma_\bullet}$ est donné par*

$$[\sigma \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)] \mapsto \sum_{(I,J)} \pm [\sigma_I \otimes a_I] \otimes [\sigma_J \otimes a_J]$$

où la somme est prise sur les couples de sous-ensembles I, J de $\{1, \dots, n\}$ stables par σ tels que $I \sqcup J = \{1, \dots, n\}$ et, si $i_1, \dots, i_r$ est la liste strictement croissante des éléments de I, on note $\sigma_I \in \Sigma_r$ la permutation induite par σ et $a_I = a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_r}$.

2. Ses éléments primitifs sont engendrés par $[c_n \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)]$ où c_n désigne le cycle $(1 \quad 2 \quad \dots \quad n)$.

Ensuite, il est facile de terminer la démonstration du théorème 1.2 : le complexe des primitifs de $\big(\Bbbk[\Sigma_\bullet] \otimes A^{\otimes \bullet}\big)_{\Sigma_\bullet}$ est donc donné, le commutant de c_n étant le groupe cyclique d'ordre n qu'il engendre, à $\big((A^{\otimes n})_{\mathbb{Z}/n}\big)_{n \ge 0}$, où le groupe cyclique opère par permutation signée sur $A^{\otimes n}$, avec une différentielle qui est exactement la différentielle du complexe cyclique d'après le corollaire 2.5 (il y a un décalage d'indice car on commence ici avec la 0-ème puissance tensorielle).

Références

[FT87] B. L. Feĭgin & B. L. Tsygan – « Additive K-theory », in *K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986)*, Lecture Notes in Math., vol. 1289, Springer, Berlin, 1987, p. 67–209.

[Han88] P. Hanlon – « On the complete $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$-decomposition of the stable cohomology of $\mathrm{gl}_n(A)$ », *Trans. Amer. Math. Soc.* **308** (1988), no. 1, p. 209–225.

[Lod98] J.-L. Loday – *Cyclic homology*, second éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 301, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Appendix E by María O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili.

[LQ83] J.-L. Loday & D. Quillen – « Homologie cyclique et homologie de l'algèbre de Lie des matrices », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **296** (1983), no. 6, p. 295–297.

[LQ84] — , « Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices », *Comment. Math. Helv.* **59** (1984), no. 4, p. 569–591.

[Tsy83] B. L. Tsygan – « Homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology », *Uspekhi Mat. Nauk* **38** (1983), no. 2(230), p. 217–218.