Théorème de De Rham simplicial et contraction de Dupont

Notes d'exposé du groupe de travail
Topologie Algébrique

(Nantes)

Salim RIVIERE

Février 2012

La référence principale pour cet exposé est [Get04].

$e_0, ..., e_n$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique 0.

Rappelons qu'un **ensemble simplicial** est la donnée d'un foncteur

$$\begin{array}{rcl} X_\bullet : \Delta^{op} & \to & Ens \\ \underline{\mathrm{n}} & \mapsto & X_n \end{array}$$

où Δ est la catégorie simpliciale dont les objets sont les ensembles finis ordonnés $\underline{\mathrm{n}} := \{0, \cdots, n\}$ et les morphismes sont les applications croissantes, et Ens est la catégories des ensembles. Une **algèbre différentielle graduée simpliciale** est définie de la même manière, en remplaçant la catégorie Ens par celle des algèbres différentielles graduées. La catégorie des ensembles simpliciaux sera notée $Sset$.

Le n-simplexe géométrique standard est le fermé Δ^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$\Delta^n := \{\underline{t} := \sum_{i=0}^{n} t_i e_i \ , \ \sum_i t_i = 1 \ , \ t_i \in [0,1]\}$$

Le notation $\Delta^n_\bullet$ désigne l'ensemble simplicial représentable $\mathrm{Hom}_\Delta(\bullet, \underline{\mathrm{n}})$. Les k-simplexes de $\Delta^n_\bullet$ est celui des applications croissantes de $\underline{\mathrm{k}}$ dans $\underline{\mathrm{n}}$.

1 Formes différentielles polynomiales simpliciales

Définition 1.0.1. ***L'algèbre des formes différentielles*** *est l'algèbre différentielle graduée commutative simpliciale $\Omega^*_\bullet$ dont les n-simplexes (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) sont les formes différentielles polynomiales sur le n-simplexe géométrique standard. En d'autre termes,*

$$\Omega^*_n := S^*V/_I$$

est le quotient de l'algèbre commutative différentielle graduée libre S^*V, où $V = (V^*, d^*)$ est l'espace vectoriel gradué défini par

$$V^0 = \mathrm{vect}_{\mathbb{K}}(t_0, \cdots, t_n) \quad , \quad V^1 = \mathrm{vect}_{\mathbb{K}}(dt_0, \cdots, dt_n) \quad , \quad V_k = \{0\} \quad \forall k \geqslant 2 \quad , \quad d^*t_i = dt_i \quad \forall i \in \underline{\mathrm{n}},$$

par l'idéal I engendré par les relations

$$1 - \sum_{i=0}^{n} t_i$$

et

$$\sum_{i=0}^{n} dt_i$$

Si $X_\bullet$ est un ensemble simplicial, l'algèbre différentielle graduée commutative des formes différentielles polynomiales sur $X_\bullet$, notée $\Omega^*(X_\bullet)$, est définie en degré k par

$$\Omega^k(X_\bullet) := sSet(X_\bullet, \Omega^k_\bullet)$$

Remarque 1.0.2.

1. *La structure simpliciale sur $\Omega^*_\bullet$ provient du fait que $\underline{n} \to \Delta^n$ est un espace cosimplicial qui envoie chaque morphisme $f \in \mathrm{Hom}_\Delta(\underline{m}, \underline{n})$ sur l'application affine*

$$\begin{array}{rcl} f : \Delta^{n-1} & \to & \Delta^n \\ \sum_k = 0^{n-1} t_k e_k & \mapsto & \sum_{j=0}^{n} \sum_{k \in f^{-1}(\{j\})} t_k e_j \end{array}$$

   En particulier la i-eme face simpliciale d_i : $\underline{n\text{-}1} \to \underline{n}$ est envoyée sur l'inclusion de la i-ème face géométrique

$$\begin{array}{rcl} d^i : \Delta^{n-1} & \to & \Delta^n \\ \sum_k = 0^{n-1} t_k e_k & \mapsto & t_0 e_0 + t_1 e_1 + \cdots + t_{i-1} e_{i-1} + t_i e_{i+1} + \cdots + t_{n-1} e_n \end{array}$$

   En post-composant par le foncteur Ω^*_{poly} des formes polynomiales, ces dernières induisent des faces $d_i := (d^i)^* : \Omega^*_n \to \Omega_{n-1}$ qui sont les opérations de tirage en arrière des formes par les inclusions de faces. Les dégénérescences s'obtiennent de manière analogue.

