Cohomologie d'André-Quillen associée à une opérade

Aurélien DJAMENT

Janvier 2007

Le but de la cohomologie d'André-Quillen est de donner une « bonne » théorie cohomologique sur algèbres reliée à la notion de lissité. On présentera d'abord le cas classique des algèbres commutatives sur un anneau, avant de décrire la généralisation aux algèbres sur une opérade en modules sur un anneau commutatif. Pour l'article de Goerss-Hopkins [3] que ce groupe de travail vise à comprendre, c'est le cas des algèbres sur une opérade en comodules sur une algébroïde de Hopf qui est utilisé ; ce raffinement de la théorie d'André-Quillen présentée ici fera l'objet de l'exposé suivant.

Ce survol ne comporte pratiquement pas de démonstrations (on renvoie à la bibliographie pour cela) ; cependant, tous les résultats s'établissent par des méthodes standard d'algèbre homologique ou homotopique.

Table des matières

Dans tout cet exposé, k désigne un anneau (associatif, unitaire) *commutatif* et $\mathbf{Mod}_k$ la catégorie des k-modules.

Première partie
Cohomologie d'André-Quillen classique

Cette théorie cohomologique a été introduite indépendamment par André et Quillen en 1967.

Dans cette partie, toutes les algèbres considérées sont unitaires, associatives et *commutatives*. On note $\mathbf{Alg}_k$ la catégorie des k-algèbres.

1 Dérivations, différentielles et complexe cotangent

Si A est une k-algèbre et M un A-module, le k-module des *(k-)dérivations de A à valeurs dans M* est défini par

$$\mathrm{Der}_k(A, M) = \{f \in \hom_k(A, M) \mid \forall (x, y) \in A^2 \quad f(xy) = x.f(y) + y.f(x)\}. \tag{1}$$

Une autre description de $\mathrm{Der}_k(A, M)$ s'obtient comme suit : notons $A \ltimes M$ la k-algèbre dont le k-module sous-jacent est $A \oplus M$ et dont la multiplication est donnée par

$$(a, m).(a', m') = (aa', am' + a'm).$$

La projection $A \ltimes M \twoheadrightarrow A$ est un morphisme de $\mathbf{Alg}_k$, de sorte que $A \ltimes M$ est un objet de la catégorie $\mathbf{Alg}_k/A$ des k-algèbres au-dessus de A (ou A-augmentées). On a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Der}_k(A, M) \simeq \hom_{\mathbf{Alg}_k/A}(A, A \ltimes M).$$

Une troisième description des dérivations est fournie par les *différentielles de Kähler* de A sur k, qui sont par définition les éléments du A-module $\Omega_k(A)$ engendré par des symboles da pour chaque $a \in A$ soumis aux relations suivantes :

1. $\forall \lambda \in k \quad d(\lambda.1) = 0$;
2. $\forall (a, b) \in A^2 \quad d(a + b) = da + db$;
3. $\forall (a, b) \in A^2 \quad d(ab) = adb + bda$.

On a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Der}_k(A, M) \simeq \hom_A(\Omega_k(A), M).$$

Les différentielles de Kähler permettent de définir le *complexe cotangent* d'une k-algèbre A. Pour cela, on rappelle que le foncteur d'oubli de $\mathbf{Alg}_k$ vers la catégorie des ensembles possède un adjoint à gauche $k[-]$; la k-algèbre $k[X]$ est l'algèbre polynomiale construite sur X. Notons $\perp$ l'endofoncteur de $\mathbf{Alg}_k$ composé des deux foncteurs précédents : il s'insère dans une *comonade* (ou *cotriple*), i.e. on a des transformations naturelles $\perp \to id$ et $\perp \to \perp^2$, déduites formellement de l'adjonction, qui vérifient les conditions de coünité et de coassociativité évidentes.

On déduit de cette comonade une k-algèbre simpliciale A-augmentée $\perp_*(A)$ en posant $\perp_n (A) = \perp^{n+1}(A)$, en prenant pour faces $d_i : \perp^{n+1}(A) \to \perp^n(A)$ les morphismes déduits de la coünité $\perp \to id$ et pour dégénérescences $s_i : \perp^n(A) \to \perp^{n+1}(A)$ les morphismes déduits de la comultiplication $\perp \to \perp^2$ (cf. [6], § 8.6 pour les détails). L'augmentation $\perp_*(A) \to A$ se déduit de la coünité. Le *complexe cotangent* de A est par définition le A-module simplicial

$$\mathbb{L}\Omega_k(A) = A \underset{\perp_* A}{\otimes} \Omega_k(\perp_* A).$$

L'homologie du complexe de Moore associé à ce A-module simplicial sera l'homologie d'André-Quillen de A ; avant de l'étudier, nous allons donner le cadre général d'algèbre homotopique qui permet de travailler efficacement dans ce contexte.

