Introduction aux catégories dérivées (notes d'exposé au groupe de travail de topologie algébrique Nantes-Angers)

Aurélien DJAMENT

16 octobre 2008

Il s'agit d'une introduction élémentaire et informelle aux catégories dérivées, qui ne constitue pas un résumé des prochaines séances du groupe de travail.

Table des matières

1 Les motivations originelles (cf. [Ver96], introduction)

L'idée que les foncteurs dérivés devraient naturellement s'épanouir dans un cadre catégorique plus vaste, où l'on dérive non seulement les foncteurs mais aussi les catégories abéliennes (ou même des catégories plus générales, par exemple *exactes*) remonte à Grothendieck et a été formalisée dans la thèse de Verdier ([Ver96]).

Plusieurs phénomènes bien connus d'algèbre homologique classique illustrent déjà que la restriction aux objets d'une catégorie abélienne et à leurs résolutions projectives ou injectives ne constitue pas un cadre suffisant pour une bonne approche conceptuelle :

1. l'hyperhomologie apparaît naturellement dans maintes situations (la plupart des suites spectrales algébriques sont des suites spectrales d'hyper-(co)homologie), d'où la pertinence d'une théorie qui prenne en compte aussi les complexes en tant que tels avec leurs résolutions ;
2. de nombreux points pourtant clairs conceptuellement dans les propriétés de suites spectrales sont très techniques et malcommodes à exprimer (et donc à démontrer...) dans le formalisme d'algèbre homologique usuel — par exemple, pour trois foncteurs composables convenables, décrire les dérivés de la composition globale à partir des dérivés de chacun des foncteurs, et comparer avec les compositions intermédiaires de deux foncteurs ;
3. dans certaines situations on dispose d'une "bonne" notion de foncteur dérivé à gauche sans qu'il existe suffisamment de projectifs.

Comme le souligne Verdier dans l'introduction de sa thèse, *les formules naïves et traditionnellement fausses deviennent vraies lorsqu'on travaille dans les catégories dérivées*. Ainsi, le dérivé total (i.e. entre catégories dérivées) à droite (ou à gauche) d'une composition de foncteurs est toujours canoniquement isomorphe à la composition des foncteurs dérivés (totaux), lorsque ces foncteurs sont définis, ce qui épargne toute considération de suite spectrale et rend transparentes les propriétés d'associativité pour une composition de trois foncteurs. Le prix à payer est évidemment certaines difficultés dans les constructions ou dans la manipulation des catégories dérivées (il suffit de dériver la catégorie des groupes abéliens pour voir apparaître certaines "pathologies" — cf. [Nee01]).

De surcroît, dès l'époque de Grothendieck, des problèmes particuliers ont justifié l'utilisation des catégories dérivées (notamment des questions de dualité en géométrie algébrique — cf. [Ver96], introduction). Depuis, l'intérêt pour les catégories dérivées s'est développé (notamment dans d'autres parties de l'algèbre comme la théorie des représentations) et la présentation s'est renouvelée depuis Verdier (par exemple avec l'introduction des *catégories différentielles graduées* — cf. l'article [Kel94] de Keller que nous allons d'abord étudier dans le groupe de travail).

2 Aperçu informel des définitions et constructions qu'on manipulera (cf. [Ver96], [Kel94]...)

(Les définitions précises seront données en détail dans les exposés suivants.)

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On note $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes de chaînes sur $\mathcal{A}$. Un *quasi-isomorphisme* (ou *homologisme*) est un morphisme de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ qui induit une équivalence entre les objets d'homologie. La *catégorie dérivée* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est la catégorie de fractions $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})[\mathbf{Qis}^{-1}]$ obtenue en inversant formellement les quasi-isomorphismes de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$. Cette définition n'est pas très concrète (il peut même y avoir des désagréments ensemblistes) et l'on utilise en général la catégorie "intermédiaire" $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ — la *catégorie homotopique* associée à $\mathcal{A}$ — obtenue en inversant formellement les équivalences d'homotopie. Les morphismes entre deux objets de cette catégorie sont simplement les classes d'homotopie de morphismes entre les complexes sous-jacents. La catégorie $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ apparaît comme une catégorie de fractions de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$.