2. *Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\Omega^*(X_\bullet)$ peut s'interpréter comme l'algèbre des formes différentielles polynomiales sur la réalisation géométrique $|X_\bullet|$ de $X_\bullet$. Supposons que $|X_\bullet|$ est une variété[1]. Une k-forme différentielle ω sur $|X_\bullet|$ est dite* ***polynomiale*** *lorsque pour tout n-simplexe $x \in X_n$, le tiré en arrière $\sigma_x^*\omega$ de ω par le simplexe canonique $\sigma_x : \Delta^n \to \{x\} \times \Delta^n \to |X_\bullet|$ est une forme polynomiale sur Δ^n. Ainsi, à toute k-forme polynomiale sur $|X_\bullet|$ est associée une famille $\psi_\bullet(\omega) := (\psi_n(\omega))_{n \geqslant 0}$ d'applications $\psi_n(\omega) : X_n \to \Omega^k_n$ définies par $\psi_n(\omega)(x) := \sigma_x^*\omega$ pour tout x dans X_n. Pour voir que $\psi(\omega)$ est un morphisme d'ensembles présimpliciaux, il suffit de remarquer que comme*

$$\begin{tikzcd} \Delta^{n-1} \arrow[d, "d^i"'] \arrow[dr, "\sigma_{d^i x}"] & \\ \Delta^n \arrow[r, "\sigma_x"] & {|X_\bullet|} \end{tikzcd}$$

   commute pour tout n-simplexe $x \in X_n$ et pour tout i dans $\{0, \cdots, n\}$,

$$\psi_n(\omega)(d_i x) := \sigma^*_{d_i x}\omega = (d^i)^* \sigma_x^* \omega = d_i \psi(\omega)(x)$$

1. Dont la structure de varieté fait des simplexes canoniques de $|X_\bullet|$ des applications différentiables

La commutation aux dégénérescences s'obtient de manière analogue ce qui montre que $\psi(\omega)$ est un morphisme d'ensembles simpliciaux. Nous avons donc construit une correspondance $\psi : \Omega^k_{poly}(|X_\bullet|) \to \mathrm{Hom}_{Sset}(X_\bullet, \Omega^k_\bullet)$ qui est injective.

Définition 1.0.3. *Le sous-complexe simplicial des **formes élémentaires** $C^*_\bullet \subset \Omega^*_\bullet$ est celui engendré (comme complexe de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) par les formes élémentaires $\omega_{i_0,i_1,\cdots,i_k}$ définies par*

$$\omega_{i_0,i_1,\cdots,i_k} := k!\sum_{j=0}^{n}(-1)^j t_{i_j} dt_{i_0} dt_{i_1} \cdots \widehat{dt_{i_j}} \cdots dt_{i_k}$$

lorsque n et k parcourent $\mathbb{N}$, et $(i_0, \cdots, i_k)$ parcourt les $(k+1)$-uplets d'éléments de $\underline{n} = \{0, \cdots, n\}$.