2 La structure de catégorie de modèles sur les algèbres simpliciales ; définition de la cohomologie d'André-Quillen

Un théorème général de Quillen (cf. [4], § II.4) procure le résultat suivant.

Proposition 2.1. *On définit une structure de catégorie de modèles fermée (même simpliciale) sur la catégorie $s\mathbf{Alg}_k$ des k-algèbres simpliciales en prenant pour :*

- *équivalences faibles les morphismes dont le morphisme d'ensembles simpliciaux sous-jacent est une équivalence faible (i.e. qui induisent un isomorphisme entre π_*) ;*
- *fibrations les morphismes dont le morphisme de modules simpliciaux sous-jacent est une fibration, i.e. qui induisent un épimorphisme en degrés strictement positifs entre les complexes normalisés associés (on rappelle que le foncteur de normalisation N est défini par $N_i(M) = \bigcap_{i=0}^{n-1} ker\,(d_i : M_n \to M_{n-1})$) ;*
- *cofibrations les rétractes des morphismes libres, définis ci-dessous.*

Définition 2.2. Un morphisme $f : A \to B$ de $s\mathbf{Alg}_k$ est dit *libre* s'il existe une suite d'ensembles (X_n) telle que $f_n : A \to B_n$ soit isomorphe à l'inclusion canonique $A_n \hookrightarrow A_n[X_n]$ et que les dégénérescences $s_i : B_n \to B_{n+1}$ envoient X_n (assimilé à un sous-ensemble de $B_n \simeq A_n[X_n]$) dans X_{n+1}.

Remarque 2.3. – Tous les objets de $s\mathbf{Alg}_k$ sont fibrants.

- On déduit formellement de la proposition une structure de catégorie de modèles sur la catégorie $s\mathbf{Alg}_k/A$ des k-algèbres simpliciales au-dessus d'une algèbre A, dont les équivalences faibles (resp. fibrations, cofibrations) sont les morphismes qui vus dans $s\mathbf{Alg}_k$ sont des équivalences faibles (resp. fibrations, cofibrations) — cf. [1], § 1.1.

Foncteurs dérivés fondamentaux

On vérifie que l'on est dans la situation de foncteurs de Quillen, que l'on peut donc dériver de manière standard.

Précisément, soit A une k-algèbre. On a des isomorphismes canoniques

$$\hom_A(\Omega_k(B) \underset{B}{\otimes} A, M) \simeq \mathrm{Der}_k(B, M) \simeq \hom_{\mathbf{Alg}_k/A}(B, A \ltimes M) \tag{2}$$

pour toute k-algèbre A-augmentée B et tout A-module M (par abus, on note encore M l'image de M par le foncteur de restriction des scalaires $\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Mod}_B$ déduit de l'augmentation $B \to A$). En effet, on a (cf. section précédente)

$$\hom_A(\Omega_k(B) \underset{B}{\otimes} A, M) \simeq \hom_B(\Omega_k(B), M) \simeq \mathrm{Der}_k(B, M) \simeq \hom_{\mathbf{Alg}_k/B}(B, B \ltimes M) \simeq \hom_{\mathbf{Alg}_k/A}(B, A \ltimes M).$$

L'adjonction (2) s'étend aux catégories simpliciales : si B est une k-algèbre simpliciale au-dessus de A et M un A-module simplicial, on a encore un isomorphisme canonique

$$\hom_A(\Omega_k(B) \underset{B}{\otimes} A, M) \simeq \hom_{\mathbf{Alg}_k/A}(B, A \ltimes M).$$

De plus, il est évident que le foncteur $A \ltimes - : s\mathbf{Mod}_A \to s\mathbf{Alg}_k/A$ préserve fibrations et équivalences faibles. Par conséquent, on est dans la situation d'une adjonction de Quillen ; en particulier, le foncteur $B \mapsto \Omega_k(B) \underset{B}{\otimes} A : s\mathbf{Alg}_k/A \to s\mathbf{Mod}_A$ préserve les cofibrations et les cofibrations triviales. En dérivant à gauche ce foncteur, on obtient un foncteur $\mathbf{Ho}(s\mathbf{Alg}_k/A) \to \mathbf{Ho}(s\mathbf{Mod}_A)$.