On s'intéresse également parfois aux sous-catégories $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$, $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ et $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ obtenues en se restreignant aux complexes bornés inférieurement (i.e. nuls en degré assez petit), bornés supérieurement (i.e. nuls en degré assez grand) ou bornés. Ces catégories sont souvent plus "gentilles" que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ — cf. exposé sur la théorie de l'homotopie des complexes de chaînes (article [Dol60] de Dold). On peut utiliser la théorie des catégories de modèles et de leurs localisations pour aborder les catégories dérivées (cf. le même exposé ; pour des considérations plus récentes et poussées à ce sujet voir les travaux de Toën).

Dans l'article [Kel94], Keller expose le point de vue des *catégories différentielles graduées* (catégories DG) sur les catégories dérivées : ce sont les catégories enrichies sur les k-modules différentielles graduées (qui forment une catégorie $\mathbf{Dif}(k)$), où k est un anneau commutatif de base fixé. Les modules différentiels gradués sur une catégorie DG $\mathcal{A}$ sont les foncteurs DG de $\mathcal{A}$ vers $\mathbf{Dif}(k)$; ils forment eux-mêmes une catégorie DG.

Une variante de la notion de catégorie dérivée est celle de *catégorie stable* : si A est un anneau tel que les notions de A-module projectif et injectif coïncident (par exemple, l'algèbre d'un groupe fini sur un corps), la catégorie stable des A-modules est la catégorie ayant les mêmes objets et pour morphismes les applications linéaires modulo les applications linéaires se factorisant par un module projectif. En fait on peut définir cette notion dans un cadre plus général, qui est essentiellement équivalent au cadre des catégories dérivées des catégories DG (cf. [Kel94]).

3 Les catégories triangulées en algèbre et en topologie

Une des premières propriétés fondamentales des catégories $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ etc. est leur caractère *triangulé* (cf. [Ver96], [Nee01] ou [CPS88] pour la définition précise et les propriétés de base des catégories triangulées) : ce sont des catégories additives, munies d'une auto-équivalence Σ (induite par le décalage des complexes) et d'une classe de suites de morphismes du type $X \to Y \to Z \to \Sigma X$ (appelés *triangles distingués* ou simplement *triangles*) astreintes à vérifier certains axiomes. Les suites exactes longues d'homologie des foncteurs dérivés de l'algèbre homologique usuel s'obtiennent dans les catégories dérivées à partir de la notion suivante : un *foncteur homologique* d'une catégorie triangulée vers une catégorie abélienne est un foncteur qui envoie un triangle distingué sur une suite exacte. L'archétype du foncteur homologique est le foncteur envoyant un complexe sur son homologie en degré nul ; les foncteurs dérivés usuels (à droite ou à gauche) d'un foncteur s'obtiennent en prenant son dérivé *total*[1] et en appliquant ce foncteur (après décalage correspondant au degré).

On doit mentionner, dans ce groupe de travail de topologie algébrique, qu'une autre classe fondamentale de catégories triangulées apparaît naturellement en théorie de l'homotopie stable : la catégorie des *spectres* est une catégorie triangulée (dont les triangles proviennent des suites cofibres) ; on peut construire des catégories triangulées analogues à partir de catégories de modèles plus générales (cf. [Hov99]). Je ne parlerai pas ici du rôle de ces catégories en topologie ; signalons néanmoins trois points :

1. certains problèmes profonds, comme la classification des sous-catégories épaisses (au sens des catégories triangulées — cf. [Nee01]) ou des idéaux

[1] dont on rappelle qu'il n'est pas toujours défini !

