Courant algébroids

(exposé au groupe de travail du jeudi 23/01/2014)

<u>Définition</u> Un <u>algébroïde de Courant</u> est la donnée d'un fibré vectoriel $E \to P$ avec une forme bilinéaire symétrique non-dég. $(\cdot,\cdot)$ le long des fibres, un crochet anti-sym. $[\cdot,\cdot]$ sur $\Gamma(E)$ et un morphisme de fibrés $\rho : E \to TP$ tels que :

(i) $\forall e_1, e_2, e_3 \in \Gamma(E)$: $\quad [[e_1,e_2],e_3] + \text{c.p.} = DT(e_1,e_2,e_3)$

(ii) $\forall e_1, e_2 \in \Gamma(E)$: $\quad \rho([e_1,e_2]) = [\rho e_1, \rho e_2]$

(iii) $\forall e_1, e_2 \in \Gamma(E)$, $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(P)$:

$$[e_1, fe_2] = f[e_1,e_2] + (\rho(e_1)f)e_2 - (e_1,e_2)Df$$

(iv) $\rho \circ D = 0$, i.e. $\forall f,g \in \mathcal{C}^\infty(P)$: $(Df, Dg) = 0$

(v) $\forall e, h_1, h_2 \in \Gamma(E)$:

$$\rho(e)(h_1,h_2) = ([e,h_1] + D(e,h_1), h_2) + (h_1, [e,h_2] + D(e,h_2))$$

où $T(e_1,e_2,e_3) \in \mathcal{C}^\infty(P)$ est défini par

$$T(e_1,e_2,e_3) = \frac{1}{3}([e_1,e_2],e_3) + \text{c.p.}$$

et $D : \mathcal{C}^\infty(P) \to \Gamma(E)$ par

$$D = \frac{1}{2}\beta^{-1}\rho^* d_0$$

où β est l'isomorphisme entre E et E^* donné par la forme bil., i.e.

$$(Df, e) = \frac{1}{2}\rho(e)f$$

Exemple le plus important : l'algébroïde de Courant standard

$E = TP \oplus T^*P$, $(\cdot,\cdot)$ = induite par la dualité

$\rho : E \longrightarrow TP$ la projection sur la $1^{ère}$ composante

$$[X+\alpha, Y+\beta] = [X,Y] + L_X\beta - L_Y\alpha + - \frac{1}{2} d(i_X\beta - i_Y\alpha)$$

En fait, on entrevoit sur cet exemple une manière générale de construction d'algébroïdes de Courant : on prend un algébroïde de Lie A (ici TP) et son dual A^* (ici T^*P) et on a une construction de double de Drinfeld qui rend $A \oplus A^*$ un algébroïde de Courant. (il faut compatibilité : d_* sur $\Gamma(\Lambda^* A)$, déduite de la structure d'algébroïde de A^*, doit être une dérivation du crochet de Schouten sur $\Gamma(\Lambda^* A)$ donné induite par le crochet de A).

motivation / origine de la définition : [T.J. Courant : Dirac Manifolds Trans AMS 319, 2 1990]

T. Courant (élève de Weinstein) a travaillé sur le problème comment un crochet de Poisson sur une variété P induit un crochet de Poisson sur une sous-variété Q de P.
Dirac a travaillé sur le problème comment il faut modifier un crochet de Poisson (sur une variété symplectique (P,Ω)) quand on est contraint à une sous-variété sympl. $Q \subset P$.
Courant propose un cadre unifié pour ce contexte.

<u>Définition</u> une structure <u>presque-Dirac</u> est un sous-fibré $L \subset TP \oplus T^*P$ qui est isotrope maximal par rapport à la forme

$$\langle X+\alpha, Y+\beta \rangle = \frac{1}{2}\left(\alpha(Y) + \beta(X)\right)$$

Ensuite Courant a cherché le crochet qui exprime qu'une telle structure est intégrable, i.e. donne lieu à un feuilletage singulier.
(au sens de Sussman)
↳ "il existe une sous-variété intégrale maximale en tout point"

Ce crochet est exactement le crochet de Courant.