Définition de la (co)homologie d'André-Quillen

L'homologie d'André-Quillende A est par définition l'image de A (assimilé à un objet simplicial constant) par le foncteur gradué

$$\mathbf{Ho}(s\mathbf{Alg}_k/A) \to \mathbf{Ho}(s\mathbf{Mod}_A) \xrightarrow{\pi_* = H_*} \mathbf{Mod}_A$$

composé du précédent et du foncteur canonique (cf. correspondance de Dold-Kan). Cette homologie est notée $D_*(A/k)$. Une généralisation à coefficients dans un A-module M s'obtient en composant au centre les flèches précédentes par le foncteur dérivé de la tensorisation par M. Ainsi, explicitement, $D_*(A/k, M) \simeq H_*(\Omega_k(X) \underset{X}{\otimes} M)$, où $X \to A$ est une résolution cofibrante de A (i.e. une fibration triviale avec X cofibrant).

La variante duale, que nous considérerons plutôt, s'obtient de façon analogue en remplaçant le foncteur $B \mapsto \Omega_k(B) \underset{B}{\otimes} M$ par $B \mapsto \hom_{s\mathbf{Mod}_A}(\Omega_k(B) \underset{A}{\otimes} A, M)$. On obtient ainsi la *cohomologie d'André-Quillen* de la k-algèbre A à coefficients dans le A-module M, définie par

$$D_k^*(A, M) \simeq H^*(\hom_A(\Omega_k(X) \underset{X}{\otimes} A, M)),$$

où $X \to A$ est une résolution cofibrante. Lorsque $M = A$, on omet la mention à ce module de coefficients.

Retour sur le complexe cotangent

L'augmentation $\perp_*(A) \to A$ du complexe cotangent de A est une résolution cofibrante fonctorielle de A. Ce fait est formel (cf. [6], § 8.6) — le caractère cofibrant de la k-algèbre simpliciale $\perp_*(A)$ est d'ailleurs tautologique.

3 Quelques propriétés de la cohomologie d'André-Quillen

Des propriétés formelles

Suites exactes longues

- Soient A une k-algèbre et $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte courte de A-modules. On en déduit une suite exacte longue

$$0 \to \mathrm{Der}_k(A, M') \to \mathrm{Der}_k(A, M) \to \mathrm{Der}_k(A, M'') \to D_k^1(A, M') \to \cdots$$

$$\cdots \to D_k^s(A, M') \to D_k^s(A, M) \to D_k^s(A, M'') \to D_k^{s+1}(A, M') \to \cdots$$

- Si $A \to B$ est un morphisme de k-algèbres, on a une suite exacte longue

$$0 \to \mathrm{Der}_A(B, M) \to \mathrm{Der}_k(B, M) \to \mathrm{Der}_k(A, M) \to D_k^1(A, M) \to \cdots$$

$$\cdots \to D_A^s(B, M) \to D_k^s(B, M) \to D_k^s(A, M) \to D_A^{s+1}(B, M) \to \cdots$$

  où M est un B-module.

Coefficients universels. Il existe une suite spectrale du premier quadrant

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_A^p(D_q(A/k), M) \Rightarrow D^{p+q}(A, M)$$

naturelle en la k-algèbre A et le A-module M.

En particulier, si A est un corps, $D_k^s(A, M) \simeq \hom_A(D_s(A/k), M)$.

Changement plat d'anneau. Soient A et B deux k-algèbres telles que $\mathrm{Tor}_k^i(A, B) = 0$ pour tout $i > 0$ (cas typique : A ou B est k-plate). Il existe un isomorphisme naturel $D_A^*(B \underset{k}{\otimes} A, M) \simeq D_k^*(B, M)$ pour tout $B \underset{k}{\otimes} A$-module M.
Ingrédient : si $X \to B$ est une résolution cofibrante de B comme k-algèbre, alors $X \underset{k}{\otimes} A \to B \underset{k}{\otimes} A$ est une résolution cofibrante de $B \underset{k}{\otimes} A$ comme A-algèbre.

Des exemples « concrets » fondamentaux

Cohomologie d'André-Quillen d'une algèbre symétrique. Soient N un k-module, $S_k(N)$ son algèbre symétrique (sur k) et M un $S_k(N)$-module. Il existe un isomorphisme gradué canonique

$$D_k^*(S_k(N), M) \simeq \mathrm{Ext}_k^*(N, M).$$

Ingrédients : soit $P \to N$ une résolution projective de N, i.e. une résolution cofibrante de N dans $s\mathbf{Mod}_k$. Alors $S_k(P) \to S_k(N)$ est une résolution cofibrante de la k-algèbre $S_k(N)$. De plus, $\mathrm{Der}_k(S_k(N), M) \simeq \hom_k(N, M)$, ou, de façon équivalente, $\Omega_k(S_k N) \simeq N \underset{k}{\otimes} S_k(N)$.

Interprétation de $D_k^1(A, M)$ en termes d'extensions. Comme ensemble, $D_k^1(A, M)$ est en bijection avec les classes d'équivalence d'extensions $M \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} A$, où :

1. la suite $0 \to M \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} A \to 0$ de k-modules est exacte ;
2. π est un morphisme d'algèbres ;
3. on a $\iota(M)^2 = 0$ dans E.

L'exemple typique d'une telle extension est $M \hookrightarrow A \ltimes M \to A$; on peut décrire explicitement la structure de A-module de $D_k^1(A, M)$ dans cette identification.

Ingrédients : en utilisant le complexe cotangent, on voit que $D_k^1(A, M)$ est l'homologie d'un complexe $M^A \to M^{k[A]} \to M^{k[k[A]]}$, grâce à l'isomorphisme canonique $\mathrm{Der}_k(k[A], M) \simeq M^A$.

Soit $s : A \to E$ une section *ensembliste* de π. Pour $a_1, \ldots, a_i \in A$, on a $\pi(s(a_1 \ldots a_i) - s(a_1) \ldots s(a_i)) = 0$, donc il existe un unique élément $\theta(a_1, \ldots, a_i)$ de M tel que $s(a_1 \ldots a_i) - s(a_1) \ldots s(a_i) = \iota(\theta(a_1, \ldots, a_i))$. En prolongeant θ par linéarité, on obtient une fonction $k[A] \to M$ dont on vérifie qu'elle est un cycle dans le complexe ci-dessus ; changer de section s modifie ce cycle par un bord. On obtient ainsi une flèche des classes d'extensions de A par M vers $D_k^1(A, M)$, qui est bijective.

Un cas particulier. Supposons que k est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel $K = k/\mathfrak{m}$. Il existe alors un isomorphisme canonique $D_k^1(K) \simeq (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$, où $(-)^*$ désigne le dual d'un K-espace vectoriel (on comprend ainsi l'apparition du terme « cotangent » dans la théorie).

Ingrédient : soient $K \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} K$ une extension comme ci-avant et a un antécédent de $1 \in K$ par π : pour $t \in \mathfrak{m}$, on a $ta \in \ker \pi$, et si $t, t' \in \mathfrak{m}$, alors $tt'a = 0$. Ainsi, $t \mapsto \iota^{-1}(ta)$ définit un morphisme $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to K$.

Deux remarques culturelles

- Si k est un corps de caractéristique nulle, alors D_k^* est facteur direct naturel de la cohomologie de Hochschild (cf. [6]).
- Il existe un analogue de la cohomologie d'André-Quillen pour les k-algèbres (unitaires associatives) non nécessairement commutatives (à coefficients dans un *bi*module). Pour une algèbre commutative, les deux notions de cohomologie d'André-Quillen commutative et associative sont reliées par une suite spectrale, qui est présentée et utilisée dans un cadre topologique dans [5].

  La généralisation opéradique exposée dans la deuxième partie de cet exposé d'introduction généralise les cas commutatif et associatif.

Deuxième partie
Cohomologie d'André-Quillen des algèbres sur une opérade

Dans cette partie, on suit essentiellement la deuxième section de [2].

4 Rappels sur le cadre algébrique

La catégorie monoïdale symétrique fermée de base sera toujours, dans cet exposé, la catégorie $\mathcal{C} = \mathbf{Mod}_k$ des modules sur l'anneau commutatif k, munie de $\underset{k}{\otimes}$. La difficulté supplémentaire qui apparaît dans le cas des comodules sur une algébroïde de Hopf réside dans le fait qu'il n'y a plus assez de projectifs dans ce cas, ce qui impose de modifier la structure de catégorie de modèles considérée sur les algèbres simpliciales, tandis que pour les algèbres sur une opérade en k-modules, tout fonctionne comme dans le cadre classique.

On rappelle que $\mathcal{C}_\Sigma$ désigne la catégorie des objets symétriques de $\mathcal{C}$, i.e. des suites $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où M_n est un $k[\Sigma_n]$-module à gauche ; le foncteur $\otimes_\Sigma : \mathcal{C}_\Sigma \times \mathcal{C}_\Sigma \to \mathcal{C}$ est donné par

$$S \otimes_\Sigma T = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S_n \underset{k[\Sigma_n]}{\otimes} T_n$$

(on identifie ici implicitement le $k[\Sigma_n]$-module à gauche S_n qui apparaît dans le produit tensoriel au $k[\Sigma_n]$-module à droite qui lui correspond canoniquement).

On dispose également d'un foncteur $\otimes : \mathcal{C}_\Sigma \times \mathcal{C}_\Sigma \to \mathcal{C}_\Sigma$ qui fait de $\mathcal{C}_\Sigma$ une catégorie monoïdale symétrique fermée, défini par

$$(S \otimes T)_n = \bigoplus_{p+q=n} k[\Sigma_n] \underset{k[\Sigma_p\times\Sigma_q]}{\otimes} (S_p \otimes T_q).$$

Le produit de composition $\circ : \mathcal{C}_\Sigma \times \mathcal{C}_\Sigma \to \mathcal{C}_\Sigma$ est défini par $(S \circ T)_q = S \otimes_\Sigma ((T^{\otimes n})_q)_n$. Une *opérade* T dans $\mathcal{C} = \mathbf{Mod}_k$ est un monoïde de la catégorie $\mathcal{C}_\Sigma$ pour la structure (non symétrique) définie par $\circ$.

Une T*-algèbre* est un k-module A qui est une algèbre sur la monade définie par T — concrètement, c'est la donnée d'un morphisme $T(A) \xrightarrow{\epsilon_A} A$ vérifiant les axiomes habituels. On rappelle que $T(A) = T \otimes_\Sigma (A^{\otimes n})_n$. Les T-algèbres forment une catégorie $\mathcal{A}^T$.

Exemple 4.1. Si $T = (k)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne l'opérade commutative, une T-algèbre est une k-algèbre commutative et $T(M) = S_k(M)$ pour tout k-module M. Cette traduction évidente de la suite de cet exposé redonne la théorie classique d'André-Quillen.

Si A est une telle algèbre, on s'intéresse aussi à la catégorie $\mathcal{M}_A^T$ des A-algèbres (sur T), i.e. des k-modules munis d'un morphisme $\epsilon_M : T(A, M) \to M$ satisfaisant aux conditions usuelles. On rappelle que $T(A, M) = T \otimes_\Sigma (k[\Sigma_n] \underset{k[\Sigma_{n-1}]}{\otimes} (A^{\otimes n-1} \underset{k}{\otimes} M))_{n\in\mathbb{N}}$.

Le foncteur d'oubli $\mathcal{M}_A^T \to \mathbf{Mod}_k$ possède un adjoint à gauche noté $M \mapsto A \otimes^T M$. Cela se vérifie à partir du cas libre $A = T(N)$, dans lequel on a $A \otimes^T M \simeq T(N, M)$. Le cas général s'en déduit à l'aide du diagramme coégalisateur réflexif canonique

$$(T \circ T)(A) \rightrightarrows T(A) \to A \tag{3}$$

déduit de la structure d'algèbre de A (cf. la résolution canonique $\perp_*(A) \to A$ donnée par le complexe cotangent dans le cas commutatif). Ce principe élémentaire est omniprésent pour toutes les constructions de base.

De façon analogue, si $A \to B$ est un morphisme de T-algèbres, le foncteur d'oubli (restriction des scalaires) $\mathcal{M}_B^T \to \mathcal{M}_A^T$ possède un adjoint à gauche noté $B \underset{A}{\otimes} -$ par analogie avec le cas usuel.

5 Dérivations et différentielles dans le cadre opéradique

Soient T une opérade en k-modules et A une T-algèbre, on note $\mathcal{A}^T/A$ la catégorie des T-algèbres au-dessus de A. On définit les dérivations de A dans un A-module M en étendant la construction $A \ltimes M$ utilisée dans le cas classique.

Pour cela, on commence par remarquer que $(A \oplus M)^{\otimes n}$ contient comme facteur direct naturel $A^{\otimes n} \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} A^{\otimes i-1} \otimes M \otimes A^{\otimes n-i}$, d'où un épimorphisme scindé naturel $T(A \oplus M) \twoheadrightarrow T(A) \oplus T(A, M)$.

Définition 5.1. On note $A \ltimes M$ l'objet de $\mathcal{A}^T/A$ dont le k-module sous-jacent est $A \oplus M$, dont la structure de T-algèbre est donnée par la multiplication

$$T(A \oplus M) \twoheadrightarrow T(A) \oplus T(A, M) \xrightarrow{\epsilon_A \oplus \epsilon_M} A \oplus M$$

et l'augmentation par la projection $A \oplus M \twoheadrightarrow A$.

On pose alors $\mathrm{Der}_T(A, M) = \hom_{\mathcal{A}^T/A}(A, A \ltimes M)$ et plus généralement, si B est un objet de $\mathcal{A}^T/A$,

$$\mathrm{Der}_T(B, M) = \hom_{\mathcal{A}^T/A}(B, A \ltimes M).$$

Remarque 5.2. On peut donner une définition directe des dérivations analogue à (1) — cf. [2], § 2 : une dérivation de A dans M correspond canoniquement à une application k-linéaire $d : A \to M$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\epsilon_A"'] & T(A, A) \arrow[r, "T(A,d)"] & T(A, M) \arrow[d, "\epsilon_M"] \\ A \arrow[rr, "d"] & & M \end{tikzcd}$$

commute, où $\Delta : T(A) \to T(A, A)$ désigne la diagonale (induite par la collection des diagonales $A^{\otimes n} \to (A^{\otimes n})^{\oplus n}$).

Proposition 5.3.

– *Pour toute T-algèbre A, il existe $\Omega_T(A) \in \mathcal{M}_A^T$ tel que*

$$\hom_{\mathcal{M}_A^T}(\Omega_T(A), M) \simeq \mathrm{Der}_T(A, M)$$

pour tout A-module M.

– *Soit $A \to B$ un morphisme de $\mathcal{A}^T$. La transformation naturelle* $\mathrm{Der}_T(B, -) \to \mathrm{Der}_T(A, -)$ *qu'il induit provient via l'isomorphisme précédent d'un morphisme de B-modules $B \underset{A}{\otimes} \Omega_T(A) \to \Omega_T(B)$.*

Ingrédients (pour le premier point) : on commence par le cas où A est une T-algèbre libre $T(N)$: on a explicitement $\Omega_T(TN) \simeq T(N) \otimes^T N \simeq T(N, N)$. Le cas général s'en déduit par le coégalisateur réflexif (3).

Le A-module $\Omega_T(A)$ est encore appelé module des *différentielles kählériennes* de A (sur T).

Comme dans le cas classique, le but de la (co)homologie d'André-Quillen est de dériver les foncteurs Ω_T ou Der_T.

6 La catégorie de modèles simpliciale et la cohomologie d'André-Quillen dans le cadre opéradique

Soit $T = (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une *opérade simpliciale* (en k-modules) ; si X est un k-module simplicial, on note $T(X)$ le k-module simplicial $(T_n(X_n))$. On a une notion d'*algèbre simpliciale sur T* : c'est un k-module simplicial X muni d'une flèche $T(X) \to X$ vérifiant les conditions usuelles. On note $s\mathcal{A}^T$ la catégorie des algèbres simpliciales sur T.

Pour $A \in s\mathcal{A}^T$, un A-module simplicial est un k-module simplicial M muni d'un morphisme $\epsilon : T(A, M) = (T_n(A_n, M_n)) \to M$ vérifiant les conditions usuelles. Les A-modules simpliciaux forment une catégorie notée $s\mathcal{M}_A^T$.
Variante augmentée : on rappelle qu'un objet simplicial augmenté est un objet simplial Z muni d'une flèche $d_0 : Z_0 \to Z_{-1}$ telle que les composées $d_0 d_0$ et $d_0 d_1 : Z_1 \to Z_{-1}$ coïncident. L'augmentation canonique d'un objet simplicial Z est donnée par $Z \to \pi_0(Z) = coeg(d_0, d_1 : Z_1 \to Z_0)$.

On définit comme précédemment les algèbres $X \to X_{-1}$ sur une opérade augmentée $T \to T_{-1}$. Si A est une algèbre sur une opérade simpliciale T, alors $A \to \pi_0(A)$ est canoniquement une algèbre sur l'opérade simpliciale augmentée $T \to \pi_0(T)$.

La proposition 2.1 se généralise sans changement à notre contexte opéradique :

Proposition 6.1. *On définit une structure de catégorie de modèles fermée (même simpliciale) sur la catégorie $s\mathcal{A}^T$ en prenant pour :*
- *équivalences faibles les morphismes dont le morphisme d'ensembles simpliciaux sous-jacent est une équivalence faible ;*
- *fibrations les morphismes dont le morphisme de k-modules simpliciaux sous-jacent est une fibration, i.e. qui induisent un épimorphisme en degrés strictement positifs entre les complexes normalisés associés ;*
- *cofibrations les rétractes des morphismes libres, définis ci-dessous.*

Définition 6.2. – Un objet X de $s\mathcal{A}^T$ est dit *libre* s'il est de la forme $T(M)$ avec

$$M_n \simeq \bigoplus_{[n] \twoheadrightarrow [m]} Z_m$$

où les Z_m sont des k-modules projectifs préservés par les dégénérescences.
- Un morphisme $f : A \to B$ de $s\mathcal{A}^T$ est dit *libre* s'il est isomorphe à un morphisme du type $A \to A \coprod X$, où X est un objet libre de $s\mathcal{A}^T$.

Remarque 6.3. – Comme dans le cas classique, tous les objets de $s\mathcal{A}^T$ sont fibrants, et on déduit de la proposition une structure de catégorie de modèles sur $s\mathcal{A}^T/A$ pour toute T-algèbre A.
- La catégorie $s\mathcal{M}_A^T$ des modules sur une T-algèbre A est une catégorie de modèle pour une structure analogue à celle des modules simpliciaux usuels.

Le *complexe cotangent* de $A \in s\mathcal{A}^T$ est défini par

$$\mathbb{L}\Omega_T(A) \simeq A \underset{X}{\otimes} \Omega_T(X),$$

où $X \to A$ est une résolution cofibrante. On peut donner une description explicite d'une telle résolution, analogue au cas classique, qui permet de retrouver le complexe cotangent déjà introduit lorsque T est l'opérade commutative.

L'**homologie d'André-Quillen** de A est définie par

$$D_*^T(A) = H_*(\mathbb{L}\Omega_T A)(\simeq \pi_*(\mathbb{L}\Omega_T A)).$$

Cohomologie. Supposons que $T \to T_{-1}$ est une opérade simpliciale augmentée, que $A \to A_{-1}$ est une T-algèbre et que M est un A_{-1}-module sur T_{-1}. M devient un A_n-module sur T_n, pour tout n, puis un X_n-module (où $X \to A$ est toujours une résolution cofibrante). La cohomologie d'André-Quillen de A sur T à coefficients dans M est définie par

$$D_T^*(A, M) = H^* \mathrm{Der}_T(X, M) = H^* \mathrm{hom}_{s\mathcal{M}_A^T}(\mathbb{L}\Omega_T A, M).$$

Comme dans le cas classique, ces définitions ne dépendent pas du choix de la résolution cofibrante à cause de l'adjonction de Quillen mettant en jeu Ω_T et $\ltimes$.

En pratique, on considère toujours le cas canonique $T_{-1} = \pi_0(T)$ et $A_{-1} = \pi_0(A)$.

Cas relatif. Soit $A \to X$ un morphisme de $s\mathcal{A}^T$ et M un $\pi_0(X)$-module sur $\pi_0(T)$. On définit

$$\mathrm{Der}_A(X,M) = \mathit{ker}\,(\mathrm{Der}_T(X,M) \to \mathrm{Der}_T(A,M))$$

et

$$\Omega_T(X/A) = \mathit{coker}\,(X \underset{A}{\otimes} \Omega_T(A) \to \Omega_T(X)),$$

de sorte que $\mathrm{Der}_A(X,M) \simeq \hom_{s\mathcal{M}_A^T}(\Omega_T(X/A), M)$.

Le complexe cotangent relatif est $\mathbb{L}\Omega_T(X/A) = X \underset{X_0}{\otimes} \Omega_T(X_0/A_0)$, où l'on s'est donné une résolution cofibrante $A_0 \to A$ et une factorisation de $A_0 \to A \to X$ en une cofibration $A_0 \to X_0$ suivie d'une fibration triviale $X_0 \to X$.

On pose enfin

$$D_*^T(X/A) = H_*(\mathbb{L}\Omega_T(X/A))$$

et

$$D_T^*(X/A,M) = H^*\hom_{s\mathcal{M}_X^T}(\mathbb{L}\Omega_T(X/A), M).$$

7 Propriétés

T désigne toujours une opérade simpliciale en k-modules.

Représentabilité

Proposition 7.1. *Soient A une T-algèbre et M un $\pi_0(A)$-module sur $\pi_0(T)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $K_A(M,n) \in s\mathcal{A}^T/A$ tel que*

$$[-, K_A(M,n)]_{s\mathcal{A}^T/A} \simeq D_T^n(-,M).$$

Démonstration. Soit $K(M,n)$ un Eilenberg-Mac Lane (simplicial et opéradique) « ordinaire », i.e. un objet de $s\mathcal{M}_A^T$ qui représente (dans la catégorie homotopique) $H^n(-,M)$. Explicitement, $K(M,n)$ est un A-module dont le complexe normalisé associé est concentré en degré n, où il est isomorphe à M.