Proposition 1.0.4. *Le complexe $C^*_\bullet$ est effectivement un sous-complexe simplicial de $\Omega^*_\bullet$.*

Démonstration. Admettons la partie simpliciale. Pour vérifier que C^*_n est stable par la différentielle de De Rham, il suffit de calculer l'image d'un générateur :

$$\begin{aligned}
d^*(\omega_{i_0\cdots,i_k}) =& k!\sum_{j=0}^{k}(-1)^j dt_{i_j} dt_{i_0} \cdots \widehat{dt_{i_j}} \cdots dt_{i_k}\\
=&(k+1)! dt_{i_0} \cdots dt_{i_k}\\
=&\sum_{i=0}^{n}(k+1)! t_i dt_{i_0} \cdots dt_{i_k}\\
=&\sum_{i=0}^{n}\omega_{i,i_0,\cdots,i_k} \;-\; (k+1)!\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1} t^{i_j}(\sum_{i=0}^{n} dt_i) dt_{i_0} \cdots \widehat{dt_{i_j}} \cdots dt_{i_k}\\
=&\sum_{i=0}^{n}\omega_{i,i_0,\cdots,i_k}
\end{aligned}$$

□

Remarque 1.0.5. *$\omega_{i_0,\cdots,i_k}$ est nulle dès lors que les i_p ne sont pas distincts deux à deux. De plus, si τ est une permutation du $(k+1)$-uplet $(i_0, \cdots, i_k)$,*

$$\omega_{\tau(i_0,\cdots,i_k)} = \mathrm{sgn}(\tau)\omega_{i_0,\cdots,i_k}$$

Définition 1.0.6. *Le **complexe simplicial** d'un ensemble simplicial $X_\bullet$, noté $C^*(X_\bullet)$, est le complexe de cochaînes défini en degré k par*

$$C^k(X_\bullet) := \mathrm{Hom}_{Sset}(X_\bullet, C^k_\bullet)$$

Rappelons qu'il existe un complexe simplicial (normalisé) usuel $C^*_{simp}(X_\bullet)$ associé à tout ensemble simplicial $X_\bullet$, défini par $C^k_{simp}(X_\bullet) := (\mathbb{K}X_k / \sum_{i\in\underline{k}} \mathbb{K}\sigma_i X_{k+1})^\vee$ et $d^k_{simp} := \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i d_i^\vee : C^k_{simp}(X_\bullet) \to C^{k+1}_{simp}(X_\bullet)$.

Proposition 1.0.7. *L'application d'intégration $I : C^*_\bullet \to C^*_{simp}(\Delta^\bullet_\bullet)$ définie par*

$$I(\omega) := \begin{pmatrix} \mathbb{K}\Delta^n_k / \sum_i \mathbb{K}s_i\Delta^n_k & \to & \mathbb{K} \\ \sigma & \mapsto & I_\sigma(\omega) := \int_\sigma \omega \end{pmatrix}$$

pour toute k-forme ω dans C^k_n, est un isomorphisme de complexes de cochaînes simpliciaux.

Démonstration. Commençons par préciser le sens de l'intégrale apparaissant dans la définition de I. À toute k-forme polynomiale $\omega := t_0^{\alpha_0} \cdots t_n^{\alpha_n} dt_{j_1} \cdots dt_{j_k}$ sur Δ^n et à tout k-simplexe $\sigma :=< e_{i_0}, \cdots, e_{i_k} >$ de Δ^n est associée l'intégrale

$$I_{i_0,\cdots,i_k}(\omega) := \int_{\sigma=<e_{i_0},\cdots e_{i_k}>} \omega := \int_{\Delta^k} \sigma^*\omega$$

où l'intégrale des k-formes sur le k-simplexe standard (qui correspond à l'intégrale Riemannienne usuelle si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Δ^k est l'unique courant $\int_{\Delta^k} : \Omega^k_k \to \mathbb{K}$ vérifiant

$$\int_{\Delta^k} t_1^{a_1} \cdots t_k^{a_k} dt_1 \cdots dt_k = \frac{a_1! \cdots a_k!}{(a_1 + \cdots + a_k + k)!} \quad \forall a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{N}$$

et l'application $\sigma^* : \Omega_n \to \Omega_k$ est le morphisme d'algèbres défini par

$$\sigma^*(t_i) = \begin{cases} t_j & \text{si } i = i_j \\ 0 & \text{si } i \notin \{i_0, \cdots, i_k\} \end{cases}$$

pour tout i dans $\underline{\mathrm{n}} := \{0, \cdots, n\}$.