<u>Def</u> : une <u>structure de Dirac</u> est donc un sous-fibré $L \subset TP \oplus T^*P$ isotrope maximal + fermé par rapport au crochet de Courant.

Ainsi l'algébroïde de Courant standard <u>n'est pas</u> un algébroïde de Lie, mais <u>contient</u> pleins d'algébroïdes de Lie.

<u>Exemples</u> : (1) le graphe de $B : T^*P \to TP$ associé à une structure de Poisson sur P définit une structure de Dirac $L = \text{graph}(B)$.

(2) une 2-forme fermée $\Omega : TP \to T^*P$ donne comme graphe une structure de Dirac.

Considérations algébriques

(1) formulation à l'aide du crochet de Dorfman :

mêmes données, mais le crochet satisfait

$$[\![e_1, [\![e_2, e_3]\!]]\!] = [\![[\![e_1, e_2]\!], e_3]\!] + [\![e_2, [\![e_1, e_3]\!]]\!]$$

(identité de Leibniz à gauche !)

et $[\![e_1, e_2]\!] + [\![e_2, e_1]\!] = 2\,D(e_1, e_2)$

La relation est : $[\![e_1, e_2]\!] = [e_1, e_2] + D(e_1, e_2)$
(entre les 2 crochets)

(2) Dans un Courant algébroïde de la forme $A \oplus A^*$, un opérateur antisymétrique $\tilde{I} : A \to A^*$ donne lieu à une structure de Dirac (son graphe !) $\Longleftrightarrow$ I solution de l'équation de Maurer-Cartan $dI + \frac{1}{2}[I, I] = 0$ pour le $I \in \Gamma(\Lambda^2 A^*)$ correspondant. (Liu-Weinstein-Xu 1997)

(3) (structure de L_∞-algèbre associée à un alg. de Courant)

<u>fait</u> : H algèbre de Lie, $(X_\bullet, d) \to H$ résolution de l'esp. vect. H
$\Longrightarrow$ $\exists$ structure de L_∞-algèbre sur $X_\bullet$ avec $d = l_1$.

Roytenberg-Weinstein (1998) en déduisent une structure de L_∞-algèbre sur

$$0 \longrightarrow \ker D \longrightarrow C^\infty(\;) \xrightarrow{D} \Gamma(E) \longrightarrow \underbrace{\Gamma(E)/\mathrm{im}\, D}_{=:H} \to 0$$

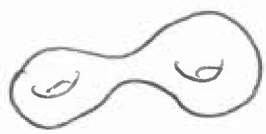
avec $D = l_1$.

(4) P. Ševera showed that one can add a closed 3-form to the Courant bracket $\rightarrow$ twisted Poisson structures as Dirac structures for the new bracket.

(Weinstein - Ševera 2001)

<u>Le lien avec les Σ-modèles en physique</u>

P. Ševera : Les algébroïdes de Courant apparaissent naturellement comme "groupe de symétries" d'un problème variationnel en 2-dimensions (P. Ševera : Some title containing ....)
2005 § 3.3

$\Sigma =$  $\xrightarrow{\ \phi\ }$ M target manifold

Lagrangien $L_\phi \in \Omega^2(\Sigma)$, $S_\phi = \int_\Sigma L_\phi$ action

problème variationnel : trouver ϕ qui minimise l'action !

on peut modifier S_ϕ par une forme exacte (symétries de jauge) : $S_\phi \rightsquigarrow \tilde{S}_\phi = \int_\Sigma L_\phi + \phi^* d\alpha$

$X \in \mathfrak{X}(M)$ est une <u>symétrie</u> : $\underset{\text{dérivée de Lie}}{L_X} L_\phi \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{\exp(tX)\circ\phi} = 0$

mais pour l'action modifiée : $L_X L_\phi = \phi^* d\alpha$, on a aussi

$$L_X S_\phi = \int_\Sigma L_X L_\phi = \int_\Sigma \phi^* \alpha = \int_{\partial\Sigma = \emptyset} \phi^*\alpha = 0$$

$\rightsquigarrow$ symétries sont de la forme (X, α), $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \Omega^1(M)$

Quand on calcule comment deux symétries commutent, on trouve le crochet de Dorfman !

le point de vue de la supergéométrie

(Roytenberg, on the structure of graded sympl. super mfds ....)
2002

on peut prendre plus généralement une tour de ↓ fibrations... (sur M_0)

Def : une NQ - variété M est un fibré vectoriel gradué, vu comme une supervariété, ensemble avec un champ de vecteurs Q de degré $+1$ tel que $[Q,Q]=0$.