On pose alors $K_A(M,n) = A \ltimes K(M,n)$: on a par adjonction de Quillen

$$[Y, K_A(M,n)]_{s\mathcal{A}^T/A} \simeq [\mathbb{L}\Omega_T(Y), K(M,n)]_{s\mathcal{M}_A^T} \simeq H^n(\mathbb{L}\Omega_T(Y), M) \simeq D_T^n(Y,M).$$

□

Suites exactes longues

Proposition 7.2. *Soient $A \in s\mathcal{A}^T$ et $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte courte de $\pi_0(A)$-modules sur $\pi_0(T)$. Il existe une suite exacte longue*

$$0 \to \mathrm{Der}_T(A,M') \to \mathrm{Der}_T(A,M) \to \mathrm{Der}_T(A,M'') \to D_T^1(A,M') \to \cdots$$

$$\cdots \to D_T^s(A,M') \to D_T^s(A,M) \to D_T^s(A,M'') \to D_T^{s+1}(A,M') \to \cdots$$

Proposition 7.3. *Soit $A \to B \to C$ une suite de morphismes de $s\mathcal{A}^T$. La suite*

$$C \underset{B}{\otimes} \mathbb{L}\Omega_T(B/A) \to \mathbb{L}\Omega_T(C/A) \to \mathbb{L}\Omega_T(C/B)$$

de $s\mathcal{M}_C^T$ qui lui est associée est une suite cofibre.

Corollaire 7.4. *Sous les mêmes hypothèses, si M est un $\pi_0(C)$-module sur $\pi_0(T)$, on a une suite exacte longue*

$$0 \to \mathrm{Der}_T(C/B, M) \to \mathrm{Der}_T(C/A, M) \to \mathrm{Der}_T(B/A, M) \to D^1_T(C/B, M) \to \cdots$$

$$\cdots \to D^s_T(C/B, M) \to D^s_T(C/A, M) \to D^s_T(B/A, M) \to D^{s+1}_T(C/B, M) \to \cdots$$

Proposition 7.5. *Soient A une T-algèbre et*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d] \\ C \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif cocartésien de $s\mathcal{A}^T/A$. On suppose que A est cofibrant (dans $s\mathcal{A}^T$), que B et X sont cofibrants dans $s\mathcal{A}^T/A$ et que j est une cofibration. On a alors une suite cofibre

$$Y \underset{B}{\otimes} \mathbb{L}\Omega_T(B/A) \to Y \underset{C}{\otimes} \mathbb{L}\Omega_T(C/A) \oplus Y \underset{X}{\otimes} \mathbb{L}\Omega_T(X/A) \to \mathbb{L}\Omega_T(Y/A)$$

dans $s\mathcal{M}^T_Y$.

Corollaire 7.6 (Suite exacte de Mayer-Vietoris)**.** *Sous les mêmes hypothèses, si M est un $\pi_0(Y)$-module sur $\pi_0(T)$, on a une suite exacte longue*

$$0 \to \mathrm{Der}_T(Y/A, M) \to \mathrm{Der}_T(X/A, M) \oplus \mathrm{Der}_T(C/A, M) \to \mathrm{Der}_T(B/A, M) \to D^1_T(Y/A, M) \to \cdots$$

$$\cdots \to D^s_T(Y/A, M) \to D^s_T(X/A, M) \oplus D^s_T(C/A, M) \to D^s_T(B/A, M) \to D^{s+1}_T(Y/A, M) \to \cdots$$

Références

[1] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical surveys and monographs **63**, Providence, RI, 2003.

[2] P. Goerss et M. Hopkins, *André-Quillen (co)homology for simplicial algebras over simplicial operads*. In *Une dégustation topologique [Topological morsels] : homotopy theory in the Swiss Alps (Arolla, 1999)*, 41–85, Contemp. Math., 265, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[3] P. Goerss et M. Hopkins, *Moduli spaces of commutative ring spectra*. In *Structured ring spectra, 151–200, London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 315, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[4] D. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Math. **43**, Springer Verlag, Berlin, 1967.

[5] C. Rezk, *Notes on the Hopkins-Miller theorem*. In *Homotopy theory via algebraic geometry and group representations (Evanston, IL, 1997)*, 313–366, Contemp. Math., 220, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998. 55N22 (55S99).

[6] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge studies in advanced mathematics **38**, Cambridge University Press, 1994.