Remarquons que la famille $\mathcal{F}$ constituée des $\omega_\sigma := \omega_{i_0,\cdots,i_k}$ lorsque $\sigma := (i_0, \ldots, i_k)$ parcourt tous les k-simplexes non dégénérés de $\Delta^n_\bullet$ (i.e les $(k+1)$-uplets $(i_0, \cdots, i_k)$ d'éléments de $\underline{\mathrm{n}}$ tels que $i_0 < i_1 < \cdots < i_k$) est une famille génératrice de C^k_n. D'autre part, le complexe des chaînes normalisées admet pour base la famille $\mathcal{F}'$ des classes de ces mêmes simplexes non dégénérés. Or il est facile de voir que pour tout k-simplexe non dégénéré $\sigma := (i_0, \cdots, i_k)$, $I_\sigma(\omega_{\sigma'}) = 0$ dès lors que $\sigma \neq \sigma'$ (en particulier lorsque σ' est dégénéré). De plus

$$\begin{aligned} I_\sigma(\omega_\sigma) =& k! \int_{\Delta^k} (t_0 dt_1 \cdots dt_k + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} t_j dt_0 dt_1 \cdots \widehat{dt_j} \cdots dt_k) \\ =& k!(\frac{1}{k!} - \frac{k}{(k+1)!} + \frac{k}{(k+1)!}) \\ =& 1 \end{aligned}$$

Ceci montre non seulement que $I(\omega_\sigma)$ reste bien définie modulo les simplexes dégénérés, mais également que l'image de la famille génératrice $\mathcal{F}$ n'est rien d'autre que la base de $C^k_{simp}(\Delta^n_\bullet)$ duale de $\mathcal{F}'$. Ceci implique que l'inégalité $\dim_{\mathbb{K}} C^n_k = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}F \leqslant \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}' = \dim_{\mathbb{K}} C^k_{simp}(\Delta^n_\bullet)$ est en fait une égalité, prouvant ainsi la bijectivité de I. □

Corollaire 1.0.8. *Les complexes de cochaînes $C^*(X_\bullet)$ et $C^*_{simp}(X_\bullet)$ sont isomorphes.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\mathrm{Hom}_{sSet}(X_\bullet, C^*_{simp}(\Delta^\bullet_\bullet)) \cong C^n_{simp}(X_\bullet)$ ce qui est fait dans [FHT01]. L'isomorphisme associe à un homomorphisme simplicial $f \in \mathrm{Hom}_{sSet}(X_\bullet, C^n_\bullet)$ la n-cochaîne simpliciale $\sigma \in X_n \mapsto f(\sigma)(Id_{\underline{\mathrm{n}}})$, où $Id_{\underline{\mathrm{n}}} \in \Delta^n_n$ est la classe fondamentale de Δ^n. □

2 Théorème de De Rham simplicial

Si $X_\bullet$ est un ensemble simplicial, $\bar{X}_n$ désigne le sous-ensemble de X_k constitué des simplexes non dégénérés.

Maintenant que le complexe des cochaînes simpliciales a été identifié au sous-complexe des formes polynomiales engendré par les formes élémentaires, définissons une projection associée à cette inclusion.

Définition 2.0.9. *Sous les notations de la section précédente, la projection $P_\bullet : \Omega^*_\bullet \to C^*_\bullet$ est le morphisme de complexes de cochaînes simpliciaux défini par*

$$P_n(\omega) := \sum_{\sigma \in \bar{\Delta}^n_k} I_\sigma(\omega)\omega_\sigma$$

pour toute k-forme ω sur Δ^n

Définition 2.0.10. *Soit i dans $\underline{n}$. L'application $\phi_i : [0,1] \times \Delta^n \to \Delta^n$ est définie par*

$$\phi_i(u, \underline{t}) := u\underline{t} + (1-u)e_i$$

L'homotopie $h^i_n : \Omega^*_n \to \Omega^{*-1}_n$ est le morphisme de complexes de cochaînes simpliciaux défini par

$$h^i_n(\omega) := \int_0^1 du\, \iota_{\frac{\partial}{\partial u}} \phi_i^* \omega\ .$$