(pour le produit contracté) de la catégorie homotopique des spectres (cf. travaux de Devinatz-Hopkins-Smith, Ravenel) possèdent des analogues (abordés dans par des méthodes tout à fait différentes) dans des contextes algébriques (cf. travaux de Benson-Iyengar-Krause pour la catégorie stable des représentations d'un groupe fini) ;

2. on peut donner une définition formelle des notions de catégorie triangulée algébrique et topologique et montrer que la catégorie homotopique des spectres n'est pas algébrique (cf. le papier [Sch08] de Schwede) ;
3. L'étude de catégories dérivées purement algébriques est utile en topologie (cf. partie du groupe de travail consacrée aux travaux d'Y. Félix et J.-C. Thomas).

4 Basculement et équivalences dérivées (cf. [Kel07])

On sait (cf. Freyd, Morita... et les rappels du groupe de travail sur les Γ-modules) qu'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ avec colimites est équivalente à la catégorie des A-modules à droite (A étant un anneau unitaire arbitraire) si et seulement s'il existe un générateur projectif de type fini P (la condition "de type fini" signifie que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$ commute aux sommes directes arbitraires) de $\mathcal{A}$ et un isomorphisme d'anneaux $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P) \simeq A$. Dans le cas où $\mathcal{A}$ est la catégorie des modules à gauche sur un anneau B, un tel objet P peut être vu comme un (B, A)-bimodule (l'action de A étant donnée par l'isomorphisme $A \simeq \mathrm{End}_B(P)$) et l'on retombe alors sur le théorème de Morita classique sur l'équivalence entre catégories de modules.

Dans plusieurs cas utiles (notamment en théorie des représentations), des anneaux se trouvent équivalents en un sens plus faible que celui de Morita, qui signifie l'équivalence des catégories de modules associées : les catégories dérivées des catégories de modules sur ces anneaux sont équivalentes — on parle alors d'*équivalence dérivée*.

Un cas particulièrement utile est celui des *équivalences par basculement*. On suppose dans l'énoncé qui suit que k est un corps commutatif.

Théorème 4.1 (Cf. [Hap87], [Kel07]...). *Soient A et B deux k-algèbres et M un (A, B)-bimodule. L'adjonction*[2]

$$- \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} M : \mathcal{D}(\mathbf{Mod} - A) \rightleftarrows \mathcal{D}(\mathbf{Mod} - B) : \mathbf{R}\mathrm{Hom}_B(M, -)$$

est une équivalence de catégories si et seulement les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. *comme B-module, M possède une résolution finie*

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

par des B-modules projectifs de type fini P_i ;

[2]On montre que tout foncteur additif entre deux catégories de modules admet des foncteurs dérivés totaux à gauche et à droite. Il est facile de voir qu'une adjonction se dérive en une adjonction, lorsque les foncteurs dérivés totaux existent.

2. *il existe une suite exacte longue de B-modules*

$$0 \to B \to T^0 \to T^1 \to \cdots \to T^m \to 0$$

où les T^i sont des facteurs directs de sommes directes finies de copies de M ;

3. *l'application structurale $A \to \mathrm{Hom}_B(M, M)$ est un isomorphisme et l'on a $\mathrm{Ext}^i_B(M, M) = 0$ pour $i > 0$.*

Si l'on peut prendre $n = m = 1$, on dit que M est un B-module *basculant* ("tilting module" en anglais). Dans le cas général, on parle de module basculant généralisé.

Toutes les équivalences (triangulées) entre catégories dérivées d'anneaux ne s'obtiennent pas à partir de *modules* basculants généralisés ; la notion de complexe basculant (généralisé) permet d'y remédier : elle donne un énoncé analogue au précédent qui décrit *toutes* les équivalences dérivées d'anneaux (résultat dû à Rickard rappelé dans [Kel95]).