(on peut demander de manière équivalente que $Map(\mathbb{R}^{0|1}, \mathbb{R}^{0|1})$ agit sur M tel que $(-1,0)$ agit comme opérateur de parité.)

Si M a d composantes graduées, on dit que M est de degré d.

deg $= 1$: une NQ - variété de degré 1 est un algébroïde de Lie (sur M_0)

Thm NQ variétés symplectiques avec une forme symplectique de degré 2 sont en relation biunivoque avec des algébroïdes de Courant.

N-var. + symplectique de degré 2 $\longleftrightarrow$ fibrés vect. E pseudo-euclidiens.

$\{x^i\}$ sur M_0 $\rightsquigarrow$ $\{q^i, \xi^a, p_i\}$ coord. locales sur M, $\{e^a\}$ base de sections de E

la forme sympl. $\Omega = dp_i\, dq^i + d\xi^a\, d\vartheta_a$

le champ Q : $\Theta = \xi^a A_a^i(q)\, p_i - \frac{1}{6} \phi_{abc}(q)\, \xi^a \xi^b \xi^c$

avec $A_a^i = \underset{\text{ancre}}{\rho}(e_a) \cdot x^i$ et $\phi_{abc} = \langle [\![e_a, e_b]\!], e_c \rangle$

Développements suivants

1. Intégration des algébroïdes de Courant

Il s'agit de trouver un 2-groupoïde local qui par un mécanisme dû à Ševera (§3.3 dans "Integration of exact Courant Algebroids" Ševera - Li-Bland 1101.3996) redonne l'algébroïde de Courant (standard).

3 réponses :
- Ševera - Li-Bland, loc. cit.
- Mehta - Tang, 1012.4103 et 1310.6587
- Sheng - Zhu, 1103.3920

Ensemble avec Camille Laurent-Gengoux, nous avons intégré l'algèbre de Leibniz des sections globales en un rack de Lie formel d'une part et un rack de Lie sur les groupes à 1-paramètre d'autre part.

2. Cohomologie des algébroïdes de Courant

Soit $E \to P$ un algébroïde de Courant. Soit

$$\Omega^k(E) = \{ \alpha \in \Gamma(\Lambda^k E) \mid \forall f \in \mathcal{C}^\infty(P,\mathbb{R}) : i_{Df}\alpha = 0 \}$$

On a sur $\Omega^\bullet(E)$ une différentielle qui ressemble à celle de Chevalley-Eilenberg, et cela définit donc un complexe, une cohomologie : la <u>cohomologie naïve</u> de l'algébroïde de Courant.

Pour l'algébroïde de Courant standard, il s'agit de la cohomologie de de Rham. Pour une algèbre de Lie (vu comme algébroïde sur un point), il s'agit de la cohomologie d'algèbres de Lie.

Roytenberg associe à un algébroïde de Courant une autre cohomologie, la <u>cohomologie standard</u>, en utilisant les fonctions sur une réalisation symplectique de la variété de Poisson graduée $E[1]$.

3. Géométrie complexe généralisée

Une structure complexe généralisée sur un espace vectoriel V est un endomorphisme J de $V \oplus V^*$ tel que

(1) $J^2 = -\mathrm{Id}$ (J est complexe)

(2) $J^* = -J$ (J est symplectique).

($\Leftrightarrow$ J orthogonal)

Une structure presque complexe généralisée sur une variété M est une telle structure sur chaque $T_xM \oplus T_x^*M$.

Une structure complexe généralisée sur M est une structure presque complexe généralisée qui est intégrable.

La condition d'intégrabilité fait intervenir le crochet de Courant.

but : traiter sur un pied d'égalité la géométrie complexe et la géométrie symplectique, comme il se doit en symétrie miroir.

référence : par exemple la thèse (2003) de Marco Gualtieri arXiv : 0401221