Enfin, l'évaluation sur le i-ème sommet $\varepsilon^i_n : \Omega^*_n \to \mathbb{K}$ est donnée par

$$\varepsilon^i_n(\omega) := \begin{cases} \omega(e_i) & \textit{si } \omega \in \Omega^0_n, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 2.0.11. [Lemme de Poincaré] *h^i_n est une homotopie entre entre $\mathrm{Id}_{\Omega^*_n}$ et ε^i_n, i.e*

$$dh^i_n + h^i_n d = \mathrm{Id} - \varepsilon^i_n$$

De plus, en notant E_i le champ de vecteurs auquel ϕ_i est associée, qui vérifie $E_i(\underline{t}) := \underline{t} - e_i$,

$$h^i_n(\omega) = \int_0^1 u^{-1} du\, \phi_i^* \iota_{E_i} \omega \tag{1}$$

Démonstration. L'égalité est vraie dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il reste à voir que h^i_n est bien définie pour $\mathbb{K}$ arbitraire ce dont on se convainc en évaluant formellement h^i_n sur une forme polynomiale puis en évaluant le résultat sur des vecteurs tangents en remarquant que la fonction obtenue est un polynome en u et en les t_i à coefficients dans $\mathbb{K}$ et que son intégrale a algébriquement un sens (puisque $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$.)

Pour l'égalité (1), remarquons que pour toute forme ω sur Δ^n,

$$\iota_{\frac{\partial}{\partial u}} \phi_i^* \omega = \omega_{\phi_i}(\frac{\partial \phi_i}{\partial u}, T\phi_i -, \cdots, T\phi_i -)$$

Or

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial u}(u, \underline{\mathrm{t}}) = \underline{\mathrm{t}} - e_i = u^{-1} E_i(\phi_i(u, \underline{\mathrm{t}}))$$

donc

$$\iota_{\frac{\partial}{\partial u}} \phi_i^* \omega = u^{-1} \phi_i^* \iota_{E_i} \omega$$

□

Remarque 2.0.12. *En particulier, la valeur de ι_{E_i} est bien détérminée sur les formes élémentaires :*

$$\iota_{E_i}\omega_\sigma = \sum_{p=0}^{k}(-1)^{p-1}\delta_{i,\sigma(p)}\omega_{d_p\sigma} \tag{2}$$

pour tout k-simplexe non dégénéré $\sigma : \underline{k} \to \underline{n}$. En effet, $i \neq \sigma$:

$$\begin{aligned}\iota_{E_i}\omega_\sigma =&(k+1)!\sum_{j=0}^{k}(\sum_{p<j}(-1)^{j+p+1}t_{i_j}t_{i_p}dt_{i_0}\cdots\widehat{dt_{i_p}}\cdots\widehat{dt_{i_j}}\cdots dt_{i_k}\\ &+\sum_{p>j}(-1)^{j+p}t_{i_j}t_{i_p}dt_{i_0}\cdots\widehat{dt_{i_j}}\cdots\widehat{dt_{i_p}}\cdots dt_{i_k})\\ &=0\end{aligned}$$

Et dans le cas où $i = i_q$:

$$\begin{aligned}\iota_{E_i}\omega_\sigma =&(k+1)!(\sum_{j<q}(-1)^{j+q+1}t_{i_j}dt_{i_0}\cdots\widehat{dt_{i_j}}\cdots\widehat{dt_{i_q}}\cdots dt_{i_k}+\sum_{j>q}(-1)^{j+q}t_{i_j}dt_{i_0}\cdots\widehat{dt_{i_q}}\cdots\widehat{dt_{i_j}}\cdots dt_{i_k})\\ =&k(-1)^{q+1}\omega_{i_0,\cdots,\hat{i_q},\cdots,i_k}\end{aligned}$$