Exemple 4.2 *(Gelfand-Ponomarev, rappelé dans [Kel95]).* Soient $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n$ (resp. $\mathcal{B}_n$) la catégorie d'ensemble d'objets $\{a, x_1, \ldots, x_n\}$ (resp. $\{b, x_1, \ldots, x_n\}$) telle que les ensembles de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_n}(x_i, a)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}_n}(b, x_i)$) et $\mathrm{End}_{\mathcal{A}_n}(t)$ (resp. $\mathrm{End}_{\mathcal{B}_n}(t)$), pour tout objet t, ont exactement un élément et que les autres ensembles de morphismes sont vides. La catégorie des foncteurs de $\mathcal{A}_n$ (resp. $\mathcal{B}_n$) vers les k-espaces vectoriels (c'est-à-dire la catégorie des représentations sur k du *carquois* associé à la catégorie source) est équivalente à la catégorie des modules à droite sur une k-algèbre A_n (resp. B_n) ; on obtient une équivalence par basculement

$$\mathcal{D}(\mathbf{Mod} - A_n) \rightleftarrows \mathcal{D}(\mathbf{Mod} - B_n)$$

en dérivant l'adjonction

$$F : \mathbf{Mod} - A_n \rightleftarrows \mathbf{Mod} - B_n : G$$

donnée en termes de foncteurs par $F(f)(x_i) = f(x_i)$, $F(f)(b) = Ker(\bigoplus_{i=1}^n f(x_i) \to f(b))$ (la flèche $F(f)(b) \to F(f)(x_i)$ étant la restriction de la projection) et de manière duale pour G.

5 Invariants dérivés (cf. [Kel95])

Un certain nombre d'invariants algébriques associés à un anneau A ne dépendent en fait que la catégorie abélienne $\mathbf{Mod} - A$ des A-modules à droite (à équivalence près) : ce sont des invariants de Morita ; d'autres ne dépendent même que de la catégorie dérivée $\mathcal{D}(\mathbf{Mod} - A)$ (à équivalence triangulée près) : ce sont des *invariants dérivés.* L'un des buts de l'étude des catégories dérivées peut ainsi consister à reconstruire l'anneau A à partir de $\mathcal{D}(\mathbf{Mod} - A)$ moyennant des hypothèses ou des données supplémentaires. En géométrie algébrique, il peut s'agir de reconstituer un schéma à partir de la catégorie dérivée des faisceaux quasi-cohérents (et d'hypothèses ou données supplémentaires) — cf. par exemple l'article [BO01], étudié dans un groupe de travail antérieur.

Nous énumérons ici rapidement des exemples d'invariants dérivés donnés dans [Kel95].

1. La notion d'anneau semi-simple est un invariant dérivé : A est semi-simple si et seulement si la catégorie triangulée $\mathcal{D}(\mathbf{Mod} - A)$ est *semi-simple* au sens où tout triangle se scinde.
2. **K-théorie :** toute équivalence dérivée $\mathcal{D}(\mathbf{Mod}-A) \simeq \mathcal{D}(\mathbf{Mod}-B)$ induit un isomorphisme de groupes abéliens $K_0(A) \simeq K_0(B)$. Cela provient de l'équivalence entre les deux assertions suivantes (sur laquelle nous reviendront probablement dans la suite du groupe de travail), pour un complexe C :
   (a) le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathbf{Mod}-A)}(C, -)$ commute aux sommes directes (arbitraires) ;
   (b) C est quasi-isomorphe à un complexe borné de A-modules projectifs de type fini.

   (On dit alors que C est *parfait.*)

   Le groupe de Grothendieck d'une catégorie triangulée (essentiellement) petite est le groupe engendré par les objets de la catégorie soumis aux relations $A + C = B$ pour tout triangle $A \to B \to C \to \Sigma A$; on vérifie aussitôt que le groupe de Grothendieck de la catégorie des complexes parfaits de A-modules s'identifie au groupe de Grothendieck $K_0(A)$ des A-modules projectifs de type fini. Cela démontre l'invariance dérivée de cette notion.

