Outils algébriques pour le calcul de la cohomologie elliptique du classifiant d'un groupe fini

Notes d'exposé du groupe de travail
Cohomologie elliptique

(Nantes, dans le cadre du GDR 2875)

Aurélien DJAMENT

décembre 2010

Résumé

On présente dans cet exposé quelques outils algébriques pour le calcul de la cohomologie elliptique du classifiant d'un groupe fini ; ils reposent pratiquement seulement sur le fait que la cohomologie elliptique est une théorie cohomologique multiplicative possédant une orientation complexe (et sur la valeur de cette théorie sur le point). On suit essentiellement pour cela le chapitre 6 de l'ouvrage [Tho99], sans entrer dans le détail des arguments calculatoires.

Comme pour la cohomologie ordinaire, l'aspect fondamental réside dans la structure de foncteur de Mackey, qui permet, dans les cas les plus favorables, de ramener le calcul sur un groupe fini à celui de ses sous-groupes de Sylow voire de sous-groupes abéliens (pour lesquels le calcul de la cohomologie se déduit de celle du point grâce à l'orientation complexe) par des arguments de théorie des groupes.

L'aspect sur lequel se contentre [Tho99] est l'annulation de la cohomologie en degrés impairs, qui intéresse l'auteur pour des considérations de complétion.

NB : le contenu et l'ordre exacts des notes ne coïncident pas forcément avec ceux de l'exposé oral.

Table des matières

1 Foncteurs de Mackey et de Green **2**

2 Cas d'une théorie cohomologique généralisée **4**
2.1 Lemmes de topologie 4
2.2 Démonstration du résultat principal et premières conséquences . 6

3 Quelques outils formels supplémentaires **9**

4 Un peu de zoologie **9**

1 Foncteurs de Mackey et de Green

La possibilité de mener des calculs élaborés de cohomologie généralisée de classifiants de groupes finis, alors que les méthodes directes sont généralement désespérées, repose sur la richesse des structures auxquelles donne lieu cette situation. Celle-ci se formalise avant tout à l'aide des notions de foncteurs de Mackey et de Green, dont on rappelle maintenant les définitions. On s'est servi de [Tho99] mais aussi de [TW95] à ce propos (il existe bien sûr plein d'autres bonnes références).

La définition la plus concrète est la suivante :

Définition 1.1. Un *foncteur de Mackey* sur un groupe fini G à valeurs dans une catégorie additive $\mathcal{A}$ est la donnée d'une fonction M de l'ensemble $\mathcal{G}(G)$ des sous-groupes de G vers les objets de $\mathcal{A}$ munie des structures suivantes :

1. pour tous $H \in \mathcal{G}(G)$ et $g \in G$, d'un morphisme $c_g^H : M(H) \to M(H^g)$ (l'exposant H sera souvent omis) dit de *conjugaison*, où $H^g = g^{-1}Hg$;
2. pour $K \subset H \in \mathcal{G}(G)$, de morphismes $R_K^H : M(H) \to M(K)$ et $I_K^H : M(K) \to M(H)$, dits respectivement de restriction et d'induction (ou de transfert)

vérifiant les propriétés de compatibilité suivantes :

1. c_h, R_H^H et I_H^H sont l'identité de $M(H)$ pour tous $H \in \mathcal{G}(G)$ et $h \in H$;
2. pour $L \subset K \subset H \in \mathcal{G}(G)$, $R_L^K R_K^H = R_L^H$ et $I_K^H I_L^K = I_L^H$;
3. $c_{gh}^H = c_h^H c_g^H$ pour tous $H \in \mathcal{G}(G)$ et $g, h \in G$;
4. pour tous $K \subset H \in \mathcal{G}(G)$ et $g \in G$, $c_g^K R_K^H = R_{K^g}^{H^g} c_g^H$ et $c_g^H I_K^H = I_{K^g}^{H^g} c_g^K$;
5. (formule des doubles classes) pour $L, K \subset H \in \mathcal{G}(G)$

$$R_L^H I_K^H = \sum_{KhL \in K\backslash H/L} I_{L\cap K^h}^L R_{L\cap K^h}^{K^h} c_h^K$$

   (les propriétés précédentes impliquent que le terme général dépend bien uniquement de KhL).

On a une notion évidente de morphisme (ou transformation naturelle) de foncteurs de Mackey (sur G à valeurs dans $\mathcal{A}$).

Il existe bien sûr des manières plus conceptuelles d'introduire cette notion (voir par exemple [TW95], 2) : certains des axiomes expriment par exemple qu'induction et restriction définissent des foncteurs respectivement covariant et contravariant de l'ensemble ordonné $\mathcal{G}(G)$ vers $\mathcal{A}$; l'introduction des conjugaisons peut se traduire en considérant $\mathcal{G}(G)$ comme une catégorie avec davantage de morphismes (précisément, en prenant pour morphismes $H \to K$ les fonctions G-équivariantes $G/H \to G/K$), tandis que la condition de compatibilité la moins évidente, celle de la formule des doubles classes, peut s'exprimer à l'aide d'une construction catégorique générale due à Bénabou ou Burnside.

On donne maintenant l'une de ces présentations catégoriques, due à Dress :

Proposition 1.2. *La catégorie des foncteurs de Mackey sur G à valeurs dans $\mathcal{A}$ est équivalente à la catégorie des bifoncteurs additifs sur la catégorie $G-$***ens** *des G-ensembles finis, c'est-à-dire des couples (M_*, M^*) formés d'un foncteur covariant M_* et d'un foncteur contravariant M^* de $G-$***ens** *vers $\mathcal{A}$ qui coïncident* *sur les objets (on notera donc simplement M leur effet sur les objets), additifs au sens où les flèches canoniques induisent un isomorphisme $M(X \sqcup Y) \simeq M(X) \oplus M(Y)$, et vérifiant la condition de compatibilité suivante :*

pour tout diagramme commutatif cartésien

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "\psi"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

*de $G-$ **ens**, on a $M_*(f)M^*(\varphi) = M^*(\psi)M_*(g)$.*

Avant de donner quelques exemples, signalons tout de suite la notion enrichie par une structure multiplicative :

Définition 1.3. Soient G un groupe fini et $\mathcal{A}$ une catégorie additive munie d'une structure monoïdale symétrique biadditive $\otimes$ (typiquement, la catégorie des modules sur un anneau commutatif A).

1. Un *foncteur de Green* sur G à valeurs dans $\mathcal{A}$ est un foncteur de Mackey M sur G dont les valeurs sont munies de structures d'algèbres (dans le cas particulier typique, de A-algèbres au sens usuel) — i.e. on dispose de $\mu_H : M(H) \otimes M(H) \to M(H)$ et d'unité vérifiant les conditions habituelles — de sorte que :
   (a) les morphismes de conjugaison et de restriction soient des morphismes d'algèbres ;
   (b) (réciprocité de Frobenius) pour $K \subset H \in \mathcal{G}(G)$, les diagrammes

$$\begin{tikzcd} M(K) \otimes M(H) \arrow[r, "id \otimes R_K^H"] \arrow[d, "I_K^H \otimes id"'] & M(K) \otimes M(K) \arrow[r, "\mu_K"] & M(K) \arrow[d, "I_K^H"] \\ M(H) \otimes M(H) \arrow[rr, "\mu_H"] & & M(H) \end{tikzcd}$$

   et

$$\begin{tikzcd} M(H) \otimes M(K) \arrow[r, "R_K^H \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes I_K^H"'] & M(K) \otimes M(K) \arrow[r, "\mu_K"] & M(K) \arrow[d, "I_K^H"] \\ M(H) \otimes M(H) \arrow[rr, "\mu_H"] & & M(H) \end{tikzcd}$$

   commutent.

2. Un module à gauche sur un foncteur de Green E est un foncteur de Mackey M muni, pour tout $H \in \mathcal{G}(G)$, d'une structure de $E(H)$-module à gauche vérifiant vis-à-vis de la restriction, de l'induction et de la conjugaison des relations analogues aux précédentes (i.e. la structure est fonctorielle pour la restriction et la conjugaison, et vérifie relativement à l'induction la réciprocité de Frobenius).

Exemple 1.4. 1. L'*anneau de Burnside* est un exemple typique de foncteur de Green. Rappelons que l'anneau de Burnside $A(G)$ d'un groupe fini G est l'anneau de Grothendieck de la catégorie des G-ensembles finis (anneau engendré par les classes d'équivalence de G-ensembles finis modulo les relations $[A \sqcup B] = [A] + [B]$ et $[A \times B] = [A].[B]$). Les morphismes de restriction, induction et conjugaison se définissent de la manière usuelle ; la vérification des axiomes est un exercice aisé.

2. La cohomologie des groupes (à coefficients dans un anneau commutatif fixé A) constitue un autre exemple fondamental. Les morphismes structuraux se définissent encore de manière usuelle ; soulignons simplement que le transfert peut se voir très facilement d'un point de vue algébrique, à l'aide de l'isomorphisme d'adjonction $H^*(H; A) \simeq H^*(G; A[G/H])$ et de l'augmentation $A[G/H] \to A$. Si l'on remplace la cohomologie (usuelle) des groupes par une théorie cohomologique généralisée (appliquée aux classifiants), on ne peut plus procéder de la sorte ; nous verrons dans la section suivante comment y remédier pour obtenir malgré tout une structure de foncteur de Mackey (et même de Green pour une théorie multiplicative).
3. Admettant cela (et une compatibilité aux produits externes évidentes, dont découle la propriété multiplicative donnant un foncteur de Green), on voit aussitôt que le foncteur de Mackey associé à une théorie cohomologique est muni d'une structure naturelle de module gradué sur le foncteur de Green associé à la théorie cohomologique multiplicative associée au spectre des sphères, la cohomotopie stable $\omega^* : H \mapsto [\Sigma^\infty(BH_+), S^0]$ (où $[-,-]$ désigne le groupe abélien gradué des morphismes entre deux spectres), via les morphismes
$$[\Sigma^\infty(X_+), S^0] \times [\Sigma^\infty(X_+), E] \xrightarrow{\wedge} [\Sigma^\infty(X_+) \wedge \Sigma^\infty(X_+), S^0 \wedge E] = \dots$$
$$[\Sigma^\infty((X \times X)_+), E] \xrightarrow{\Delta^*} [\Sigma^\infty(X_+), S^0] \times [\Sigma^\infty(X_+), E]$$
(où $\Delta : X \to X \times X$ désigne la diagonale).

2 Cas d'une théorie cohomologique généralisée

(On suit ici le début de [Tho99], 6.2.)

On se propose d'établir le résultat fondamental suivant :

Proposition 2.1. *Soit h^* une théorie cohomologique généralisée. Pour tout groupe fini G, on peut munir naturellement $H \mapsto h^*(BH)$ d'une structure de foncteur de Mackey sur G à valeurs dans les groupes abéliens gradués.*

Si de plus h^* est une théorie multiplicative, sa multiplication induit une structure naturelle de foncteur de Green sur ce foncteur de Mackey.

2.1 Lemmes de topologie

Lemme 2.2. *Soient K un espace topologique compact compact, n et m des entiers positifs et $i : K \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ et $j : K \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ des applications continues injectives. Alors il existe un homéomorphisme α de $\mathbb{R}^{n+m}$ faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "x \mapsto (x,0)"] & \mathbb{R}^{n+m} \arrow[d, "\alpha", "\simeq"'] \\ & \mathbb{R}^m \arrow[r, "y \mapsto (0,y)"] & \mathbb{R}^{n+m} \end{tikzcd}$$

(Autrement dit, tous les plongements d'un espace compact dans un espace numérique sont stablement équivalents.)

Démonstration. Par le théorème de Tietze-Urysohn, il existe une application continue $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que $\varphi \circ i = j$. L'homéomorphisme $\alpha : (x,y) \mapsto (x, y + \varphi(x))$ (de réciproque $(x,y) \mapsto (x, y - \varphi(x))$) convient. $\square$

On rappelle également la compactification d'Alexandroff, foncteur de la catégorie des espaces topologiques localement compacts vers celle des espaces compacts : à un espace X localement compact on associe l'espace $\widehat{X}$ obtenu ensemblistement en adjoignant un point extérieur ∞_X à X, dont une base de la topologie est composée des ouverts de X et du complémentaire (dans $\widehat{X}$) des parties compactes de X. Ainsi $\widehat{X} = X_+$ si (et seulement si) X est compact. Outre la fonctorialité covariante (évidente) relative aux applications propres, on dispose d'une fonctorialité *contravariante* relative aux injections continues ouvertes. En effet, si $i : U \hookrightarrow X$ est une telle application (entre espaces localement compacts), l'application $i^! : \widehat{X} \to \widehat{U}$ associant u à $i(u)$ est ∞_U aux autres points de $\widehat{X}$ est continue. En effet, si V est une partie ouverte de U, alors $(i^!)^{-1}(V) = i(V)$ est ouverte dans X donc dans $\widehat{X}$, et si K est une partie compacte de U, alors $(i^!)^{-1}(\widehat{U} \setminus K) = \widehat{X} \setminus i(K)$ est également ouverte. Les deux fonctorialités vérifient la propriété de compatibilité suivante : si

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif cartésien d'espaces localement compacts avec f, g propres et p, q (continues) injectives ouvertes, alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widehat{B} \arrow[r, "g_*"] & \widehat{Y} \\ \widehat{A} \arrow[r, "f_*"] \arrow[u, "q^!"] & \widehat{X} \arrow[u, "p^!"'] \end{tikzcd}$$

commute.

On remarque par ailleurs qu'on dispose d'un homéomorphisme canonique $\widehat{X \times Y} \simeq \widehat{X} \wedge \widehat{Y}$.

Notons $\mathbf{Top}_f$ la catégorie des espaces topologiques compacts de dimension finie (toutes les notions raisonnables équivalent à dire que ces espaces se plongent dans un espace numérique ; on pourrait se restreindre aux complexes cellulaires finis) et $\mathbf{Spt}$ la catégorie des spectres. On dispose ainsi d'un foncteur (covariant) $\mathbf{Top}_f \to \mathbf{Spt} \quad X \mapsto \Sigma^\infty(X_+)$.

Proposition 2.3. *À chaque revêtement fini $p : Y \to X$ de $\mathbf{Top}_f$ on peut associer un morphisme de spectres $p^* : \Sigma^\infty(X_+) \to \Sigma^\infty(Y_+)$ de manière fonctorielle (contravariante) et compatible à la fonctorialité covariante en ce sens que si*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif cartésien de $\mathbf{Top}_f$ *dans lequel* p *(donc* q*) est un revêtement fini et* f *(donc* g*) une injection, alors le diagramme de spectres*

$$\begin{tikzcd} \Sigma^\infty(B_+) \arrow[r, "g_*"] & \Sigma^\infty(Y_+) \\ \Sigma^\infty(A_+) \arrow[r, "f_*"] \arrow[u, "q^*"] & \Sigma^\infty(X_+) \arrow[u, "p^*"'] \end{tikzcd}$$

commute.

Démonstration. Soit $u : Y \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ une injection continue de Y dans un espace numérique. L'application continue $Y \times \mathbb{R}^n \to X \times \mathbb{R}^n \quad (a,t) \mapsto (p(a), u(a)+t)$ est continue et ouverte (car p est ouverte) ; de plus, pour $\epsilon > 0$ assez petit, sa restriction i à $Y \times \mathbb{B}^n_\epsilon$ (où $\mathbb{B}^n_\epsilon$ désigne la boule ouverte euclidienne de centre 0 et de rayon ϵ) est injective (car u est injective, Y compact et p un homéomorphisme local). On choisit pour p^* le morphisme de spectres représenté par

$$\Sigma^n(X_+) \simeq \widehat{X} \wedge \widehat{\mathbb{R}^n} \simeq \widehat{X \times \mathbb{R}^n} \xrightarrow{i^!} \widehat{Y \times \mathbb{B}^n_\epsilon} \simeq \Sigma^n(Y_+).$$

Des choix différents de u (ou ϵ) donnent des applications continues qui sont, stablement, canoniquement isomorphes grâce au lemme 2.2. On en déduit facilement la proposition, en utilisant l'observation ci-dessus sur la compatibilité des fonctorialités covariante et contravariante de la compactification d'Alexandroff. □

On peut faire un peu mieux et s'affranchir partiellement des fortes hypothèses de finitude : notons $\mathbf{Top}_f$ la catégorie des espaces topologiques séparés qui sont colimite (filtrante) de leurs sous-espaces dans $\mathbf{Top}_{lf}$ (cela s'applique notamment aux complexes cellulaires localement finis). Si $p : Y \to X$ est un revêtement fini avec X et Y dans $\mathbf{Top}_{lf}$ et que U est un sous-espace de X appartenant à $\mathbf{Top}_f$, le sous-espace $Y_U = p^{-1}(U)$ de Y appartient également à $\mathbf{Top}_{lf}$ (car p est une application propre), et l'on peut définir $p^* : \Sigma^\infty(X_+) \to \Sigma^\infty(Y_+)$ comme la colimite (filtrante) des p^*_U. La proposition précédente demeure valable dans ce cadre étendu.

2.2 Démonstration du résultat principal et premières conséquences

Démonstration de la proposition 2.1. On utilise la description des foncteurs de Mackey donnée par la proposition 1.2. Si X est un G-ensemble fini, notre foncteur associe $h^*(EG \underset{G}{\times} X)$ à X. La fonctorialité contravariante est donnée par celle de h^*. La fonctorialité covariante est donnée par la proposition 2.3 (on note, en prenant les modèles simpliciaux usuels, que tous les espaces considérés ont la propriété de finitude exigée), en notant qu'une fonction G-équivariante $X \to Y$ entre G-ensembles finis induit un revêtement fini $EG \underset{G}{\times} X \to EG \underset{G}{\times} Y$. Ladite proposition fournit également la propriété de compatibilité requise entre les fonctorialités covariante et contravariante.

Lorsque h^* est une théorie multiplicative, on dispose d'applications $h^*(A) \otimes h^*(B) \to h^*(A \times B)$ naturelles pour la fonctorialité contravariante. Le seul point à vérifier est le suivant : si $p : Y \to X$ est un revêtement fini (vérifiant les conditions de finitude appropriées), alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^\infty(X_+) \wedge \Sigma^\infty(X_+) \arrow[r, "p^* \wedge \Sigma^\infty(X_+)"] \arrow[d, "\simeq"] & \Sigma^\infty(Y_+) \wedge \Sigma^\infty(X_+) \arrow[d, "\simeq"] \\
\Sigma^\infty(X \times X)_+ \arrow[r, "(p\times X)^*"] & \Sigma^\infty(Y \times X)_+
\end{tikzcd}$$

commute, ce qu'on vérifie facilement en reprenant les constructions. □

Comme nous l'avons mentionné plus haut (exemple 1.4. 3), on dispose gratuitement d'une structure de module sur le foncteur de Green associé à la cohomotopie stable. L'un des intérêts de cette structure apparaît dans le résultat suivant :

Proposition 2.4. *Soient h^* une théorie cohomologique (généralisée), G un groupe fini et $\mathcal{E}$ un ensemble de sous-groupes de G tel que l'application*

$$\bigoplus_{H\in\mathcal{E}} \omega^*(BH) \to \omega^*(BG)$$

dont les composantes sont les morphismes de transfert soit surjective.

Alors la suite

$$0 \to h^*(BG) \xrightarrow{u} \bigoplus_{H\in\mathcal{E}} h^*(BH) \xrightarrow{v} \bigoplus_{\substack{H,K\in\mathcal{E}\\ g\in G}} h^*(B(H\cap K^g)))$$

où u a pour composantes les restrictions et v la différence des deux morphismes évidents (obtenus par restriction pour l'un et par restriction et conjugaison pour l'autre) est exacte.

Démonstration. Soit (α_H) une famille presque nulle d'éléments de $\omega^*(BH)$ (pour $H \in \mathcal{E}$) dont la somme des induits dans $\omega^*(BG)$ soit 1. Par la loi de réciprocité de Frobenius, le morphisme $p : \bigoplus_{H\in\mathcal{E}} h^*(BH) \to h^*(BG)$ de composantes $x_H \mapsto I_H^G(\alpha_H.x_H)$ vérifie

$$pu(x) = \sum_{H\in\mathcal{E}} I_H^G(\alpha_H.R_H^G(x)) = \Big(\sum_{H\in\mathcal{E}} I_H^G(\alpha_H)\Big)x = x$$

d'où l'injectivité de u ; pour l'exactitude au milieu on note que, si $\mathbf{x} = (x_H)$ est un élément du noyau de v, $up(\mathbf{x})$ a pour composante d'indice H, par la formule des doubles classes

$$\sum_{K\in\mathcal{E}} R_H^G I_K^G(\alpha_K.x_K) = \sum_{\substack{K\in\mathcal{E}\\ KgH\in K\backslash G/H}} I_{H\cap K^g}^H\big(R_{H\cap K^g}^{K^g} c_g^K(\alpha_K).R_{H\cap K^g}^{K^g} c_g^K(x_K)\big)$$

qui vaut, puisque $R_{H\cap K^g}^{K^g} c_g^K(x_K) = R_{H\cap K^g}^K(x_H)$ (car $v(\mathbf{x}) = 0$),

$$\Big(\sum_{\substack{K\in\mathcal{E}\\ KgH\in K\backslash G/H}} I_{H\cap K^g}^H R_{H\cap K^g}^{K^g} c_g^K(\alpha_K)\Big).x_H = R_H^G\Big(\sum_{K\in\mathcal{E}} I_K^G(\alpha_K)\Big).x = x,$$

ce qui achève la démonstration. □

Cette proposition s'applique notamment lorsqu'on choisit pour $\mathcal{E}$ un ensemble de représentants de sous-groupes de Sylow associés aux différents diviseurs premiers de $|G|$. Cela résulte du lemme suivant :

Lemme 2.5. *Soient G un groupe fini et H un sous-groupe d'indice d de H. L'image de $1 \in \omega^0(BH)$ par I_H^G est $d.1$.*

En conséquence, pour tout foncteur de Mackey M muni d'une structure de module sur ω^0, $I_H^G \circ R_H^G$ est la mulplication par $[G : H]$.

Démonstration. La deuxième assertion résulte de la première et de la loi de réciprocité de Frobenius.

La première provient de l'assertion analogue (immédiate) pour le transfert sur H^0, en raison du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^0(X) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(Y) \arrow[d] \\ \omega^0(X) \arrow[r] & \omega^0(Y) \end{tikzcd}$$

associé à un revêtement fini $Y \to X$ de $\mathbf{Top}_f$ dont les flèches horizontales sont les transferts et les flèches verticales les applications canoniques obtenues en voyant un élément de $H^0(X)$ comme le groupe abélien des fonctions localement constantes $X \to \mathbb{Z}$. □

Corollaire 2.6. *Soient h^* une théorie cohomologique, G un groupe fini, p un nombre premier et H un p-Sylow de G. On suppose que H est abélien. Alors l'image du morphisme de restriction $h^*(BG) \to h^*(BH)$ est le sous-groupe des invariants sous l'action (par conjugaison) du normalisateur $N_G(H)$.*

Démonstration. On note d'abord que l'image d'un morphisme de restriction est toujours invariante par l'action du normalisateur du petit groupe, puisqu'il agit trivialement par conjugaison sur le grand groupe.

La proposition 2.4 et le corollaire 2.6 fournissent une suite exacte

$$0 \to h^*(BG) \to \bigoplus_{p' \mid |G|} h^*(BSyl_{p'}(G)) \to \bigoplus_{p',g} h^*(B(Syl_{p'}(G) \cap Syl_{p'}(G)^g))$$

(puisque l'intersection de deux Sylow non conjugués est triviale), avec des notations évidentes.

Soient $g \in G$ et C le centralisateur de $H \cap H^g$: C contient H et H^g, puisque H est abélien, et c'en sont des sous-groupes de Sylow, donc ils sont conjugués dans C, de sorte qu'existe $t \in C$ tel que $tg \in N_G(H)$. On en déduit que la restriction aux invariants de $h^*(BH)$ sous l'action de $N_G(H)$ de la flèche de la suite exacte est nulle, d'où le corollaire. □

De manière tout à fait analogue, on obtient un premier calcul de cohomologie pour une extension non abélienne de groupes cycliques :

Corollaire 2.7. *Soient n et m deux entiers positifs premiers entre eux et φ une action fidèle du groupe $\mathbb{Z}/n$ sur le groupe $\mathbb{Z}/m$. Alors*

$$h^*(B(\mathbb{Z}/n \underset{\varphi}{\ltimes} \mathbb{Z}/m)) \simeq h^*(B(\mathbb{Z}/n)) \oplus h^*(B(\mathbb{Z}/m))^{\mathbb{Z}/n}.$$

3 Quelques outils formels supplémentaires

Suite spectrale de Hochschild-Serre dans le contexte d'une théorie cohomologique généralisée h^*

Si $1 \to H \to G \to K \to 1$ est une suite exacte courte de groupes (finis pour fixer les idées), elle prend la forme suivante :

$$E_2^{i,j} = H^i(K; h^j(BH)) \Rightarrow h^{i+j}(BG)$$

où l'action de K sur $h^*(BH)$ est induite par celle, par conjugaison, de G (dont la restriction à H est triviale). La démonstration est essentiellement la même qu'en cohomologie ordinaire : plus généralement, on a une suite spectrale de Serre associée à une fibration pointée de base connexe, qui s'obtient en considérant l'image réciproque de la filtration squelettale de la base par la fibration (on pourra consulter [Dye69]).

Cette suite spectrale possède la structure multiplicative usuelle si h^* est une théorie multiplicative.

Utilisation d'une orientation complexe

On se donne ici une théorie cohomologique h^* multiplicative *munie d'une orientation complexe*. Cela possède de nombreuses conséquences a priori sur certains calculs de h^*-cohomologie (cf. la deuxième partie de [Ada74]), que le chapitre 6 de [Tho99] explore. Tout d'abord, la cohomologie des groupes abéliens finis dans ce contexte se calcule essentiellement comme la cohomologie ordinaire : on a

$$h^*(B(\mathbb{Z}/p^n)) \simeq h^*(*)[[x]]/[p^n](x)$$

où $[l]$ est la l-série de la loi de groupe formel associée à l'orientation complexe. Dans cet isomorphisme, le générateur x peut être vu comme la première classe de Chern d'une représentation (de dimension 1) de $\mathbb{Z}/p^n$.

Comme première conséquence, on peut noter :

Proposition 3.1. *Soit G un groupe fini dont les sous-groupes de Sylow sont cycliques. Alors l'algèbre de cohomologie $h^*(BG)$ est engendrée par les classes de Chern.*

4 Un peu de zoologie

Plus subtil est le résultat suivant :

Théorème 4.1 (Tezuka-Yagita). *Soient G un groupe fini et p un nombre premier impair tel que les p-Sylow de G soient d'ordre p^3. On suppose également que les coefficients de h^* sont du type $\mathbb{Z}_{(p)}[v_1, \dots, v_n, \dots]$ où les v_i sont de degrés deux à deux distincts. Alors $h^*(BG) \otimes \mathbb{Z}[1/p]$ est engendré par les classes de Chern associées à des représentations de dimension 1 et p. En particulier, cette cohomologie est concentrée en degrés pairs.*

Sont démontrés également dans [Tho99] les deux cas d'annulation suivants.

Théorème 4.2. *Soient p un nombre premier impair, $n \in \mathbb{N}$ et G un groupe d'ordre p^n. Alors $Ell^*(BG)$ est nulle en degrés impairs dans chacun des deux cas suivants :*

1. $n \leq 4$;
2. $p \geq 5$ *et G est de rang au plus 2 (i.e. ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/p)^3$).*

Les démonstrations, dans lesquelles nous n'entrerons pas, et qui apprennent en fait bien davantage sur la cohomologie elliptique des groupes des types considérés, reposent sur un examen minutieux (propriétés multiplicatives incluses) des suites spectrales de Hochschild-Serre permettant de se ramener à des groupes abéliens, ainsi que sur des résultats de théorie des groupes précisant la structure des groupes qui peuvent apparaître.

L'annulation de la cohomologie elliptique du classifiant du groupe fini en degrés impairs n'est pas un phénomène général.

Références

[Ada74] J. F. Adams – *Stable homotopy and generalised homology*, University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1974, Chicago Lectures in Mathematics.

[Dye69] E. Dyer – *Cohomology theories*, Mathematics Lecture Note Series, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[Tho99] C. B. Thomas – *Elliptic cohomology*, The University Series in Mathematics, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 1999.

[TW95] J. Thévenaz & P. Webb – « The structure of Mackey functors », *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), no. 6, p. 1865–1961.