De la remarque précédente découle le lemme

Lemme 2.0.13. *Pour tout σ dans $\bar{\Delta}^n_k$:*

$$h^i\omega_\sigma = \sum_{p=0}^{k}(-1)^{p+1}\delta_{i,\sigma(p)}\omega_{d_p\sigma} \tag{3}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de cet exposé :

Théorème 2.0.14. [Getzler, thm 3.7] *La projection $P_\bullet : \Omega^*_\bullet \to C^*_\bullet$ définie précédemment fait de $C^*_\bullet$ un rétract par déformation de $\Omega^*_\bullet$. Plus précisément, l'application simpliciale $s_\bullet : \Omega^*_\bullet \to \Omega^{*+1}_\bullet$ définie par*

$$s_\bullet := \sum_{k\geqslant 0}\sum_{\sigma\in\bar{\Delta}^\bullet_k}\omega_\sigma h^\sigma_\bullet$$

*avec $h^\sigma_\bullet := h^{i_k}_\bullet h^{i_{k-1}}_\bullet\cdots h^{i_0}_\bullet$ pour tout k-simplexe $\sigma = (i_0,\cdots,i_k)$ dans $\Delta^\bullet_k$, est une **contraction**, i.e vérifie*

$$[s_\bullet, d] := s_\bullet d + ds_\bullet = \mathrm{Id}_{\Omega^*_\bullet} - P$$

Corollaire 2.0.15. [Thm de De Rham simplicial] *Pour tout ensemble simplicial $X_\bullet$, les complexes $\Omega^*(X_\bullet)$ et $C^*(X_\bullet)$ sont quasi-isomorphes.*

Démonstration du théorème. Commençons par établir le lemme technique

Lemme 2.0.16.

$$I_\sigma = (-1)^k\varepsilon^{\sigma(k)}h^{d_k\sigma}$$

Alors

$$\begin{aligned}
[d, s_n] = & \sum_{k\geqslant 0}\sum_{\sigma\in\Delta_k^n}\sum_{i=0}^{n}\omega_{i\sigma}h^\sigma \\
& + \sum_{k\geqslant 0}\sum_{\sigma\in\Delta_k^n}\omega_\sigma(h^\sigma d + (-1)^k dh^\sigma) \\
= & \sum_{k\geqslant 0}\sum_{\sigma\in\Delta_k^n}\sum_{i=0}^{n}\omega_{i\sigma}h^\sigma \\
& + \sum_{k\geqslant 0}\sum_{\sigma\in\Delta_k^n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\omega_\sigma h^{\sigma(k)}\cdots[h^{\sigma(j)}, d]\cdots h^{\sigma(0)} \\
= & \sum_{k\geqslant 0}\sum_{\sigma\in\Delta_k^n}\sum_{i=0}^{n}\omega_{i\sigma}h^\sigma \\
& + \sum_{k\geqslant 1}\sum_{\sigma\in\Delta_k^n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\omega_\sigma h^{\sigma(k)}\cdots\widehat{h^{\sigma(j)}}\cdots h^{\sigma(0)} \\
& + \sum_{i=0}^{n} t_i Id \\
& - \sum_{k\geqslant 0}\sum_{\sigma\in\Delta_k^n}(-1)^k\omega_\sigma\varepsilon^{\sigma(k)}\cdots h^{\sigma(0)}
\end{aligned}$$

Le dernier terme est $-P_n$ par le lemme. Le premier et le second se simplifient pour $k \geqslant 1$. Le troisième (qui provient de $k = 0$) est l'identité. □

Références

[FHT01] Yves Félix, Stephen Halperin, and Jean-Claude Thomas. *Rational homotopy theory*, volume 205. Springer Verlag, 2001.

[Get04] Ezra Getzler. Lie theory for nilpotent l-infinity algebras. *arXiv preprint math/0404003*, 2004.