   Cette invariance s'étend à la K-théorie supérieure K_i *sous une forme restreinte* — il faut supposer que le complexe basculant fournissant l'équivalence est parfait.
3. Supposons que A et B sont des algèbres sur un corps commutatif (ou plus généralement des algèbres plates sur un anneau commutatif) k. Alors toute équivalence dérivée entre $\mathcal{D}(\mathbf{Mod} - A)$ et $\mathcal{D}(\mathbf{Mod} - B)$ induit un isomorphisme de k-algèbres graduées entre les cohomologies de Hochschild $HH^*(A; A)$ et $HH^*(B; B)$. Cela provient de la description des équivalences dérivées et de l'isomorphisme $HH^*(A; A) \simeq \mathrm{Ext}^*_{A^e}(A, A)$ (où $A^e = A \underset{k}{\otimes} A^{op}$).
4. Le résultat vaut également pour la (co)homologie cyclique, mais est plus difficile à démontrer.

6 Catégories dérivées et suites spectrales : un exemple (cf. [Kel07], § 7)

On termine cette introduction en donnant deux exemples tirés de [Kel07] de suites spectrales qui s'interprètent très naturellement dans un contexte général de catégories dérivées (on utilise pour cela la notion de *t-structure* d'une catégorie triangulée, qui permet d'obtenir des stratifications analogues à des décompositions cellulaires). Elles généralisent dans le cadre d'équivalences dérivées des isomorphismes déduits d'équivalences de catégories de modules.

1. **Basculement :** soient A et B des algèbres sur un corps commutatif k et T un (A, B)-bimodule basculant généralisé, comme dans le théorème 4.1. Pour tout A-module à droite M, il existe une suite spectrale naturelle

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_B(T, \mathrm{Tor}^A_{-q}(M, T)) \Rightarrow M$$

qui s'effondre à la page $n+1$ — i.e. à la deuxième page s'il y a basculement au sens ordinaire.

On a de même une suite spectrale naturelle

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Tor}_{-p}^{A}(\mathrm{Ext}_B^q(T, N), T) \Rightarrow N$$

en le B-module à droite N.

2. **Dualité :** soit A un anneau commutatif noethérien et *régulier*, i.e. de dimension homologique finie. On dispose d'une équivalence dérivée

$$D = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(-, A) : \mathbf{D}^b(\mathbf{mod} - A) \xrightarrow{\simeq} (\mathbf{D}^b(\mathbf{mod} - A))^{op}.$$

(où $\mathbf{mod} - A$ désigne la catégorie des A-modules de type fini), à l'aide de laquelle on peut obtenir une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_A^p(\mathrm{Ext}_A^{-q}(M, A), A) \Rightarrow M$$

naturelle en le A-module de type fini M.

Références

[BO01] A. Bondal & D. Orlov – « Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences », *Compositio Math.* **125** (2001), no. 3, p. 327–344.

[CPS88] E. Cline, B. Parshall & L. Scott – « Finite-dimensional algebras and highest weight categories », *J. Reine Angew. Math.* **391** (1988), p. 85–99.

[Dol60] A. Dold – « Zur Homotopietheorie der Kettenkomplexe », *Math. Ann.* **140** (1960), p. 278–298.

[Hap87] D. Happel – « On the derived category of a finite-dimensional algebra », *Comment. Math. Helv.* **62** (1987), no. 3, p. 339–389.

[Hov99] M. Hovey – *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[Kel94] B. Keller – « Deriving DG categories », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **27** (1994), no. 1, p. 63–102.

[Kel95] — , « Basculement et homologie cyclique », (1995), disponible sur http ://people.math.jussieu.fr/~keller/publ/index.html.

[Kel07] — , « Derived categories and tilting », (2007), disponible sur http ://people.math.jussieu.fr/~keller/publ/index.html.

[Nee01] A. Neeman – *Triangulated categories*, Annals of Mathematics Studies, vol. 148, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[Sch08] S. Schwede – « Algebraic versus topological triangulated categories », (2008), arXiv :0807.2592.

[Ver96] J.-L. Verdier – « Des catégories dérivées des catégories abéliennes », *Astérisque* (1996), no. 239, p. xii+253 pp. (1997), With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis.