Homologie stable des groupes à coefficients polynomiaux

Notes préparatoires au cours de l'école de printemps sur l'homologie des foncteurs et ses applications (Nantes, avril 2012)

Aurélien DJAMENT

Version révisée du 2 mai 2012

Remarque. Le contenu de ces notes ne coïncide pas de façon précise avec celui des exposés oraux correspondants. D'une manière générale, les notes donnent plus de démonstrations, voire de résultats, que les exposés.

Les parties écrites en caractères linéaux peuvent être omises en première lecture.

Les cinq sections sont conçues pour pouvoir être abordées de manière assez largement indépendante.

Remerciements. L'auteur sait gré à Christine Vespa, Antoine Touzé et Vincent Franjou d'échanges utiles à l'amélioration des premières versions de ce texte.

Table des matières

1 Introduction

Ce mini-cours traite d'homologie des groupes *discrets*, essentiellement à coefficients tordus (i.e. avec une action non triviale du groupe sur les coefficients). On s'intéresse surtout à des phénomènes *stables*, ou *génériques*, c'est-à-dire qui ne concernent pas un groupe en particulier (dont on saura souvent dire très peu du point de vue homologique), mais une famille de groupes.

Précisons un peu. Certaines tours de groupes, i.e. suites $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ munies de morphismes de groupes $G_n \to G_{n+1}$, sont particulièrement intéressantes du point de vue de l'homologie. Pour nous, il s'agira essentiellement des suites suivantes :

1. la suite des groupes symétriques Σ_n (permutations de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$), où Σ_n est plongé dans Σ_{n+1} comme le sous-groupe des permutations laissant $n+1$ invariant ;
2. la suite des groupes linéaires $GL_n(A)$ sur un anneau A, où $GL_n(A)$ est plongé dans $GL_{n+1}(A)$ par $M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. la suite des groupes orthogonaux $O_{n,n}(A)$ ou des groupes symplectiques $Sp_{2n}(A)$, où A est un anneau commutatif, où les plongements sont donnés comme précédemment — on considère ici par convention les formes quadratique et symplectique dont les matrices sont constituées de n blocs diagonaux égaux à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ respectivement (cet exemple est susceptible de variations évidentes).

La suite de groupes d'homologie

$$H_*(G_0) \to H_*(G_1) \to \cdots \to H_*(G_n) \to H_*(G_{n+1}) \to \dots$$

(volontairement, on ne précise pas les coefficients à ce stade) donne lieu à plusieurs questions fondamentales :

1. sait-on la calculer complètement ? (La réponse n'est qu'exceptionnellement positive, même lorsque les coefficients sont constants, néanmoins cela peut arriver dans quelques cas particulièrement favorables.)
2. Sait-on calculer sa colimite, appelée *homologie stable* de la suite de groupes ? (C'est encore, souvent, une question très difficile, mais on sait dire beaucoup plus de choses que pour la question précédente.)
3. La suite se stabilise-t-elle (c'est-à-dire que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, il existe N tel que $H_d(G_n) \to H_d(G_{n+1})$ soit un isomorphisme pour $n \geq N$), et si oui avec quelles bornes ? (L'un des principaux objectifs est, en l'absence de réponse positive à la première question, de tirer des renseignements sur $H_*(G_n)$, à n fixé, de l'homologie stable.)

Hormis dans cette première séance introductive, nous n'aborderons que la deuxième question, *dans le cas de coefficients tordus favorables*, en supposant connue l'homologie stable à coefficients constants : c'est ce pour quoi l'homologie des foncteurs a montré son efficacité. Pour l'instant, rien de convaincant n'a été réalisé à l'aide de l'homologie des foncteurs pour aborder l'homologie à coefficients constants de groupes discrets ; toutefois, les raisons conceptuelles de la dichotomie observée entre coefficients constants et tordus (polynomiaux en un sens adéquat, en général) demeurent obscures.

Remarque 1.1. Nous ne parlerons le plus souvent que d'homologie, qui possède la propriété commode de commuter aux colimites filtrantes (ainsi, on peut voir l'homologie stable de notre tour de groupes comme l'homologie de sa colimite) ; néanmoins, des résultats tout à fait analogues valent en cohomologie.

L'un des intérêts de l'homologie stable est de *structurer* en général davantage la situation que l'homologie individuelle d'un des groupes. Ainsi, dans tous les cas susmentionnés, au moins lorsque les coefficients sont pris sur un corps commutatif (avec action triviale), on dispose d'une structure d'algèbre de Hopf graduée connexe commutative et cocommutative. Ce type d'observation peut s'avérer crucial pour aborder les problèmes posés (par exemple, le calcul de l'homologie des groupes symétriques présenté dans [AM04] utilise les résultats de structure des algèbres de Hopf sur $\mathbb{F}_p$).

Remarque 1.2. Cette situation rappelle d'une certaine manière celle de l'homotopie stable par rapport à l'homotopie instable : on dispose de résultats de stabilisation de la colimite qui définit les groupes d'homotopie stable à partir des groupes d'homotopie ordinaires pour des espaces possédant de bonnes propriétés de finitude (théorème de Freudenthal) ; la catégorie homotopique des spectres possède une structure plus riche et maniable (c'est une catégorie triangulée) que la catégorie homotopique des espaces topologiques pointés, qui n'est même pas additive.

1.1 Un cadre raisonnable : homologie de groupes d'automorphismes dans une catégorie monoïdale symétrique

(On renvoie à [ML98] pour les définitions et propriétés fondamentales des catégories monoïdales. Le cadre présenté ici, comme une partie significative des résultats donnés dans les exposés suivants, provient de [DV10].)

Soit $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie monoïdale symétrique (bien qu'on note $\oplus$ le foncteur donnant la structure monoïdale, on ne suppose pas qu'il s'agit d'une somme catégorique). On suppose que l'unité 0 est objet initial (mais pas nécessairement nul) de $\mathcal{C}$ [1]. On se donne par ailleurs un objet X de $\mathcal{C}$. Les groupes auxquels on s'intéresse sont les groupes d'automorphismes de la « somme » (au sens de $\oplus$) de copies de X :

$$G_n := \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X^{\oplus n}).$$

On rappelle que l'on peut sans restriction supposer que $\oplus$ est strictement associatif ; en revanche, malgré la symétrie, il faut toujours prendre garde à l'ordre des facteurs. De fait, la symétrie procure un morphisme de groupes $\Sigma_n \to G_n$ (action par permutation des facteurs de la somme).

On fait des G_n une tour de la façon suivante : à un automorphisme u de $X^{\oplus n}$ on associe l'automorphisme $u \oplus Id_X$ de $X^{\oplus n+1}$, ce qui définit un morphisme de groupes $G_n \to G_{n+1}$. Noter que l'on aurait pu choisir d'associer $Id_X \oplus u$, par exemple, à u plutôt que $u \oplus Id_X$, ce qui fournit un morphisme de groupes *différent*. Néanmoins, ces deux choix sont *conjugués* sous l'action de la transposition $(1 \quad n+1)$ sur $X^{\oplus n+1}$, de sorte qu'ils induisent le *même* morphisme $H_*(G_n) \to H_*(G_{n+1})$ en homologie. Cette observation sera utilisée abondamment.

Exemple 1.3.

1. La catégorie des ensembles finis munie de la somme catégorique (réunion disjointe), avec A ensemble à un élément, donne les groupes symétriques. Plusieurs variantes fournissent la même tour de groupes : on peut considérer la sous-catégorie monoïdale avec les mêmes objets et les injections comme morphismes, ou des catégories d'ensembles finis pointés (avec la somme pointée comme structure monoïdale et en prenant pour X un ensemble pointé à deux éléments).
2. Si A est un anneau, la catégorie $\mathbf{P}(A)$ des A-modules à gauche projectifs de type fini munie de la somme directe donne, avec $X = A$, la tour des $GL_n(A)$. Nous reviendrons plus tard sur d'autres variantes de catégories de A-modules projectifs éventuellement plus adaptées.
3. Soient A est un anneau muni d'une anti-involution, $\epsilon \in \{-1, 1\}$, et $\mathbf{H}_\epsilon(A)$ la catégorie des A-modules à gauche projectifs de type fini munis d'une forme ϵ-hermitienne. Explicitement, si l'on note D l'endofoncteur contravariant $\mathrm{Hom}_A(-, A)$ des A-modules à gauche projectifs de type fini (on utilise l'anti-involution de A pour convertir l'action naturelle de A à droite sur $\mathrm{Hom}_A(M, A)$, où M est un A-module à gauche, en une action à gauche), D possède une propriété d'auto-adjonction : $\mathrm{Hom}_A(M, DN) \simeq \mathrm{Hom}_A(N, DM)$, isomorphisme noté par une barre, qui est une involution pour $M = N$, une forme ϵ-hermitienne sur M est un élément du groupe abélien $\mathrm{S}^2_\epsilon(M)$ quotient de $\mathrm{Hom}_A(M, DM)$ par l'image de l'endomorphisme $x \mapsto \bar{x} - \epsilon x$. (Pour A commutatif avec involution triviale, c'est la notion usuelle d'espace quadratique si $\epsilon = 1$ et symplectique si $\epsilon = -1$). La structure monoïdale est la somme directe orthogonale ; on prend pour X le A-module A^2 (auquel il faut penser comme $A \oplus DA$) muni de la forme donnée par la classe de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient ainsi, selon que ϵ vaut 1 ou -1, la tour des groupes unitaires (hyperboliques) ou des groupes

1. Rappelons la signification du fait que 0 est objet initial : pour tout objet c de $\mathcal{C}$, il existe un et un seul morphisme de source 0 et de but c. Exiger que 0 soit objet final reviendrait à demander qu'il existe un et un seul morphisme de source c et de but 0, pour tout objet c de $\mathcal{C}$. Un objet nul est un objet à la fois initial et final.

symplectiques. Noter qu'on pourrait se restreindre à la sous-catégorie des espaces hermitiens non dégénérés (nous reviendrons également en détail sur tout cela ultérieurement).

4. La catégorie des groupes libres de type fini, avec la somme catégorique (produit libre), s'insère également dans ce formalisme.

Remarque 1.4. Dans ces situations, il est naturel de se demander ce qui se passe lorsqu'on remplace les groupes en question par des sous-groupes remarquables comme les groupes alternés dans les groupes symétriques ou les groupes linéaires spéciaux dans les groupes linéaires (sur un anneau commutatif). Ils s'avèrent moins commodes à manier puisqu'ils ne contiennent pas les groupes symétriques, mais peuvent se traiter de façon analogue « à la main » , en utilisant par exemple l'inclusion $GL_n(A) \hookrightarrow SL_{n+1}(A)$ donnée par $M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & (\det M)^{-1} \end{pmatrix}$.

Montrons comment tordre les coefficients à l'aide d'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$. Utilisant que 0 est objet initial de $\mathcal{C}$, on dispose dans $\mathcal{C}$ de morphismes

$$X^{\oplus n} = X^{\oplus n} \oplus 0 \xrightarrow{Id \oplus (0 \to X)} X^{\oplus n} \oplus X = X^{\oplus n+1}$$

(là encore on pourrait choisir d'inclure d'autres facteurs que les n premiers, mais il faut que le choix soit compatible avec celui effectué pour les morphismes $G_n \to G_{n+1}$), d'où des morphismes $F(X^{\oplus n}) \to F(X^{\oplus n+1})$ compatibles aux actions tautologiques de G_n et G_{n+1} et au morphisme $G_n \to G_{n+1}$. On dispose donc de morphismes de groupes abéliens gradués $H_*(G_n; F(X^{\oplus n})) \to H_*(G_{n+1}; F(X^{\oplus n+1}))$ naturels en F ; la colimite de cette suite de morphismes est appelée ***homologie stable de la tour** (G_n) (ou de $\mathcal{C}$) à coefficients dans F*. Comme homologie et colimites filtrantes commutent, cette homologie stable s'identifie canoniquement à $H_*(G_\infty; F_\infty)$, où F_∞ est la colimite des $F(X^{\oplus n})$ et G_∞ celle des G_n.

Le but de ce cours est de montrer comment calculer, dans les exemples fondamentaux précédents, l'homologie stable à partir de $H_*(G_\infty)$ (homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de G_∞), pour F suffisamment raisonnable (en particulier *polynomial* — notion sur laquelle nous reviendrons), en utilisant l'homologie $H_*(\mathcal{C}; F)$ de la catégorie $\mathcal{C}$ à coefficients dans F.

Homologie (de Hochschild) d'un (bi)foncteur Si $\mathcal{C}$ est une petite catégorie (ou une catégorie essentiellement petite) et $\Bbbk$ un anneau commutatif fixé, la catégorie $\mathcal{C} - \mathbf{Mod}$ des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers les $\Bbbk$-modules est une catégorie abélienne qui se comporte comme une catégorie de modules (elle a assez d'objets injectifs et projectifs, possèdent des limites et colimites, les colimites filtrantes sont exactes...) : on peut y faire de l'algèbre homologique de façon analogue. On dispose notamment de l'homologie d'un foncteur $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} - \mathbf{Mod}$, notée $H_*(\mathcal{C}; F)$: $H_0(\mathcal{C}; F)$ est simplement la colimite de F, et l'homologie de degré supérieur s'obtient en dérivant à gauche (la colimite est un foncteur exact à droite $\mathcal{C} - \mathbf{Mod} \to \mathbf{Mod}_\Bbbk$). On dispose également, pour $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} - \mathbf{Mod}$ et $G \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod} - \mathcal{C} := \mathcal{C}^{op} - \mathbf{Mod}$ de groupes de torsion $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{C}}(G, F)$, qui dérivent le produit tensoriel au-dessus de $\mathcal{C}$. On dispose enfin, si B est un bifoncteur sur $\mathcal{C}$, c'est-à-dire un objet de $(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}) - \mathbf{Mod}$ (on prendra garde que, selon les sources, c'est parfois la première variable, parfois la seconde qui est contravariante !), de l'homologie de Hochschild de $\mathcal{C}$ à coefficients dans B, notée $HH_0(\mathcal{C}; B)$. En degré

0, c'est la *cofin* de B (cf. [ML98]), en degré supérieur on dérive à gauche. Si F est un foncteur covariant sur $\mathcal{C}$ et G un foncteur contravariant, sur le bifoncteur produit tensoriel extérieur $G \boxtimes F : (A, B) \mapsto G(A) \otimes F(B)$ (les produits tensoriels de base non spécifiée sont pris sur $\Bbbk$), on dispose d'un isomorphisme canonique $HH_0(\mathcal{C}; G \boxtimes F) \simeq G \underset{\mathcal{C}}{\otimes} F$ qui s'étend, lorsque F ou G prennent des valeurs plates sur $\Bbbk$, en un isomorphisme naturel gradué $HH_*(\mathcal{C}; G \boxtimes F) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{C}}(G, F)$. En particulier, $HH_*(\mathcal{C}; F) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{C}}(\Bbbk, F) \simeq H_*(\mathcal{C}; F)$, où $\Bbbk$ désigne le foncteur constant en $\Bbbk$ et F est vu, dans le membre de gauche, comme bifoncteur ne dépendant pas de la variable contravariante. On dispose par ailleurs, pour tout bifoncteur B, d'un isomorphisme naturel $HH_*(\mathcal{C}; B) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}}(\Bbbk[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}], B)$.

1.2 Aperçu des résultats principaux présentés dans ce mini-cours

Si A est un anneau, on note $\mathbf{P}(A)$ la catégorie des A-modules à gauche projectifs de type fini.

Théorème 1.5 (Betley [Bet89]). *Soient A un anneau commutatif et F un foncteur* **polynomial** [2] *de $\mathbf{P}(A) - \mathbf{Mod}$ tel que $F(0) = 0$.*

Alors $H_*(GL_\infty(A); F_\infty) = 0$.

Théorème 1.6 (Betley [Bet99], Suslin [FFSS99] (appendice)). *Soient k un corps fini et B un bifoncteur polynomial sur $\mathbf{P}(k)$; on suppose que l'anneau des coefficients est $\Bbbk = k$. Alors il existe un isomorphisme naturel*

$$H_*(GL_\infty(k); B_\infty) \simeq HH_*(\mathbf{P}(k); B)$$

de k-espaces vectoriels gradués.

Théorème 1.7 (Scorichenko [Sco00]). *Soient A un anneau et B un bifoncteur polynomial sur $\mathbf{P}(A)$ (i.e. un objet de $(\mathbf{P}(A)^{op} \times \mathbf{P}(A)) - \mathbf{Mod}$). Il existe une suite spectrale naturelle*

$$E^2_{p,q} = H_p(GL_\infty(A); HH_q(\mathbf{P}(A); B)) \Rightarrow H_{p+q}(GL_\infty(A); B_\infty)$$

(où l'action du groupe linéaire est triviale), qui s'effondre à la deuxième page si $\Bbbk$ est un anneau principal.

(Ce résultat est en général énoncé en terme de K-théorie stable, mais nous n'en aurons nul usage, et c'est de fait la propriété de suite spectrale qui importe toujours dans les utilisations. Par ailleurs, l'article [DV10] explique comment construire la suite spectrale sans utiliser la K-théorie stable.)

Théorème 1.8 (Djament-Vespa [DV10]). *Soient k un corps fini de caractéristique différente de 2* [3] *et F un foncteur polynomial de $\mathbf{P}(k)$ vers les k-espaces vectoriels. Il existe un isomorphisme naturel*

$$H_*(O_\infty(k); F_\infty) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathbf{P}(k)}(k[S^2_k]^\vee, F)$$

où S^2_k désigne la deuxième puissance symétrique sur k et l'exposant $\vee$ indique la précomposition par la dualité $\mathrm{Hom}_k(-, k)$.

2. Cette notion sera introduite et discutée plus tard. On peut penser par exemple à un sous-quotient d'une puissance tensorielle.

3. On a aussi un résultat analogue en caractéristique 2, mais il faut alors remplacer le groupe orthogonal par son sous-groupe d'indice 2.

On peut également généraliser à un anneau quelconque :

Théorème 1.9 ([Dja]). *Soient A un anneau muni d'une anti-involution et F un foncteur polynomial de $\mathbf{P}(A)$ vers les groupes abéliens. Il existe une suite spectrale naturelle*

$$E^2_{p,q} = H_p(U_\infty(A); \mathrm{Tor}_q^{\mathbf{P}(A)}(\mathbb{Z}[S^2_A]^\vee, F)) \Rightarrow H_{p+q}(U_\infty(A); F_\infty)$$

qui s'effondre à la deuxième page.

Exemples de calculs explicites

Théorème 1.10 (Djament-Vespa [DV10]). *Soit k un corps fini de cardinal q impair. L'algèbre de cohomologie stable des groupes orthogonaux sur k à coefficients dans les puissances symétriques est polynomiale sur des générateurs de bidegré $(2q^s m, q^s + 1)$ (où le premier degré est le degré homologique et le second le degré interne) indexés par les entiers naturels m et s.*

Théorème 1.11 ([Dja]). *Soient k un corps commutatif de caractéristique nulle ; pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathfrak{o}_{n,n}(k)$ la représentation adjointe de $O_{n,n}(k)$. Alors le k-espace vectoriel gradué*

$$\operatorname*{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_*(O_{n,n}(k); \mathfrak{o}_{n,n}(k))$$

est isomorphe au produit tensoriel (sur $\mathbb{Q}$) de $H_*(O_{\infty,\infty}(k); \mathbb{Q})$ et de la partie impaire de la k-algèbre graduée $\Omega^*_k = \Lambda^*(\Omega^1_k)$ des différentielles de Kähler de k (vu comme $\mathbb{Q}$-algèbre). En particulier, cet espace vectoriel gradué est nul si k est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$.

Il y a d'autres conséquences, plus qualitatives (changement de corps ou d'anneau etc.).

1.3 Stabilité homologique

Le problème de la stabilité homologique pour les groupes discrets fut d'abord étudié pour les seuls coefficients constants (l'un des cas les plus considérés, celui des groupes linéaires, remonte à Quillen, à qui l'on doit, semble-t-il, la première démonstration de ladite stabilité pour le cas des corps commutatifs autres que $\mathbb{F}_2$, qu'il ne publia pas). Dwyer montra en 1980 (cf. [Dwy80]), dans la situation qui l'occupait (les groupes linéaires sur des anneaux principaux), que l'on pouvait, tout en adoptant la même stratégie générale que celle toujours employée dans les raisonnements de stabilité homologique (établir la haute connectivité de complexes munis d'une action appropriée des groupes considérés, faisant apparaître les groupes précédents de la suite comme stabilisateurs), raffiner les arguments pour obtenir la stabilité à coefficients tordus favorables. Fait remarquable, les coefficients favorables dont il s'agit sont essentiellement ceux provenant de foncteurs polynomiaux en un sens approprié, coefficients qui sont aussi ceux où l'on peut obtenir les résultats les plus significatifs en matière de calculs d'homologie stable. Depuis ce travail de Dwyer, la plupart des résultats de stabilité homologique (dans le contexte qui est le nôtre) ont été traités (ou pourraient l'être sans grande difficulté) aussi bien à coefficients constants que tordus.

Nakaoka ([Nak60]) a calculé entièrement, il y a plus de cinquante ans, l'homologie de tous les **groupes symétriques**, démontrant en particulier leur stabilité homologique (à coefficients constants, mais le cas des coefficients tordus s'en déduit sans peine, comme l'a observé Betley dans [Bet02]). Dans ce cas advient aussi le phénomène exceptionnel que le morphisme canonique $H_*(\Sigma_n) \to H_*(\Sigma_{n+1})$ est en tout degré un monomorphisme scindé. Néanmoins, on peut établir la stabilité homologique pour les groupes symétriques de façon nettement plus rapide que par un calcul complet, par des méthodes analogues à (et plus simples que) celles utilisées dans les autres cas.

Les **groupes linéaires** ont reçu une attention particulière, en raison des liens avec la K-théorie algébrique et de la difficulté à étudier leur stabilité homologique sur un anneau quelconque. Celle-ci se trouve en défaut sur certains anneaux (on peut le déduire facilement de résultats de van der Kallen), mais vaut pour la plupart des anneaux raisonnables : le cas le plus général connu est celui des anneaux de rang stable de Bass fini (par exemple, les algèbres commutatives de type fini sur un corps). L'article [vdK80] de van der Kallen qui établit ce résultat demeure un tour de force technique.

La stabilité homologique pour les **groupes orthogonaux** (ou unitaires) *hyperboliques* (i.e. du type $O_{n,n}$: la stabilité pour les groupes de type euclidien O_n peut s'avérer en défaut même sur des corps commutatifs) et symplectiques vaut également sous une hypothèse analogue (à savoir : que l'anneau de base a un rang stable unitaire fini), comme l'ont montré Mirzaii et van der Kallen (cf. [MvdK02]). Pour des groupes orthogonaux non hyperboliques mais euclidiens, par exemple (cas dont nous ne parlerons pas du tout ici), la situation est plus compliquée, même sur un corps commutatif : on a besoin d'hypothèses arithmétiques (cf. [Vog82] et [Col11]).

L'homologie des **groupes d'automorphismes des groupes libres**, en lien avec des considérations de topologie différentielle, a été étudiée de façon intensive depuis les années 1980 ; Hatcher a obtenu en 1995, dans [Hat95], la stabilité homologique pour ces groupes. La borne a été améliorée et de nombreux autres résultats connexes sont apparus depuis.

Remarque 1.12. Malgré les grandes similitudes des méthodes utilisées dans les différentes situations évoquées pour établir la stabilité homologique, il semble fort ardu de dégager un cadre formel convaincant les englobant. En tout cas, il paraît raisonnable de partir d'une catégorie monoïdale *symétrique* pour obtenir des résultats généraux : les sous-groupes de congruences des groupes linéaires (qu'on peut voir comme groupes d'automorphismes de sommes itérées dans une catégorie monoïdale non symétrique) ont parfois, même sur des anneaux finis, une homologie qui ne se stabilise pas (c'est vrai par exemple pour les groupes $Ker\,(GL_n(\mathbb{Z}/p^2) \to GL_n(\mathbb{Z}/p))$, qui sont abéliens), même s'il existe des classes intéressantes de groupes de congruences pour lesquelles vaut la stabilité. Charney a étudié cette question dans [Cha84].

1.4 Quelques résultats sur l'homologie stable à coefficients constants

Comme on l'a déjà mentionné, le calcul de l'homologie des groupes symétriques est un travail ancien de Nakaoka ([Nak60]), qui utilisait des méthodes topologiques ; dans [AM04] c'est une approche algébrique qui est suivie pour ce même calcul. Un résultat récent et difficile est le théorème remarquable suivant de Galatius (voir [Gal]) : l'inclusion $\Sigma_n \to \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}^{*n})$ des groupes symétriques dans les groupes d'automorphismes des groupes libres induit stablement un isomorphisme en homologie.

L'homologie des groupes linéaires est un problème difficile et fécond (même en se restreignant à des corps commutatifs). Les premiers résultats significatifs sont dus à Quillen (cf. [Qui72]), qui a calculé entièrement, lorsque k est un corps fini de caractéristique p, la (co)homologie des groupes $GL_n(k)$ en caractéristique première à p (ce pour tout n) ; il a également démontré que $\tilde{H}_*(GL_n(\bar{\mathbb{F}}_p);\mathbb{F}_p)=0$ (encore pour tout n ; $\tilde{H}$ désigne l'homologie réduite) et que $\tilde{H}_*(GL_\infty(k);\mathbb{F}_p)=0$. En revanche, le calcul de l'homologie (instable) en caractéristique p des $GL_n(k)$ (k étant toujours fini de caractéristique p) reste très largement ouvert.

Disons quelques mots sur la méthode de Quillen pour obtenir cette nullité stable : le point remarquable est que tout repose sur la nullité de $\tilde{H}_i(GL_n(K);\mathbb{F}_p)$ pour $i \leq d$ lorsque K est un corps à p^r éléments avec $r > \frac{d}{p-1}$ (n étant là encore arbitraire !). Cette annulation repose elle-même sur l'annulation homologique analogue pour le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, qui s'établit par récurrence en utilisant la théorie de Galois des corps finis pour comprendre l'action du groupe multiplicatif $K^\times$ sur l'homologie du groupe additif sous-jacent à un K-espace vectoriel. Cela acquis, on utilise, pour $k \subset K$ extension finie de degré l, les inclusions $GL_n(k) \to GL_n(K) \to GL_{ln}(k)$ pour déduire l'annulation de $\tilde{H}_i(GL_\infty(k);\mathbb{F}_p)$ de celle de $\tilde{H}_i(GL_\infty(K);\mathbb{F}_p)$. Nous mentionnons cet argument non seulement pour son élégance et sa simplicité, mais aussi parce que c'est sur une variante à coefficients que reposent les premiers résultats d'annulation homologique stable pour les groupes linéaires à coefficients tordus par un foncteur polynomial sans terme constant, dus à Betley (cf. [Bet89]). L'un des intérêts des arguments d'homologie des foncteurs de Scorichenko est de démontrer ce résultat de façon totalement générale (et rapide) sans nécessiter aucun argument arithmétique.

Un résultat remarquable de Suslin (cf. [Sus83]) affirme que si $k \subset K$ est une extension de corps (commutatifs) algébriquement clos et $n > 0$ un entier, l'inclusion induit un isomorphisme $H_*(GL_\infty(k);\mathbb{Z}/n) \to H_*(GL_\infty(K);\mathbb{Z}/n)$. En particulier, l'annulation stable de Quillen en caractéristique p s'étend au groupe linéaire infini sur tout corps algébriquement clos de caractéristique p.

Des résultats sont également disponibles pour l'homologie des groupes linéaires des corps de caractéristique nulle, et même de certains anneaux ; on évoquera rapidement certains d'entre eux dans le paragraphe suivant.

Les résultats de Quillen sur l'homologie des groupes linéaires sur les corps finis ont été généralisés aux autres suites infinies de groupes classiques (orthogonaux, unitaires, symplectiques) sur les corps finis par Fiedorowicz et Priddy notamment (cf. [FP78]). En particulier, la trivialité stable en caractéristique naturelle (en remplaçant le groupe orthogonal par son sous-groupe d'indice 2 lorsqu'on est en caractéristique 2) vaut encore dans ce cadre. La propriété de rigidité de Suslin susmentionnée pour les extensions de corps algébriquement clos vaut encore pour les groupes orthogonaux (hyperboliques) et symplectiques, comme l'a montré Karoubi (cf. [Kar83]), à qui l'on doit plusieurs autres résultats substantiels sur l'homologie stable des groupes orthogonaux et symplectiques (cf. [Kar80]).

1.5 Relations avec d'autres théories et problèmes (co)homologiques

K-théorie algébrique L'homologie du groupe linéaire infini sur un anneau A (à coefficients constants) est étroitement liée à la K-théorie algébrique de A, qu'on peut définir comme la suite des groupes d'homotopie de l'espace $BGL_\infty(A)^+$, la construction plus de Quillen étant relative au sous-groupe distingué parfait de $GL_\infty(A)$ engendré par les matrices élémentaires (une bonne référence pour cette construction est [Lod76] ; on peut aussi utiliser la construction catégorique Q, due également à Quillen — cf. [Qui73] —, ou la construction de Volodin, etc.). L'une des motivations de l'introduction de cet espace est de transcrire homotopiquement la structure d'algèbre de Hopf sur $H^*(GL_\infty(A))$: en effet, les morphismes $GL_n \times GL_m \to GL_{n+m}$ qui induisent cette structure ne font du classifiant de $GL_\infty(A)$ un H-espace qu'une fois appliquée la construction plus.

Plus directement reliée aux considérations de coefficients tordus dont on traite dans ce cours, la *K-théorie stable* de l'anneau A à coefficients dans un $GL(A)$-module (ici $GL := GL_\infty$) M : c'est par définition l'homologie de la fibre homotopique de l'application canonique $BGL(A) \to BGL(A)^+$ à coefficients tordus par M ; on la note $K^s_*(A; M)$. L'observation essentielle est que, dans la suite spectrale de Serre

$$E^2_{p,q} = H_p(GL(A); K^s_q(A; M)) = H_p(BGL(A)^+; K^s_q(A; M)) \Rightarrow H_{p+q}(GL(A); M)$$

l'action du groupe linéaire sur la K-théorie stable est *triviale*.

Nous n'en dirons pas davantage à ce sujet, car nous ne privilégierons pas la présentation des résultats de Scorichenko en terme de K-théorie stable, la version reliant directement l'homologie stable des groupes linéaires à coefficients tordus à l'homologie stable à coefficients constants et l'homologie de Hochschild de la catégorie $\mathbf{P}(A)$ nous semblant plus adaptée ici (de même, nous pourrions parler de K-théorie hermitienne stable pour évoquer les résultats sur l'homologie stable des groupes unitaires).

Conjecture de Friedlander-Milnor Elle affirme que si G est un groupe de Lie et G^δ désigne le même groupe muni de la topologie discrète, l'application canonique $H_*(BG^\delta; \mathbb{Z}/n) \to H_*(BG; \mathbb{Z}/n)$ est un isomorphisme pour entier $n > 0$. Le membre de droite est raisonnablement calculable, alors que celui de gauche est extrêmement difficile à estimer. Dans [Mil83], Milnor discute cette conjecture et la démontre dans le cas élémentaire des groupes résolubles.

Suslin a démontré que cette conjecture est valide stablement pour les groupes linéaires sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (cf. [Sus87]). Des progrès majeurs vers une démonstration complète de la conjecture ont récemment été réalisés par Morel.

Cohomologie des groupes algébriques, cohomologie continue La conjecture de Friedlander-Milnor tombe trivialement en défaut lorsqu'on remplace les coefficients finis par $\mathbb{Q}$ [4]. Néanmoins, de nombreux résultats existent sur l'homologie rationnelle des groupes de Lie rendus discrets et des sous-groupes remarquables ; c'est en un sens, selon l'appendice de [Mil83], une situation plus facile à traiter que

4. Cf. par exemple le groupe de Lie additif $\mathbb{R}$, dont l'homologie rationnelle comme groupe discret est énorme — algèbre à puissances extérieures de $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel — tandis que le classifiant du groupe de Lie est homologiquement trivial.

celle des coefficients finis. L'outil essentiel est de relier la cohomologie réelle d'un groupe de Lie rendu discret à la cohomologie *continue* du même groupe de Lie. On doit notamment à Borel des résultats très substantiels en la matière, qui permettent de calculer par exemple $H_*(GL_\infty(k);\mathbb{Q})$ lorsque k est le corps des réels, mais aussi un corps de nombres.

Une sorte d'analogue en caractéristique finie est le lien établi par Cline, Parshall, Scott et van der Kallen entre la cohomologie d'un groupe algébrique (semi-simple et déployé) sur $\mathbb{F}_p$, à coefficients dans une représentation rationnelle, après l'avoir suffisamment tordue par le morphisme de Frobenius, et la cohomologie du groupe discret des points sur $\mathbb{F}_{p^d}$, avec d assez grand, de cette représentation (cf. [CPSvdK77]). Du reste, les liens profonds entre (co)homologie des foncteurs polynomiaux et (co)homologie des groupes (discrets) d'automorphismes correspondants dont on traite dans ce cours possèdent un pendant en termes de groupes algébriques, les foncteurs polynomiaux devant eux-même être remplacés par les foncteurs *strictement* polynomiaux (possédant eux-même des liens étroits avec les foncteurs polynomiaux ordinaires : ainsi, dans [Bet99], Betley utilise les foncteurs strictement polynomiaux pour démontrer l'isomorphisme entre homologie des foncteurs et homologie stable des groupes linéaires (discrets) sur un corps fini à coefficients polynomiaux). Nous tairons dans la suite cet aspect (voir [Tou10]), que d'autres exposés de cette semaine sur les foncteurs aborderont.

Groupes de découpage L'homologie des groupes de Lie rendus discrets (mais pas dans le domaine stable, cette fois-ci, et avec des coefficients tordus appropriés) apparaît naturellement dans l'étude des groupes de découpage et du troisième problème de Hilbert. On renvoie le lecteur à l'ouvrage de Dupont [Dup01] à ce sujet.

2 Premier lien entre homologie stable des groupes discrets et homologie des foncteurs

Le but de cette section est de donner un premier résultat d'isomorphisme entre homologie stable de groupe à coefficients tordus et homologie des foncteurs (modulo la connaissance de l'homologie stable de groupe à coefficients constants) dans un cadre assez général, sans aucune hypothèse sur le foncteur par lequel on tord les coefficients. De ce fait, la démonstration en est formelle et élémentaire ; en revanche, hors du cas particulièrement favorable des groupes symétriques, on n'obtient guère de résultat directement exploitable, car l'homologie de foncteurs qui apparaît est assez inaccessible. C'est ensuite la comparaison de cette homologie de foncteurs à d'autres groupes d'homologie de foncteurs nettement plus exploitables qui permettra d'obtenir les théorèmes annoncés dans l'introduction (mais cela nécessitera davantage d'hypothèse et beaucoup plus de travail : ce sera l'objet des trois dernières sections).

Tous les résultats de cette partie sont tirés de [DV10] (plus précisément, de sa première section, sauf les considérations sur les groupes symétriques traitées dans un appendice de cet article).

Dans toute cette section, $\Bbbk$ est un anneau commutatif de base fixé (ce sera en général soit $\mathbb{Z}$, soit un corps) et $(\mathcal{C},\oplus,0)$ est une petite catégorie[5] monoïdale

5. Ou plus généralement, essentiellement petite.

symétrique dont l'unité 0 est objet initial, X est un objet de $\mathcal{C}$ et l'on s'intéresse aux groupes $G_n := \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X^{\oplus n})$. On cherche à relier leur homologie stable, i.e. l'homologie de leur colimite (sur n), à l'homologie de la catégorie $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ a un objet initial, l'homologie de $\mathcal{C}$ à coefficients constants est triviale (le foncteur constant $\Bbbk$ de $\mathcal{C} - \mathbf{Mod}$ est projectif — ou, d'un point de vue topologique, le classifiant de cette catégorie est contractile) : c'est la situation à coefficients tordus qui est intéressante.

2.1 Rappels élémentaires d'algèbre homologique dans la catégorie $\mathcal{C} - \mathbf{Mod}$ des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\Bbbk - \mathbf{Mod}$

La catégorie $\mathcal{C} - \mathbf{Mod}$ est une catégorie abélienne agréable : elle possède des limites et colimites quelconques, qui se calculent au but ; les colimites filtrantes sont exactes. De plus, elle possède un *ensemble* de générateurs projectifs distingués : $P_A^{\mathcal{C}} := \Bbbk[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)]$; en effet, le lemme de Yoneda fournit un isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}\,(P_A^{\mathcal{C}}, F) \simeq F(A)$. Cela permet de faire de l'algèbre homologique dans $\mathcal{C} - \mathbf{Mod}$ (qui possède aussi assez d'objets injectifs) comme dans des catégories de modules sur un anneau. En particulier, on dispose de la notion de *groupes de torsion* sur $\mathcal{C}$, qui s'obtiennent en dérivant à gauche le bifoncteur $- \underset{\mathcal{C}}{\otimes} - : (\mathbf{Mod} - \mathcal{C}) \times (\mathcal{C} - \mathbf{Mod}) \to \Bbbk - \mathbf{Mod}$ qu'on peut caractériser par sa commutation aux colimites *relativement à chaque variable* et des isomorphismes canoniques $P_A^{\mathcal{C}^{op}} \underset{\mathcal{C}}{\otimes} F \simeq F(A)$, $G \underset{\mathcal{C}}{\otimes} P_A^{\mathcal{C}} \simeq G(A)$, ou par l'adjonction

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(G \underset{\mathcal{C}}{\otimes} F, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathbf{Mod}}(F, \mathcal{H}om(G, M))$$

où $\mathcal{H}om(G, M) := \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(-, M) \circ G$.

L'*homologie* de $\mathcal{C}$ à coefficients dans $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} - \mathbf{Mod}$ est par définition $H_*(\mathcal{C}; F) := \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{C}}(\Bbbk, F)$ (où $\Bbbk$ désigne le foncteur constant en $\Bbbk$ de $\mathbf{Mod} - \mathcal{C}$).

On dispose également d'une fonctorialité en la catégorie $\mathcal{C}$: si $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur entre petites catégories, Φ induit un foncteur exact de précomposition $\Phi^* : \mathcal{D} - \mathbf{Mod} \to \mathcal{C} - \mathbf{Mod}$ et on dispose, pour $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D} - \mathbf{Mod}$, d'un morphisme naturel $H_*(\mathcal{C}; \Phi^* F) \to H_*(\mathcal{D}; F)$ vérifiant de nombreuses propriétés de cohérence.

2.2 Les morphismes naturels $H_*(G_\infty; F_\infty) \to H_*(\mathcal{C}; F)$ et $H_*(G_\infty; F_\infty) \to H_*(G_\infty \times \mathcal{C}; F)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a un foncteur évident d'image $X^{\oplus n}$ de la catégorie à un objet dont les flèches sont données par le groupe G_n (qu'on notera encore G_n) vers la catégorie $\mathcal{C}$: elle induit un morphisme naturel de $\Bbbk$-modules gradués $H_*(G_n; F(X^{\oplus n})) \to H_*(\mathcal{C}; F)$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H_*(G_n; F(X^{\oplus n})) \arrow[r] \arrow[d] & H_*(G_{n+1}; F(X^{\oplus n+1})) \arrow[dl] \\
H_*(\mathcal{C}; F) &
\end{tikzcd}$$

commute (parce qu'il y a une transformation naturelle de $G_n \to \mathcal{C}$ vers $G_n \to G_{n+1} \to \mathcal{C}$, donnée par le morphisme canonique $A \to A \oplus X$), de sorte qu'on obtient un morphisme naturel $H_*(G_\infty; F_\infty) \to H_*(\mathcal{C}; F)$.

On aimerait qu'il soit un isomorphisme (sous de bonnes hypothèses), mais une première obstruction fâcheuse vient du cas $F = \Bbbk$ (foncteur constant) : l'homologie $H_*(\mathcal{C}; \Bbbk)$ étant triviale, on ne peut s'attendre à ce que la flèche précédente le soit pour tout F (raisonnable) que si $H_*(G_\infty; \Bbbk)$ est également triviale ! Cela arrive dans un certain nombre de cas importants qui nous intéressent (par exemple : les groupes linéaires sur un corps fini k, avec $\Bbbk = k$), mais pas tous, on va donc faire en sorte de tenir compte « artificiellement » de l'homologie stable à coefficients constants des G_n, que les méthodes d'homologie des foncteurs développées dans ce cours ne permettent pas d'atteindre. Pour cela, on considère le foncteur de projection $\Pi : G_\infty \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et l'homologie $H_*(G_\infty \times \mathcal{C}; \Pi^* F)$, notée par abus, $H_*(G_\infty \times \mathcal{C}; F)$: elle donne le bon résultat pour F constant, et nous verrons qu'elle se calcule simplement à partir de $H_*(G_\infty; \Bbbk)$ et de $H_*(\mathcal{C}; F)$ (cf. paragraphe suivant).

On utilise donc les foncteurs $G_n \to G_n \times \mathcal{C}$ dont la composante $G_n \to G_n$ est l'identité et $G_n \to \mathcal{C}$ le foncteur utilisé précédemment : cela procure des morphismes naturels $H_*(G_n; F(X^{\oplus n})) \to H_*(G_\infty \times \mathcal{C}; F)$ puis $H_*(G_\infty; F_\infty) \to H_*(G_\infty \times \mathcal{C}; F)$.

2.3 Lien entre $H_*(\mathcal{C}; F)$, $H_*(G_\infty; \Bbbk)$ et $H_*(G_\infty \times \mathcal{C}; F)$

On renvoie à [DV10], § 2.3, où ces questions sont traitées en détail. On dispose de deux suites spectrales qui aboutissent à $H_*(G_\infty \times \mathcal{C}; F)$; elles dégénèrent souvent à la deuxième page. Les deux propriétés suivantes (qui relèvent de l'algèbre homologique classique) nous suffiront amplement :

Proposition 2.1. *Si $\Bbbk$ est un corps, alors on dispose d'un isomorphisme naturel*

$$H_*(G_\infty \times \mathcal{C}; F) \simeq H_*(G_\infty; \Bbbk) \underset{\Bbbk}{\otimes} H_*(\mathcal{C}; F)$$

de $\Bbbk$-modules gradués.

Proposition 2.2. *Si $\Bbbk = \mathbb{Z}$, alors on a un isomorphisme naturel gradué*

$$H_*(G_\infty \times \mathcal{C}; F) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{C}}(H_*(G_\infty; \mathbb{Z}), F)$$

où $H_*(G_\infty; \mathbb{Z})$ est vu comme un foncteur (contravariant) constant sur $\mathcal{C}$.

Si M est un groupe abélien (vu comme foncteur constant), on dispose de suites exactes naturelles scindées (en général non naturellement)

$$0 \to M \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} H_p(\mathcal{C}; F) \to \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{C}}(M, F) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, H_{p-1}(\mathcal{C}; F)) \to 0$$

de groupes abéliens.

2.4 Les hypothèses pertinentes sur $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ et X

1. (Transitivité stable) Pour tout morphisme $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$, il existe un automorphisme α de $A \oplus B$ faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[drr] & B \arrow[r] & A \oplus B \arrow[d, "\alpha"] \\ & & A \oplus B \end{tikzcd}$$

(On pourrait exiger un peu moins encore, mais cette propriété sera vérifiée dans tous les cas qui nous intéressent.)

Dans certains cas, l'axiome plus fort suivant sera vérifié :

(Version forte : transivité instable) pour tous objets A et B de $\mathcal{C}$, l'action du groupe $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(B)$ sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ est transitive.

2. (Stabilisateurs) Étant donné des objets A et B de $\mathcal{C}$, le morphisme de groupes canonique $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(B) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(A \oplus B)$ est une injection dont l'image est le sous-groupe des automorphismes φ faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & A \oplus B \arrow[d, "\varphi"] \\ & A \oplus B \end{tikzcd}$$

3. (Engendrement faible par X) pour tout objet A de $\mathcal{C}$, il existe un objet B de $\mathcal{C}$ et un entier naturel n tels que $A \oplus B \simeq X^{\oplus n}$

Dans certains cas, l'axiome suivant sera même vérifié :

(Engendrement fort par X) tout objet de $\mathcal{C}$ est isomorphe à un $X^{\oplus n}$.

2.5 Les exemples fondamentaux

1. (Groupes symétriques) $\mathcal{C}$ est la catégorie Θ des ensembles finis *avec injections*, la structure monoïdale est la réunion disjointe, on prend pour X un ensemble à un élément. Toutes les hypothèses précédentes sont satisfaites dans ce cas, comme on le vérifie aussitôt.
2. (Groupes linéaires) Soient A un anneau et $\mathbf{P}(A)$ la catégorie des A-modules à gauche projectifs de type fini, qu'on munit de la somme directe. Cette catégorie ne vérifie évidemment pas les propriétés requises. La sous-catégorie des monomorphismes scindés $\mathbf{M}(A)$ vérifie l'hypothèse de transitivité stable (et bien sûr celle d'engendrement), mais pas celle relative aux stabilisateurs. Pour y remédier, on considère une troisième catégorie (qui nous permet de simplifier les arguments de Scorichenko), notée $\mathbf{S}(A)$, qui a toujours les mêmes objets, mais dont les morphismes $M \to N$ sont les couples (v, u) formés d'applications A-linéaires $v : N \to M$ et $u : M \to N$ telles que $v \circ u = Id_M$. Cette fois-ci toutes les propriétés sont satisfaites avec $X = A$ (la transitivité n'est toutefois en général pas vraie sous forme instable, sauf dans des cas où l'anneau A est particulièrement gentil, par exemple un corps, tout comme l'engendrement fort).
3. (Groupes unitaires) Soient A un anneau muni d'une anti-involution, $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et $\mathbf{H}_\epsilon(A)$ (on omet par abus toute mention à l'anti-involution) la catégorie des A-modules à gauche projectifs de type fini ϵ-hermitiens non dégénérés. Alors toutes les propriétés précédentes sont vérifiées avec pour X l'espace hermitien hyperbolique standard A^2 — là encore, la transitivité instable n'est généralement pas vraie (elle l'est cependant si A est un corps par le théorème de Witt), et l'engendrement (qui vient de ce que, si (M, q) est un espace hermitien non dégénéré, $(M, q) \overset{\perp}{\oplus} (M, -q)$ est hyperbolique) n'est vrai que sous forme faible. Il est indispensable de considérer des espaces non dégénérés !

La situation précédente est en fait un cas particulier de celle-ci, appliquée à l'anneau $A^{op} \times A$ muni de l'anti-involution $(a,b) \mapsto (b,a)$ (avec $\epsilon = 1$).

2.6 Résultat principal

Proposition 2.3 ([DV10]). *Sous les trois hypothèses précédentes, le morphisme naturel de $\Bbbk$-modules gradués*

$$H_*(G_\infty; F_\infty) \to H_*(G_\infty \times \mathcal{C}; F)$$

est un isomorphisme pour tout $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{C} - \mathbf{Mod}$.

En particulier, si $\tilde{H}_*(G_\infty; \Bbbk) = 0$, alors le morphisme $H_*(G_\infty; F_\infty) \to H_*(\mathcal{C}; F)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Quitte à remplacer $\mathcal{C}$ par la sous-catégorie pleine des $X^{\oplus n}$, on se ramène aisément au cas où l'hypothèse d'engendrement *fort* est satisfaite.

Il suffit de démontrer cette assertion lorsque F est un foncteur projectif standard $P^{\mathcal{C}}_A$ (résoudre un foncteur arbitraire par des sommes directes de projectifs standard et comparer les suites spectrales). On se donne un entier m tel que $A \simeq X^{\oplus m}$ (hypothèse d'engendrement).

Comme $\tilde{H}_*(\mathcal{C}; P^{\mathcal{C}}_A) = 0$, $H_*(G_\infty \times \mathcal{C}; P^{\mathcal{C}}_A) \simeq H_*(G_\infty; \Bbbk)$. Par ailleurs, le lemme de Shapiro donne

$$H_*(G_n; P^{\mathcal{C}}_A(X^{\oplus n})) \simeq \bigoplus_{\text{orbites}} H_*(Stab; \Bbbk)$$

où la somme est prise sur les orbites de l'action de G_n sur l'ensemble $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X^{\oplus n})$ et $Stab$ désigne le stabilisateur d'un représentant de l'orbite. De plus, avec cette description, le morphisme $H_*(G_n; P^{\mathcal{C}}_A(X^{\oplus n})) \to H_*(G_\infty \times \mathcal{C}; P^{\mathcal{C}}_A)$ qui nous intéresse a pour composantes les morphismes $H_*(Stab, \Bbbk) \to H_*(G_\infty; \Bbbk)$ induits par les morphismes canoniques $Stab \subset G_n \to G_\infty$.

Montrons la surjectivité de notre morphisme. Pour cela, on établit que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'image de $H_*(G_i) \to H_*(G_\infty)$ (tous les coefficients étant pris dans $\Bbbk$) est incluse dans son image. Pour cela, il suffit de considérer, pour $n = m+i$, le morphisme $v : A \simeq X^{\oplus m} \to X^{\oplus m} \oplus X^{\oplus i} = X^{\oplus n}$. Son stabilisateur sous l'action de G_n contient l'image de G_i (ici on regarde une flèche $G_i \to G_n$ qui n'est pas celle de départ, mais lui est conjuguée par un automorphisme de permutation des facteurs, donc induit le même morphisme en homologie), ce qui établit notre assertion.

Montrons maintenant l'injectivité. L'hypothèse de transitivité stable montre que le morphisme $G_n \to G_{n+m}$ induit en homologie à coefficients tordus par $P^{\mathcal{C}}_A$ une application dont l'image est incluse (via la décomposition précédente) dans l'homologie du stabilisateur du morphisme canonique $A \simeq X^{\oplus m} \to X^{\oplus m+n}$. Mais ce stabilisateur n'est autre que l'image de G_n dans G_{m+n}, par hypothèse. On en déduit l'injectivité stable de nos applications, ce qui termine la démonstration. □

La suite de ce cours consiste à expliquer comment calculer, dans les cas favorables, l'homologie $H_*(\mathcal{C}; F)$ (on suppose $H_*(G_\infty; \Bbbk)$ connue). De fait, les catégories vérifiant les axiomes utilisés sont fort peu maniables pour le calcul homologique direct. On cherche donc à se ramener à d'autres catégories, par exemple $\mathbf{P}(A)$ plutôt que $\mathbf{S}(A)$ pour étudier l'homologie des groupes linéaires sur A. Cela demandera un peu de préparation, exposée dans la prochaine section. Il y a néanmoins un cas beaucoup plus facile à aborder, qu'on évoque maintenant rapidement.

2.7 Le cas des groupes symétriques

La catégorie « ensembliste » (i.e. dont les groupes d'automorphismes sont les groupes symétriques) dans laquelle le plus de calculs d'algèbre homologique fructueux ont été menés n'est pas la catégorie Θ des ensembles finis avec injections à laquelle on peut directement appliquer la proposition 2.3, mais la catégorie Γ des ensembles finis *pointés* (les morphismes étant toutes les fonctions envoyant le point de base de la source sur le point de base du but) — voir notamment l'article [Pir00b] de Pirashvili. En fait, on peut relier assez facilement, du point de vue homologique, les deux catégories. La tâche s'avère nettement plus aisée que dans les cas que l'on étudiera ultérieurement car *tous* les Γ-modules (foncteurs de Γ vers les $\Bbbk$-modules) sont analytiques, c'est-à-dire colimite d'objets polynomiaux, il n'y a donc pas à utiliser d'outil homologique spécifique à ces objets : des techniques d'algèbre homologique directes suffisent (on peut se contenter de regarder ce qui se passe sur les projectifs standard).

Si F est un Γ-module et i un entier naturel, on définit l'effet croisé $cr_i(F)$ par

$$cr_i(F) := Ker\,(F([i]) \to F([i-1])^{\oplus i})$$

(cf. [Pir00b] par exemple), où $[i] := \{0, 1, \dots, i\}$ (avec 0 pour point de base) et les applications $F([i]) \to F([i-1])$ sont induites par les morphismes $r_j : [i] \to [i-1]$ ($j = 1, \dots, i$) envoyant 0 et j sur 0, i sur i pour $0 < i < j$ et sur $i-1$ pour $j < i \leq n$. Le $\Bbbk$-module $cr_i(F)$ est muni d'une action naturelle du groupe symétrique Σ_i.

Théorème 2.4 (Betley). *Il existe un isomorphisme naturel*

$$H_*(\Sigma_\infty; F_\infty) \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_*(\Sigma_\infty \times \Sigma_i; cr_i(F))$$

de $\Bbbk$-modules gradués pour tout Γ-module F (où Σ_∞ agit trivialement sur $cr_i(F)$).

Ce résultat, démontré de manière directe par Betley dans [Bet02], est déduit de la proposition 2.3 dans l'appendice E de [DV10], à l'aide de résultats de décomposition sur les Γ-modules dus à Pirashvili (voir [Pir00a]) élémentaires mais très utiles et d'arguments d'adjonction. Ces résultats de décomposition se traduisent d'ailleurs par l'équivalence entre la catégorie des Γ-modules et celle des Ω-modules, où Ω est la catégorie des ensembles finis (non pointés) *avec surjections*, ce qui illustre l'un des principaux mots d'ordre de ce cours : ne jamais hésiter à transiter par de multiples catégories de foncteurs !

3 Foncteurs polynomiaux ; les résultats d'annulation de Scorichenko

Dans cette séance, $\mathcal{A}$ désigne une petite catégorie additive[6] (c'est-à-dire qu'elle possède des sommes et produits finis et qu'ils coïncident, on dispose donc d'un objet nul et d'une notion de somme directe — mais on ne suppose nullement qu'existent noyaux ou coyonaux). On suit fidèlement le travail (non publié) [Sco00], aux notations près.

3.1 Effets croisés et foncteurs polynomiaux

Si $f : A \to B$ est une fonction entre groupes abéliens, on dit que f est *polynomiale* de degré au plus $d \in \mathbb{N}$ si, pour toute famille $(x_0, \dots, x_d)$ d'éléments de A, on a

$$\sum_{I \subset \{0,\dots,d\}} (-1)^{|I|} f(x_I) = 0$$

où $|I|$ désigne le cardinal de I et l'on note $x_I = \sum_{i \in I} x_i$. (Si $A = B = \mathbb{Z}$, par exemple, cela équivaut à dire que f est la fonction associée à un polynôme de degré au plus d — toutefois, cette remarque ne s'étend pas à n'importe quel groupe abélien source A.) Il est exactement équivalent d'exiger que

$$\sum_{I \in \mathcal{P}(E)} (-1)^{|I|} f(x_I) = 0$$

pour toute famille (x_i) d'éléments de A, où E est un ensemble *pointé* à $d+2$ éléments (point de base inclus) et $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des sous-ensembles pointés de E.

On donne maintenant un analogue fonctoriel de cette définition, en partant de la variante pointée (qui n'est pas la plus habituelle mais sera légèrement plus commode d'un point de vue technique pour nos considérations ultérieures). Les notions d'effets croisés et de foncteurs polynomiaux qu'on va introduire sont anciennes : elles remontent à Eilenberg-Mac Lane [EML54], dans les années 1950. Néanmoins, l'étude systématique des foncteurs polynomiaux, spécialement de leurs propriétés homologiques, a connu un essor plus tardif (à partir des années 1980 sans doute) et n'a probablement pas encore livré tous ses secrets.

Supposons que E est un ensemble fini. On dispose d'un foncteur $t_E : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad A \mapsto A^{\oplus E}$; en fait cette construction est également fonctorielle en E. En particulier, si I est un sous-ensemble de E, on dispose de transformations naturelles $u_I : Id \to t_E$ et $p_I : t_E \to Id$ dont les composantes (évaluées sur un objet A) sont l'identité $A \to A$ pour les indices appartenant à I et 0 ailleurs. Si F est un objet de $\mathcal{A} - \mathbf{Mod}$, on note $T_E(F) = t_E^* F (= F \circ t_E)$; si l'on suppose que E est un ensemble fini *pointé*, on dispose de transformations naturelles

$$cr_E^{\mathcal{A},dir}(F) = \sum_{I \in \mathcal{P}(E)} (-1)^{|I|} F(u_I) : F \to T_E(F)$$

6. On peut considérer des foncteurs polynomiaux dans un cadre plus général, mais nous n'en aurons pas usage ; les arguments ici présentés sont spécifiques à cette situation, même si on peut les modifier convenablement pour traiter d'autres situations.

(effet croisé direct (pointé) ; les exposants seront omis s'il n'y a pas de confusion possible) et

$$cr_E^{\mathcal{A},inv}(F) = \sum_{I\in\mathcal{P}(E)} (-1)^{|I|} F(p_I) : T_E(F) \to F$$

(effet croisé inverse (pointé) ; les exposants seront encore souvent omis).

Définition 3.1. On dit qu'un foncteur $F : \mathcal{A} \to \Bbbk - \mathbf{Mod}$ est *polynomial* de degré au plus d s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

1. $cr_E^{\mathcal{A},dir}(F) = 0$ pour tout ensemble pointé E de cardinal au moins $d+2$;
2. $cr_E^{\mathcal{A},dir}(F) = 0$ pour un ensemble pointé E de cardinal $d+2$;
3. $cr_E^{\mathcal{A},inv}(F) = 0$ pour tout ensemble pointé E de cardinal au moins $d+2$;
4. $cr_E^{\mathcal{A},inv}(F) = 0$ pour un ensemble pointé E de cardinal $d+2$.

On dit que F est *analytique* s'il est colimite de foncteurs polynomiaux (si c'est le cas, on peut écrire F comme la colimite filtrante de sous-foncteurs polynomiaux).

Exemple 3.2. Les foncteurs polynomiaux de degré 0 sont exactement les foncteurs constants. À tout foncteur F correspond une décomposition canonique $F \simeq F(0) \oplus \bar{F}$ (où $F(0)$ est vu comme un foncteur constant), puisque 0 est objet nul de $\mathcal{A}$; le foncteur F est polynomial de degré au plus 1 si et seulement si $\bar{F}$ est additif au sens où le morphisme canonique $\bar{F}(A) \oplus \bar{F}(B) \to \bar{F}(A \oplus B)$ est un isomorphisme pour tous objets A et B de $\mathcal{A}$.

Remarque 3.3.
1. La classe des foncteurs polynomiaux de degré au plus d jouit de nombreuses propriétés de stabilité : elle est préservée par limites et colimites quelconques, stable par sous-quotients et par extensions.
2. Un produit tensoriel de foncteurs polynomiaux est polynomial et son degré est au plus la somme des degrés des foncteurs d'origine.
3. Lorsque cela fait sens, on vérifie également qu'une composition de foncteurs polynomiaux est polynomiale, le degré étant au plus le produit des degrés initiaux.
4. Les exemples typiques de foncteurs polynomiaux de degré d depuis une catégorie de modules sont les d-èmes puissances tensorielles, symétriques, divisées, extérieures... De plus, la puissance tensorielle T^d, munie de son action canonique du groupe symétrique Σ_d, joue un rôle essentiel dans la classification des foncteurs polynomiaux de degré au plus d modulo ceux de degré strictement inférieur, au moins lorsque la source est une catégorie de modules très sympathique — par exemple, la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps premier.
5. De nombreux foncteurs ne sont pas analytiques ; l'exemple 3.8 ci-après fournira même un foncteur (non nul) n'ayant aucun quotient analytique non nul.
6. On peut définir une notion de foncteur polynomial dans un cadre plus général que celui ici abordé (source additive), mais les résultats d'annulation homologique de Scorichenko exposés dans la suite de cette section ne s'appliquent essentiellement qu'à cette situation.

3.2 Adjonction entre effets croisés, application aux groupes de torsion

Le fait que $\mathcal{A}$ est une catégorie additive implique que, pour tout ensemble fini E, l'endofoncteur t_E de $\mathcal{A}$ est adjoint à lui-même : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, t_E(B)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(t_E(A), B)$ naturellement en A et B (ces groupes abéliens étant tous deux naturellement isomorphes à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)^E$). Via cette adjonction, les transformations naturelles u_I et p_I (où I est une partie de E) se correspondent, en ce sens que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, t_E(B)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,p_I)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(t_E(A), B) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(u_I,B)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \arrow[r, "="] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)
\end{tikzcd}$$

commute (de même qu'un analogue avec les flèches verticales dans l'autre sens).

Pour des raisons formelles, ces propriétés se transportent dans les catégories de foncteurs $\mathcal{A}-\mathbf{Mod}$ et $\mathbf{Mod}-\mathcal{A} = \mathcal{A}^{op}-\mathbf{Mod}$ (noter que dans la catégorie additive $\mathcal{A}^{op}$, les rôles de u_I et p_I sont intervertis par rapport à $\mathcal{A}$) : pour $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}-\mathcal{A}$ et $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}-\mathbf{Mod}$, on dispose d'un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(X, T_E(F)) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(T_E(X), F)$$

de $\Bbbk$-modules gradués et d'un diagramme commutatif, si E est maintenant un ensemble fini pointé,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(X, T_E(F)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(X, cr_E^{\mathcal{A},inv}(F))"'] & \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(T_E(X), F) \arrow[dl, "\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(cr_E^{\mathcal{A}^{op},inv}(X),F)"] \\
\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(X, F) &
\end{tikzcd}$$

On note par ailleurs $\kappa_E(X) = Ker\, cr_E^{\mathcal{A}^{op},inv}(X)$ et κ_E^n, pour $n \in \mathbb{N}$, la n-ième itération de cet endofoncteur de $\mathbf{Mod}-\mathcal{A}$. On désigne aussi par $\mathcal{K}_d$ la classe des $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}-\mathcal{A}$ tels que $cr_E^{\mathcal{A}^{op},inv}(X)$ soit un épimorphisme, où E est un ensemble pointé de cardinal $d+2$.

Proposition 3.4. *Soient $d \in \mathbb{N}$, E un ensemble fini pointé de cardinal $d+2$, $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}-\mathbf{Mod}$ polynomial de degré au plus d et $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}-\mathcal{A}$ tel que $\kappa_E^n(X)$ appartienne à $\mathcal{K}_d$ pour tout entier n. Alors*

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(X, F) = 0.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur le degré homologique. La suite exacte courte $0 \to \kappa_E(X) \to T_E(X) \xrightarrow{cr_E(X)} X \to 0$ ($cr_E(X)$ est par hypothèse surjectif) induit une suite exacte longue en homologie :

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_n^{\mathcal{A}}(\kappa_E(X), F) \to \mathrm{Tor}_n^{\mathcal{A}}(T_E(X), F) \xrightarrow{cr_E(X)_*} \mathrm{Tor}_n^{\mathcal{A}}(X, F) \to \mathrm{Tor}_{n-1}^{\mathcal{A}}(\kappa_E(X), F) \to \dots$$

Mais le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_n^{\mathcal{A}}(T_E(X),F) \arrow[r, "cr_E(X)_*"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Tor}_n^{\mathcal{A}}(X,F) \\
\mathrm{Tor}_n^{\mathcal{A}}(X,T_E(F)) \arrow[ur, "cr_E(F)_*=0"'] &
\end{tikzcd}$$

(F est polynomial de degré au plus d) montre que cette suite exacte longue se réduit à la nullité de $\mathrm{Tor}_0^{\mathcal{A}}(X,F)$ et des suites exactes courtes

$$0 \to \mathrm{Tor}_n^{\mathcal{A}}(X,F) \to \mathrm{Tor}_{n-1}^{\mathcal{A}}(\kappa_E(X),F) \to \mathrm{Tor}_{n-1}^{\mathcal{A}}(T_E(X),F) \to 0$$

pour $n > 0$. L'injectivité de la première flèche et l'hypothèse de récurrence appliquée à $\kappa_E(X)$ permettent de conclure. $\square$

3.3 Le critère de Scorichenko

Le critère précédent s'avère très peu commode à vérifier en pratique : la surjectivité d'un effet croisé ne pose généralement pas trop de problème, mais la description du noyau devient souvent difficile, et celle des noyaux itérés plutôt désespérée. L'idée, remarquablement simple et efficace, de Scorichenko consiste à trouver une condition plus forte que la surjectivité des effets croisés, mais qui reste raisonnablement vérifiable dans de nombreux cas intéressants, et qui soit préservée par l'application du foncteur κ_E pour des raisons formelles.

Un premier critère simple, qu'on mentionne pour mémoire, est très naturel mais impose une condition un peu trop forte pour donner de nombreuses applications utiles :

Proposition 3.5. *Soient $d \in \mathbb{N}$, E un ensemble fini pointé de cardinal $d+2$, $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}-\mathbf{Mod}$ polynomial de degré au plus d et $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}-\mathcal{A}$ tel que l'effet croisé inverse $cr_E(X)$ soit un épimorphisme scindé. Alors $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(X,F) = 0$.*

Théorème 3.6 (Scorichenko)**.** *Notons $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie de $\mathcal{A}$ ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont les monomorphismes scindés de $\mathcal{A}$ et $\theta : \mathbf{Mod}-\mathcal{A} \to \mathbf{Mod}-\mathbf{M}(\mathcal{A})$ le foncteur de restriction à $\mathbf{M}(\mathcal{A})$. Soient $d \in \mathbb{N}$, E un ensemble fini pointé de cardinal $d+2$, $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}-\mathbf{Mod}$ polynomial de degré au plus d et $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}-\mathcal{A}$ tel que $\theta cr_E(X) : \theta T_E(X) \to \theta X$ soit un épimorphisme scindé. Alors $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(X,F) = 0$.*

Démonstration. Comme le foncteur θ est exact et fidèle, l'hypothèse faite sur X implique que c'est un objet de $\mathcal{K}_d$. Il suffit donc de vérifier qu'elle implique la même propriété pour $\kappa_E(X)$.

Pour cela, on note d'abord que la transformation naturelle $cr_E^{\mathcal{A}^{op},inv}$ s'obtient à partir des p_I de $\mathcal{A}^{op}$, c'est-à-dire des u_I de $\mathcal{A}$, qui sont des monomorphismes scindés lorsque I est une partie non vide de E. On remarque par ailleurs que $T_E^2 := T_E \circ T_E \simeq T_{E\times E}$ (qu'on peut voir comme endofoncteur de $\mathbf{Mod}-\mathcal{A}$ ou $\mathbf{Mod}-\mathbf{M}(\mathcal{A})$) est muni d'une involution γ qui intervertit les deux facteurs du produit cartésien $E \times E$. Elle bénéficie de la propriété suivante : le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T_E \circ T_E \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, "T_E(cr_E)"] & \\
T_E \circ T_E \arrow[r, "cr_E(T_E)"'] & T_E
\end{tikzcd}$$

commute.

Considérons maintenant une section $s : \theta X \to \theta T_E(X)$ de $\theta cr_E(X)$. Notons s' le morphisme :

$$\theta T_E(X) = T_E(\theta X) \xrightarrow{T_E(s)} T_E(\theta T_E(X)) = \theta(T_E \circ T_E)(X) \xrightarrow{\gamma} \theta(T_E \circ T_E)(X).$$

C'est une section de $\theta cr_E(T_E(X))$ en raison de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
T_E\theta X \arrow[r, "T_E(s)"] \arrow[dr, "Id"'] & T_E\theta T_E X \arrow[rr, "="] \arrow[d, "T_E\theta cr_E(X)"] & & \theta T_E^2 X \arrow[r, "\theta\gamma_X"] \arrow[d, "\theta T_E cr_E(X)"'] & \theta T_E^2 X \arrow[dl, "\theta cr_E(T_E X)"] \\
& T_E\theta X \arrow[rr, "="] & & \theta T_E X &
\end{tikzcd}$$

De plus, cette section est compatible à s et au morphisme $cr_E(X) : T_E(X) \to X$ en ce sens que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\theta T_E X \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "\theta cr_E(X)"'] & \theta T_E^2 X \arrow[d, "\theta T_E cr_E(X)"] \\
\theta X \arrow[r, "s"] & \theta T_E(X)
\end{tikzcd}$$

commute, parce que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\theta T_E X \arrow[r, "="] \arrow[dr, "\theta cr_E(X)"'] & T_E\theta X \arrow[r, "T_E(s)"] \arrow[d, "cr_E(\theta X)"] & T_E\theta T_E X \arrow[r, "="] \arrow[dr, "cr_E(\theta T_E X)"'] & \theta T_E^2 X \arrow[r, "\theta\gamma_X"] \arrow[d, "\theta cr_E(T_E X)"] & \theta T_E^2 X \arrow[dl, "\theta T_E cr_E(X)"] \\
& \theta X \arrow[rr, "s"'] & & \theta T_E(X) &
\end{tikzcd}$$

commute. Cela montre que s' induit une section de $cr_E(\kappa_E(X))$ et achève la démonstration. $\square$

Corollaire 3.7. *Soient $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} - \mathbf{Mod}$ analytique et $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod} - \mathcal{A}$ tel que $\theta cr_E(X) : \theta T_E(X) \to \theta X$ soit un épimorphisme scindé pour tout ensemble fini pointé E. Alors $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(X, F) = 0$.*

Exemple 3.8. Supposons que $T : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ est un foncteur additif. Alors $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}}(\bar{\Bbbk}^T, F) = 0$ (si E est un groupe abélien, on note $\bar{\Bbbk}^E$ le noyau de l'évaluation $\Bbbk^E \to \Bbbk$ en 0 ; cela définit un foncteur contravariant des groupes abéliens vers les $\Bbbk$-modules) si $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} - \mathbf{Mod}$ est analytique.

Soit en effet E un ensemble fini pointé, de point de base a. Pour un objet A de $\mathcal{A}$, on définit une application linéaire $\bar{\Bbbk}^{T(A)} \to \bar{\Bbbk}^{T(A^{\oplus E})}$ en associant à une fonction $f : T(A) \to \Bbbk$ (nulle en 0) la fonction $g : T(A^{\oplus E}) \to \Bbbk$ définie par $g(y) = f(x)$ si $y = T(i)(x)$, où $i : A \to A^{\oplus E}$ est l'inclusion du facteur correspondant au point de base, $g(y) = 0$ sinon. On laisse au lecteur le soin de vérifier que cela définit une section de l'effet croisé fonctorielle en A relativement à $\mathbf{M}(\mathcal{A})$, permettant d'appliquer le corollaire précédent.

4 Deuxième description de l'homologie stable des groupes linéaires et unitaires à coefficients polynomiaux par l'homologie des foncteurs

Soient A un anneau muni d'une anti-involution, $\epsilon = 1$ ou -1, $\mathbf{P}(A)$ la catégorie des A-modules projectifs de type fini, $\mathbf{H}_\epsilon^{deg}(A)$ la catégorie des A-modules projectifs de type fini munis d'une forme ϵ-hermitienne éventuellement dégénérée, et $\mathbf{H}_\epsilon(A)$ la sous-catégorie pleine des espaces non dégénérés.

Chacune de ces catégories est intéressante du point homologique pour les raisons suivantes.

Tout d'abord, $\mathbf{H}_\epsilon^{deg}(A)$ se prête relativement bien aux calculs homologiques (au moins lorsque 2 est inversible dans A) car c'est la catégorie des objets de $\mathbf{P}(A)$ munis d'un élément de $\mathrm{S}^2_\epsilon(M)$, où S^2_ϵ est vu ici comme un foncteur contravariant ensembliste depuis $\mathbf{P}(A)$. Cela entraîne formellement la propriété qui suit :

Proposition 4.1. *Il existe un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{H}_\epsilon^{deg}(A)}(X, \iota(F)) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathbf{P}(A)}(\omega(X), F)$$

de $\Bbbk$-modules gradués, où $\iota : \mathcal{A} - \mathbf{Mod} \to \mathbf{H}_\epsilon^{deg}(A) - \mathbf{Mod}$ est le foncteur exact de précomposition par l'oubli de la forme quadratique et le foncteur exact $\omega : \mathbf{Mod} - \mathbf{H}_\epsilon^{deg}(A) \to \mathbf{Mod} - \mathbf{P}(A)$ est donné sur les objets par

$$\omega(X)(M) = \bigoplus_{q \in \mathrm{S}^2_\epsilon(M)} X(M, q).$$

Corollaire 4.2. *Il existe un isomorphisme naturel*

$$H_*(\mathbf{H}_\epsilon^{deg}(A), \iota(F)) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathbf{P}(A)}(\Bbbk[\mathrm{S}^2_\epsilon], F)$$

de $\Bbbk$-modules gradués.

(Nous verrons dans la dernière partie de ce cours comment calculer de tels $\Bbbk$-modules dans les cas favorables.)

D'un autre côté, le résultat principal de la deuxième séance nous apprend que :

Proposition 4.3. *Pour tout foncteur $F \in \mathrm{Ob}\, \mathbf{H}_\epsilon(A) - \mathbf{Mod}$, il existe un isomorphisme naturel*

$$H_*(U^\epsilon_\infty(A); F_\infty) \simeq H_*(U^\epsilon_\infty(A) \times \mathbf{H}_\epsilon(A); F)$$

(avec action triviale de $U^\epsilon_\infty(A)$ à droite) de $\Bbbk$-modules gradués.

Dans cette séance, nous allons montrer que, lorsque F est l'image par le foncteur ι d'un foncteur analytique de $\mathcal{A} - \mathbf{Mod}$, les homologies de $\mathbf{H}_\epsilon(A)$ et $\mathbf{H}_\epsilon^{deg}(A)$ à coefficients dans F coïncident.

4.1 Extensions de Kan dérivées

Soit $i : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre petites catégories. Il existe une « adjonction »

$$i_!(G) \underset{\mathcal{D}}{\otimes} F \simeq G \underset{\mathcal{C}}{\otimes} i^*(F)$$

naturelle en $G \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod} - \mathcal{C}$ et $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D} - \mathbf{Mod}$, où

$$i_!(G)(D) := G \underset{\mathcal{C}}{\otimes} i^*(P_D^{\mathcal{D}}).$$

En général, le foncteur $i_!$ n'est pas exact, de sorte que cette adjonction ne se propage pas directement aux groupes de torsion supérieurs. Néanmoins, on peut dériver cette adjonction en une suite spectrale de Grothendieck (ou de foncteurs composés) — cf. par exemple [Wei94] corollaire 5.8.4 (tout marche bien ici car $i_!$ préserve les projectifs) qui prend la forme

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{D}}(\mathbb{L}_q(i_!)(G), F) \Rightarrow \mathrm{Tor}^{\mathcal{C}}_{p+q}(G, i^*(F))$$

(avec une différentielle d^r sur E^r de degré $(-r, r-1)$), où les $\mathbb{L}_q(i_!)$ sont les foncteurs dérivés à gauche du foncteur exact à droite $i_!$, qui sont donnés par

$$\mathbb{L}_q(i_!)(G)(D) = \mathrm{Tor}_q^{\mathcal{C}}(G, i^*(P_D^{\mathcal{D}})).$$

En particulier, prenant pour G le foncteur constant $\Bbbk$, on obtient une suite spectrale

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{D}}(L_q, F) \Rightarrow H_{p+q}(\mathcal{C}; i^*(F))$$

où

$$L_q(D) = H_q(\mathcal{C}/D; \Bbbk)$$

où $\mathcal{C}/D$ désigne la catégorie des objets C de $\mathcal{C}$ munis d'un morphisme $D \to i(C)$ dans $\mathcal{D}$, les flèches étant celles de $\mathcal{C}$ qui font commuter le diagramme évident (l'équivalence avec la formule précédente s'obtient par un jeu facile d'adjonction). Si l'on note $X_q(D) = \tilde{H}_q(\mathcal{C}/D; \Bbbk)$, on a donc la proposition suivante :

Proposition 4.4. *Si $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D} - \mathbf{Mod}$ vérifie*

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{D}}(X_q, F) = 0$$

pour tout $q \in \mathbb{N}$, alors le foncteur i induit un isomorphisme

$$i_* : H_*(\mathcal{C}; i^*(F)) \xrightarrow{\simeq} H_*(\mathcal{D}; F)$$

en homologie à coefficients dans F.

Nous allons appliquer cette propriété lorsque $i : \mathbf{H}_\epsilon(A) \hookrightarrow \mathbf{H}_\epsilon^{deg}(A)$ est le foncteur d'inclusion et F l'image par le foncteur ι d'un foncteur analytique de $\mathbf{P}(A) - \mathbf{Mod}$. Par la propriété 4.1, on voit qu'on peut le faire en appliquant le critère de Scorichenko (corollaire 3.7) aux foncteurs $\omega(X_q)$.

4.2 Cas de l'inclusion $\mathbf{H}_\epsilon(A) \hookrightarrow \mathbf{H}_\epsilon^{deg}(A)$: préparation

Il n'est pas question de calculer les valeurs des foncteurs X_q. Nous utiliserons uniquement les propriétés suivantes :

1. X_q envoie l'objet initial 0 de $\mathbf{H}_\epsilon^{deg}(A)$ sur 0 ;
2. X_q envoie toute inclusion canonique $M \hookrightarrow M \overset{\perp}{\oplus} H$, où M est un objet de $\mathbf{H}_\epsilon^{deg}(A)$ et H un objet de $\mathbf{H}_\epsilon(A)$, sur un isomorphisme.

La première propriété résulte de ce que $\mathbf{H}_\epsilon(A)/0$ a un objet initial. Pour la seconde, on note que le foncteur $\mathbf{H}_\epsilon(A)/M \to \mathbf{H}_\epsilon(A)/(M \overset{\perp}{\oplus} H)$ induit par $- \overset{\perp}{\oplus} H$ est une équivalence de catégories. Cela provient essentiellement de l'existence d'un supplémentaire orthogonal pour tout sous-espace *non dégénéré* d'un espace hermitien : un quasi-inverse de ce foncteur est donné en associant à $(N, f : M \overset{\perp}{\oplus} H \to N)$ l'objet $(f(H)^\perp (\subset N), \bar{f} : M \to f(H)^\perp)$ de $\mathbf{H}_\epsilon(A)/M$.

Lemme 4.5. *Soit V un A-module projectif de type fini. Il existe un objet $H(V)$ de $\mathbf{H}_\epsilon(A)$ vérifiant, pour toute forme hermitienne (éventuellement dégénérée) q sur V, les propriétés suivantes :*

1. *il existe un morphisme $\alpha : (V, q) \to H(V)$ de $\mathbf{H}_\epsilon^{deg}(A)$ dont l'application A-linéaire sous-jacente appartient à $\mathbf{M}(A)$;*
2. *de plus, pour $q = 0$, on peut choisir α de sorte que tout morphisme de $(V, 0)$ vers un objet de $\mathbf{H}_\epsilon(A)$ dont le morphisme sous-jacent de $\mathbf{P}(A)$ appartienne à $\mathbf{M}(A)$ se factorise par α ;*
3. *pour tous morphismes $f : V \to W$ de $\mathbf{M}(A)$ et $\varphi : (W, 0) \to E$ de $\mathbf{H}_\epsilon^{deg}(A)$, avec E non dégénéré, il existe une factorisation*

$$\begin{tikzcd}
(V,q) \arrow[r, "\begin{pmatrix} Id \\ f \end{pmatrix}"] \arrow[dr, dashed] & (V,q) \overset{\perp}{\oplus} (W,0) \arrow[r, "Id \oplus \varphi"] & (V,q) \overset{\perp}{\oplus} E \\
& H(V) \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Nous ne donnerons pas les détails, élémentaires et classiques, de cette propriété. Bornons-nous à mentionner que l'on prend pour $H(V)$ le A-module $V \oplus V^*$ muni de la forme hermitienne de matrice [7] $\begin{pmatrix} 0 & 1_{M^*} \\ \epsilon.1_M & 0 \end{pmatrix}$. Une bonne référence pour les espaces hermitiens sur un anneau quelconque est [Knu91] ; on trouvera aussi une démonstration complète du lemme précédent dans [Dja].

4.3 Le résultat principal

On note ici ι' la précomposition par l'oubli de la forme quadratique $\mathbf{H}_\epsilon(A) \to \mathbf{P}(A)$.

7. Plus précisément, il s'agit de la matrice de la forme sesquilinéaire associée $M \oplus M^* \to (M \oplus M^*)^* \simeq M^* \oplus M$ — le morphisme canonique $M \to (M^*)^*$ est un isomorphisme car M est projectif de type fini.

Théorème 4.6 ([DV10] pour A corps fini, [Dja] pour le cas général)**.** *Si $F \in \operatorname{Ob} \mathbf{P}(A) - \mathbf{Mod}$ est analytique, l'inclusion $\mathbf{H}_\epsilon(A) \hookrightarrow \mathbf{H}_\epsilon^{deg}(A)$ induit un isomorphisme*
$$H_*(\mathbf{H}_\epsilon(A); \iota'(F)) \xrightarrow{\simeq} H_*(\mathbf{H}_\epsilon^{deg}(A); \iota(F)).$$

Démonstration. D'après ce qui précède, il suffit de construire des sections faiblement fonctorielles aux applications $\Bbbk$-linéaires
$$cr_E(\omega(X_n))(V) : \omega(X_n)(V^{\oplus E}) = \bigoplus_{Q \in \mathrm{S}^2_\epsilon(V^{\oplus E})} X_n(V^{\oplus E}, Q) \to \omega(X_n)(V) = \bigoplus_{q \in \mathrm{S}^2_\epsilon(V)} X_n(V, q)$$
où E est un ensemble pointé fini (de point de base noté e), n un entier naturel et V un A-module projectif de type fini ; ici faiblement fonctoriel signifie fonctoriel relativement aux monomorphismes scindés. Notons $\pi = p_e : V^{\oplus E} \to V$ la projection sur le facteur correspondant à e et définissons une application linéaire $s(V) : \omega(X_n)(V) \to \omega(X_n)(V^{\oplus E})$ par sa composante sur $X_n(V, q)$ donnée par
$$X_n(V,q) \simeq X_n\big((V,q) \overset{\perp}{\oplus} H(V^{\oplus E \setminus e})\big) \xrightarrow{X_n\left((V,q) \overset{\perp}{\oplus} \alpha\right)} X_n\big((V,q) \overset{\perp}{\oplus} (V^{\oplus E \setminus e}, 0)\big) = \dots$$
$$X_n(V^{\oplus E}, \pi^* q) \hookrightarrow \omega(X_n)(V^{\oplus E})$$
où $\alpha : (V^{\oplus E \setminus e}, 0) \to H(V^{\oplus E \setminus e})$ est comme dans le lemme 4.5. Vérifions d'abord que cette définition ne dépend pas du choix de α. Supposons $\beta : (V, 0) \to L$ donné, avec $L \in \operatorname{Ob} \mathbf{H}_\epsilon(A)$ et le morphisme de $\mathbf{P}(A)$ sous-jacent à β appartenant à $\mathbf{M}(A)$. Alors il existe (par le lemme) une factorisation
$$\begin{tikzcd}
(V^{\oplus E \setminus e}, 0) \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & L \\
& H(V^{\oplus E \setminus e}) \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$
ce qui implique que les diagrammes
$$\begin{tikzcd}
(V,q) \overset{\perp}{\oplus} (V^{\oplus E \setminus e}, 0) \arrow[rr, "(V,q) \overset{\perp}{\oplus} \beta"] \arrow[dr, "(V,q) \overset{\perp}{\oplus} \alpha"'] & & (V,q) \overset{\perp}{\oplus} L & (V,q) \arrow[l] \arrow[dll] \\
& (V,q) \overset{\perp}{\oplus} H(V^{\oplus E \setminus e}) \arrow[ur, "(V,q) \overset{\perp}{\oplus} \gamma"] & &
\end{tikzcd}$$
(où les deux flèches non spécifiées sont les inclusions canoniques) puis
$$\begin{tikzcd}
X_n(V,q) \arrow[r, "\simeq"] & X_n\big((V,q) \overset{\perp}{\oplus} H(V^{\oplus E \setminus e})\big) \arrow[r, "X_n\left((V,q) \overset{\perp}{\oplus} \alpha\right)"] & X_n\big((V,q) \overset{\perp}{\oplus} (V^{\oplus E \setminus e}, 0)\big) \\
X_n(V,q) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[u, "="] & X_n\big((V,q) \overset{\perp}{\oplus} L\big) \arrow[r, "X_n\left((V,q) \overset{\perp}{\oplus} \beta\right)"] \arrow[u, "X_n\left((V,q) \overset{\perp}{\oplus} \gamma\right)"] & X_n\big((V,q) \overset{\perp}{\oplus} (V^{\oplus E \setminus e}, 0)\big) \arrow[u, "="']
\end{tikzcd}$$
commutent.

Cela établit non seulement l'indépendance de $s(V)$ envers le choix de α, mais aussi le caractère faiblement fonctoriel de cette application : si $u : V \to W$ est un morphisme de $\mathbf{M}(A)$, on peut appliquer ce qui précède à

$$(V^{\oplus E \setminus e}, 0) \xrightarrow{u} (W^{\oplus E \setminus e}, 0) \xrightarrow{\alpha_W} H(W^{\oplus E \setminus e}, 0)$$

qui vérifie toutes les hypothèses requises pour β.

Examinons maintenant les composées

$$\omega(X_n)(V) \xrightarrow{s(V)} \omega(X_n)(V^{\oplus E \setminus e}) \xrightarrow{u_I^*} \omega(X_n)(V)$$

où I est une partie pointée de E. Leurs composantes sont données par

$$X_n(V,q) \simeq X_n\big((V,q) \overset{\perp}{\oplus} H(V^{\oplus E \setminus e})\big) \xrightarrow{X_n\left((V,q)\overset{\perp}{\oplus}\alpha\right)} X_n\big((V,q) \overset{\perp}{\oplus} (V^{\oplus E \setminus e}, 0)\big) = \dots$$

$$X_n(V^{\oplus E}, \pi^* q) \xrightarrow{u_I^*} X_n(V, u_I^* \pi^* q) = X_n(V,q)$$

(on $\pi u_I = Id_V$ car $e \in I$). Pour I réduit à e, c'est l'identité, car $u_e : (V,q) \to (V,q) \overset{\perp}{\oplus} (V^{\oplus E \setminus e}, 0)$ est l'inclusion canonique.

Si I contient strictement e, alors on peut trouver un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(V,q) \arrow[r, "u_I = \begin{pmatrix} Id \\ u_J \end{pmatrix}"] \arrow[dr] & (V,q) \overset{\perp}{\oplus} (V^{\oplus E \setminus e}, 0) \arrow[r, "(V,q)\overset{\perp}{\oplus}\alpha"] & (V,q) \overset{\perp}{\oplus} H(V^{\oplus E \setminus e}) \\
& H(V^{\oplus E \setminus e}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

grâce au lemme 4.5, où $J = I \setminus e$ (qui est non vide, donc u_J est un monomorphisme scindé). Comme $H(V^{\oplus E \setminus e})$ est non dégénéré, X_n l'envoie sur 0, et notre composée est donc nulle. Finalement, $s(V)$ est bien (au signe près) une section de l'effet croisé $cr_E(\omega(X_n))(V)$, d'où le théorème. □

Cas particulier : le théorème de Scorichenko sur l'homologie des groupes linéaires Nous donnons maintenant le résultat fondamental de [Sco00] (avec nos notations), qui constitue un cas particulier du théorème 4.6.

Théorème 4.7 (Scorichenko)**.** *Soit* $B : \mathbf{P}(A)^{op} \times \mathbf{P}(A) \to \Bbbk - \mathbf{Mod}$ *un bifoncteur polynomial. Il existe un isomorphisme naturel*

$$H_*(GL_\infty(A); B_\infty) \simeq HH_*(GL_\infty(A) \times \mathbf{P}(A); B)$$

de $\Bbbk$*-modules gradués.*

Dans le cas où $A = \Bbbk$ est un corps fini, l'homologie de $GL_\infty(\Bbbk)$ à coefficients dans $\Bbbk$ est triviale (Quillen [Qui72]), on peut donc se débarrasser du terme GL_∞ dans le membre de droite.

On déduit le théorème précédent du théorème 4.6 en considérant l'anneau $A^{op} \times A$ muni de l'anti-involution échangeant les deux facteurs : ses groupes unitaires ne sont autres que les groupes linéaires sur A, et obtenir l'homologie de Hochschild à partir de l'homologie de la catégorie des $A^{op} \times A$-espaces hermitiens (éventuellement dégénérés ; ici $\epsilon = 1$) est un jeu élémentaire d'adjonction (à l'aide de la *catégorie des factorisations* de Quillen, introduite dans [Qui73]).

5 Exemples de calculs et autres applications

On va expliquer comment mener certains calculs de $\Bbbk$-modules gradués du type

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{P}(A)}(\Bbbk[S^2_A]^\vee, F)$$

pour un foncteur polynomial F, où A est un anneau commutatif muni de l'involution triviale (et $\epsilon = 1$, i.e. on traite de groupes orthogonaux plutôt que de groupes symplectiques) — cette restriction, destinée surtout à alléger les notations, est contingente — et dans lequel 2 est inversible — cette hypothèse s'avère en revanche fondamentale pour que les calculs ne soient pas inextricables (dans [DV10], on donne toutefois quelques résultats très partiels en caractéristique 2).

5.1 Réductions du problème

On commence par se ramener à calculer

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{P}(A)}(\Bbbk[T^2_A]^\vee, F)$$

dont le précédent groupe de torsion est facteur direct grâce à l'inversibilité de 2 dans A (qui garantit que S^2_A est facteur direct dans T^2_A). Cette étape n'est pas innocente : même quand on sait déterminer entièrement ces groupes de torsion, la détermination explicite de l'idempotent donnant le facteur qui nous intéresse constitue tout sauf un problème trivial. Néanmoins, on peut y arriver dans certains cas.

Le $\Bbbk$-module gradué précédent n'est autre qu'une homologie de Hochschild :

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{P}(A)}(\Bbbk[T^2_A]^\vee, F) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(A)}((M,N) \mapsto \Bbbk[(M\otimes N)^*], \oplus^* F) \simeq \dots$$
$$\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{P}(A)^{op}\times\mathbf{P}(A)}((U,V) \mapsto \Bbbk[\mathrm{Hom}_A(V,U)], s^*F) \simeq HH_*(\mathbf{P}(A); s^*F)$$

où $s : \mathbf{P}(A)^{op} \times \mathbf{P}(A) \to \mathbf{P}(A) \quad (U,V) \mapsto U^* \oplus V$, où le premier isomorphisme repose sur l'adjonction entre diagonale et somme directe et la seconde sur l'isomorphisme canonique $(U^* \otimes V)^* \simeq \mathrm{Hom}_A(V,U)$ pour U,V projectifs de type fini.

Nous nous concentrerons maintenant sur quelques cas particuliers importants :

1. F est (un terme) d'un foncteur exponentiel gradué de Hopf $E^\bullet$, i.e. d'une suite de foncteurs $(E^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $E^0 = \Bbbk$ et munie d'isomorphismes naturels
$$E^n(U\oplus V) \simeq \bigoplus_{i+j=n} E^i(U)\otimes E^j(V)$$
(les produits tensoriels sont implicitement pris sur $\Bbbk$) vérifiant des conditions de compatibilité (une référence pour cette notion est [FFSS99], par exemple, ou l'appendice B de [DV10]), notamment une propriété d'ϵ-commutativité (où $\epsilon \in \{-1,1\}$ vaut 1 pour les puissances symétriques ou divisées et -1 pour les puissances extérieures) ;
2. F est une puissance tensorielle sur $\Bbbk$ (on suppose alors que A est une $\Bbbk$-algèbre) ; on bénéficie alors (« formule du binôme ») d'isomorphismes naturels
$$T^n_\Bbbk(U\oplus V) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \left(T^i_\Bbbk(U)\otimes T^j_\Bbbk(V)\right)\uparrow^{\Sigma_n}_{\Sigma_i\times\Sigma_j}$$
vérifiant encore des conditions de compatibilité.

On peut donc ramener le calcul de $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{P}(A)}(\Bbbk[T_A^2]^\vee, F)$ à celui de groupes de torsions entre foncteurs polynomiaux usuels sur $\mathbf{P}(A)$ (par exemple, dans le premier cas, à $\mathrm{Tor}_*((E^i)^\vee, E^j)$, en supposant que les E^i prennent des valeurs $\Bbbk$-plates). On dispose des renseignements suivants sur l'idempotent qui nous intéresse :

- l'involution qui échange les deux facteurs dans T_A^2 se lit sur les $\mathrm{Tor}_*((E^i)^\vee, E^j)$ (dans le premier cas) ou les $\mathrm{Tor}_*((T_\Bbbk^i)^\vee, T_\Bbbk^j)$ (dans le second) grâce à l'involution canonique de $\mathrm{Tor}_*(X^\vee, X)$ existant pour tout foncteur X (on dispose d'un isomorphisme d'adjonction $\mathrm{Tor}_*(Y^\vee, X) \simeq \mathrm{Tor}_*(X^\vee, Y)$ qui donne cette involution pour $Y = X$), au signe ϵ^{ij} près dans le premier cas ;
- on peut décrire l'idempotent qui nous intéresse — ou plus exactement, le morphisme induit par $x \mapsto x + \bar{x}$ sur T_A^2 (qui a la même image puisque 2 est inversible) — comme la convolution entre l'identité et l'involution précédente, où l'on utilise la structure de foncteur de Hopf (ou son analogue dans le second cas) pour munir les groupes de torsion qu'on veut calculer d'une structure d'algèbre de Hopf (bigraduée).

5.2 Quelques calculs

En se fondant sur les calculs puissants de [FFSS99] (qui procurent la structure d'algèbre de Hopf dont on a besoin et permettent de comprendre l'involution susmentionnée), on parvient par exemple au résultat suivant (qu'on a exprimé en cohomologie pour le rendre plus intuitif) :

Théorème 5.1 (Cf. [DV10]). *Soit k un corps fini de cardinal q impair. L'algèbre de cohomologie stable des groupes orthogonaux sur k à coefficients dans les puissances symétriques est polynomiale sur des générateurs de bidegré $(2q^s m, q^s + 1)$ (où le premier degré est le degré homologique et le second le degré interne) indexés par les entiers naturels m et s.*

Dans [Dja], on montre le résultat suivant, qu'on peut obtenir à partir de la considération de la seconde puissance extérieure et du théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg, qui décrit (en particulier) l'homologie de Hochschild d'un corps commutatif.

Proposition 5.2. *Soient k un corps commutatif de caractéristique nulle ; pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathfrak{o}_{n,n}(k)$ la représentation adjointe de $O_{n,n}(k)$. Alors le k-espace vectoriel gradué*

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*(O_{n,n}(k); \mathfrak{o}_{n,n}(k))$$

est isomorphe au produit tensoriel (sur $\mathbb{Q}$) de $H_*(O_{\infty,\infty}(k); \mathbb{Q})$ (où $O_{\infty,\infty}$ est la colimite des $O_{n,n}$) et de la partie impaire de la k-algèbre graduée $\Omega_k^* = \Lambda^*(\Omega_k^1)$ des différentielles de Kähler de k (vu comme $\mathbb{Q}$-algèbre). En particulier, cet espace vectoriel gradué est nul si k est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$.

On peut aussi mener certains calculs sur des anneaux qui ne sont pas des corps : dans [Dja], on donne plusieurs énoncés pour des anneaux (commutatifs avec 2 inversible) sans torsion sur $\mathbb{Z}$.

Il est à noter (voir [Dja]) que la détermination de $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{P}(A)}(\Bbbk[S_A^2]^\vee, F)$ comme $\Bbbk$-module gradué, lorsque F est une puissance tensorielle, dépend uniquement de la connaissance de $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{P}(A)}(Id^\vee, Id)$ comme module gradué : la connaissance de l'involution sur ces groupes de torsion n'est pas nécessaire.

5.3 Quelques propriétés qualitatives

Une observation élémentaire mais très efficace de Touzé (voir [Tou10], qui est déclinée dans [DV10] dans le cadre des groupes discrets qui est le nôtre) sur les produits en cohomologie des foncteurs permet de déduire de la comparaison entre (co)homologie des foncteurs et (co)homologie stable des groupes orthogonaux le résultat suivant :

Proposition 5.3. *Soient k un corps fini de cardinal impair, $\Bbbk = k$, F et G deux foncteurs polynomiaux de $\mathbf{P}(k) - \mathbf{Mod}$. Alors le produit externe*

$$H^*(O_{\infty,\infty}(k); F_\infty) \otimes H^*(O_{\infty,\infty}(k); G_\infty) \to H^*(O_{\infty,\infty}(k); F_\infty \otimes G_\infty)$$

est un monomorphisme naturellement scindé.

Proposition 5.4. *Supposons que k est une extension finie (ou même seulement algébrique) de $\mathbb{Q}$, que $\Bbbk = \mathbb{Q}$ et que $F \in \operatorname{Ob} \mathbf{P}(k) - \mathbf{Mod}$ est un foncteur polynomial. Alors il existe un isomorphisme naturel*

$$H_*(O_{\infty,\infty}(k); F_\infty) \simeq H_*(O_{\infty,\infty}(k); \mathbb{Q}) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} H_0(O_{\infty,\infty}(k); F_\infty)$$

de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels gradués.

La démonstration repose sur le caractère semi-simple de la catégorie des foncteurs polynomiaux de $\mathbf{P}(k) - \mathbf{Mod}$ lorsque k est un corps de nombres et sur la trivialité des auto-extensions du foncteur identité des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels (qui s'appuie sur la résolution barre — cf. par exemple [FP98], qui traite du cas beaucoup plus difficile des entiers, dont on peut déduire cette annulation).

Remarque 5.5. Sous certaines hypothèses (par exemple, sur des corps), on peut obtenir des résultats analogues aux précédents avec des groupes orthogonaux non nécessairement hyperboliques — par exemple euclidiens. Cela est discuté dans la dernière partie de [Dja] (le cas général reste toutefois mystérieux dans ce genre de situation).

Un autre aspect agréable de l'homologie des foncteurs réside dans les changements de base qui se prêtent souvent à des comparaisons assez simples (par des arguments d'adjonction). Voici un cas particulier spectaculaire, lié d'après le théorème 4.7 de Scorichenko à l'homologie stable des groupes linéaires à coefficients dans la représentation adjointe.

Soient A un anneau commutatif et S une partie multiplicative de A ; choisissons $\Bbbk = \mathbb{Z}$ (ou A). Alors

$$HH_*(\mathbf{P}(A[S^{-1}]); \mathrm{Hom}_{A[S^{-1}]}) \simeq HH_*(\mathbf{P}(A); \mathrm{Hom}_A)[S^{-1}].$$

On note en revanche qu'il est extrêmement difficile de comparer les homologies à coefficients constants de $GL_\infty(A[S^{-1}])$ et $GL_\infty(A)$.

Références

[AM04] A. Adem & R. J. Milgram – *Cohomology of finite groups*, second éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 309, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Bet89] S. Betley – « Vanishing theorems for homology of $\mathrm{Gl}_n R$ », *J. Pure Appl. Algebra* **58** (1989), no. 3, p. 213–226.

[Bet99] — , « Stable K-theory of finite fields », *K-Theory* **17** (1999), no. 2, p. 103–111.

[Bet02] — , « Twisted homology of symmetric groups », *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), no. 12, p. 3439–3445 (electronic).

[Cha84] R. Charney – « On the problem of homology stability for congruence subgroups », *Comm. Algebra* **12** (1984), no. 17-18, p. 2081–2123.

[Col11] G. Collinet – « Homology stability for unitary groups over S-arithmetic rings », *J. K-Theory* **8** (2011), no. 2, p. 293–322.

[CPSvdK77] E. Cline, B. Parshall, L. Scott & W. van der Kallen – « Rational and generic cohomology », *Invent. Math.* **39** (1977), no. 2, p. 143–163.

[Dja] A. Djament – « Sur l'homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux », à paraître au *Journal of K-theory*, version prépublication disponible en ligne.

[Dup01] J. L. Dupont – *Scissors congruences, group homology and characteristic classes*, Nankai Tracts in Mathematics, vol. 1, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2001.

[DV10] A. Djament & C. Vespa – « Sur l'homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **43** (2010), no. 3, p. 395–459.

[Dwy80] W. G. Dwyer – « Twisted homological stability for general linear groups », *Ann. of Math. (2)* **111** (1980), no. 2, p. 239–251.

[EML54] S. Eilenberg & S. Mac Lane – « On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation », *Ann. of Math. (2)* **60** (1954), p. 49–139.

[FFSS99] V. Franjou, E. M. Friedlander, A. Scorichenko & A. Suslin – « General linear and functor cohomology over finite fields », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 2, p. 663–728.

[FP78] Z. Fiedorowicz & S. Priddy – *Homology of classical groups over finite fields and their associated infinite loop spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 674, Springer, Berlin, 1978.

[FP98] V. Franjou & T. Pirashvili – « On the Mac Lane cohomology for the ring of integers », *Topology* **37** (1998), no. 1, p. 109–114.

[Gal] S. Galatius – « Stable homology of automorphism groups of free groups », à paraître dans *Annals of Math.*

[Hat95] A. Hatcher – « Homological stability for automorphism groups of free groups », *Comment. Math. Helv.* **70** (1995), no. 1, p. 39–62.

[Kar80] M. Karoubi – « Théorie de Quillen et homologie du groupe orthogonal », *Ann. of Math. (2)* **112** (1980), no. 2, p. 207–257.

[Kar83] — , « Homology of the infinite orthogonal and symplectic groups over algebraically closed fields », *Invent. Math.* **73** (1983), no. 2, p. 247–250, An appendix to the paper : "On the K-theory of algebraically closed fields" by A. Suslin.

[Knu91] M.-A. KNUS – *Quadratic and Hermitian forms over rings*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 294, Springer-Verlag, Berlin, 1991, With a foreword by I. Bertuccioni.

[Lod76] J.-L. LODAY – « K-théorie algébrique et représentations de groupes », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **9** (1976), no. 3, p. 309–377.

[Mil83] J. MILNOR – « On the homology of Lie groups made discrete », *Comment. Math. Helv.* **58** (1983), no. 1, p. 72–85.

[ML98] S. MAC LANE – *Categories for the working mathematician*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998.

[MvdK02] B. MIRZAII & W. VAN DER KALLEN – « Homology stability for unitary groups », *Doc. Math.* **7** (2002), p. 143–166 (electronic).

[Nak60] M. NAKAOKA – « Decomposition theorem for homology groups of symmetric groups », *Ann. of Math. (2)* **71** (1960), p. 16–42.

[Pir00a] T. PIRASHVILI – « Dold-Kan type theorem for Γ-groups », *Math. Ann.* **318** (2000), no. 2, p. 277–298.

[Pir00b] — , « Hodge decomposition for higher order Hochschild homology », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **33** (2000), no. 2, p. 151–179.

[Qui72] D. QUILLEN – « On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field », *Ann. of Math. (2)* **96** (1972), p. 552–586.

[Qui73] — , « Higher algebraic K-theory. I », in *Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, Springer, Berlin, 1973, p. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341.

[Sco00] A. SCORICHENKO – « Stable K-theory and functor homology over a ring », Thèse, Evanston, 2000.

[Sus83] A. SUSLIN – « On the K-theory of algebraically closed fields », *Invent. Math.* **73** (1983), no. 2, p. 241–245.

[Sus87] A. A. SUSLIN – « Algebraic K-theory of fields », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)* (Providence, RI), Amer. Math. Soc., 1987, p. 222–244.

[Tou10] A. TOUZÉ – « Cohomology of classical algebraic groups from the functorial viewpoint », *Adv. Math.* **225** (2010), no. 1, p. 33–68.

[vdK80] W. VAN DER KALLEN – « Homology stability for linear groups », *Invent. Math.* **60** (1980), no. 3, p. 269–295.

[Vog82] K. VOGTMANN – « A Stiefel complex for the orthogonal group of a field », *Comment. Math. Helv.* **57** (1982), no. 1, p. 11–21.

[Wei94] C. A. WEIBEL – *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.