

Filtration par tranches

Notes d'exposé au groupe de travail sur l'invariant de Kervaire

Aurélien DJAMENT

mars 2010

Résumé

Dans cet exposé, on présente les définitions et résultats du § 3 de la prépublication [HHR09].

Il s'agit d'introduire une notion convenable de filtration sur les spectres G -équivariants (où G est ici un groupe fini quelconque), généralisant la tour de Postnikov. Ses briques élémentaires, appelées ici *tranches*, diffèrent des cellules équivariantes ordinaires (pour lesquelles on pourra se référer à [GM95], qui développe la théorie « classique » de l'homotopie stable équivariante), auxquelles elles sont néanmoins reliées.

La tour obtenue, appelée *décomposition en tranches*, procure naturellement des suites spectrales essentielles dans tout le travail de Hill-Hopkins-Ravenel.

Table des matières

1	Cellules et tranches élémentaires G-équivariantes	2
2	Dimension des tranches élémentaires et connectivité par tranches	2
3	Décomposition en tranches	5
4	Suite spectrale associée aux décompositions en tranches	8

Dans tout cet exposé, G désigne un 2-groupe fini¹. Pour tout groupe H , on note ρ_H la représentation régulière de H .

La catégorie ambiante est \mathcal{S}^G , catégorie des spectres G -équivariants.

¹Dans [HHR09], l'hypothèse que G est un 2-groupe n'est pas explicitement spécifiée; l'article ne s'intéresse néanmoins qu'à ce cas. Cette hypothèse nous semble nécessaire pour établir l'importante proposition 2.10. Elle intervient également pour le corollaire 4.7.

1 Cellules et tranches élémentaires G -équivariantes

- Définition 1.1 (Cellules et tranches élémentaires équivariantes).** 1. Les *cellules G -équivariantes* sont les objets de \mathcal{S}^G du type (ou isomorphes à) $G/H \times S^m = (G/H)_+ \wedge S^m$, où H est un sous-groupe de G et m un entier relatif.
2. Les *tranches élémentaires* (slice cells en anglais) G -équivariantes sont les objets de \mathcal{S}^G du type (ou isomorphes à)

$$\widehat{S}(m, H) := G \times_H S^{m\rho_H} = G_+ \wedge_H S^{m\rho_H}$$

ou $\Sigma^{-1}\widehat{S}(m, H)$, où H est un sous-groupe de G et m un entier relatif.

[On ne considère pas les autres (dé)suspensions des $\widehat{S}(m, H)$.]

Dans [HHR09], la notation abusive (au moins pour $m = 0$) $\widehat{S}(m\rho_H)$ (ou $\widehat{S}(m\rho_n)$ lorsque G est cyclique et que l'ordre n de H détermine donc ce sous-groupe) est employée pour $\widehat{S}(m, H)$.

- Définition 1.2 (Tranches induites, isotropes).** 1. Une tranche élémentaire G -équivariante est dite *induite* si elle est isomorphe à $G \times_H T$, où H est un sous-groupe strict de G et T une tranche élémentaire H -équivariante.
2. Si l'on peut choisir pour H le groupe trivial, on dit que la tranche élémentaire induite est *libre*.
3. Une tranche élémentaire G -équivariante (non nécessairement induite) est dite *isotrope* si elle n'est pas libre.

Remarque 1.3. Les tranches élémentaires non induites sont celles du type $S^{m\rho_G}$ et $S^{m\rho_G-1}$.

Les tranches élémentaires induites se prêtent à des arguments de récurrence, à travers les isomorphismes d'adjonction

$$[G \times_H T, X]^G \simeq [T, i_H^* X]^H$$

(c'est formel) et

$$[X, G \times_H T]^G \simeq [i_H^* X, T]^H$$

(cela provient de la finitude de G — isomorphisme de Wirthmüller, cf. [GM95], § 4), où H est un sous-groupe de G et $i_H^* : \mathcal{S}^G \rightarrow \mathcal{S}^H$ désigne le foncteur de restriction.

2 Dimension des tranches élémentaires et connectivité par tranches

Définition 2.1. La *dimension* des tranches élémentaires G -équivariantes est la dimension des sphères sous-jacentes (lorsqu'on oublie l'action de G), soit :

$$\dim \widehat{S}(m, H) = m|H|$$

et

$$\dim \Sigma^{-1}\widehat{S}(m, H) = m|H| - 1.$$

Cette définition est compatible aux changements de groupe au sens suivant :

Proposition 2.2. *Soit H un sous-groupe de G .*

1. *Si T est une tranche élémentaire H -équivariante, alors $G \times_H T$ est une tranche élémentaire G -équivariante de même dimension.*

2. Si T est une tranche élémentaire G -équivariante de dimension d , alors sa restriction i_H^*T à H est un bouquet de tranches élémentaires H -équivariantes de dimension d .

(La vérification est immédiate.)

Pour définir une notion de connectivité par tranches à partir de la notion de dimension des tranches élémentaires, on recourt à un processus de saturation par colimites homotopiques.

Une sous-catégorie pleine \mathcal{C} de \mathcal{S}^G est stable par colimites homotopiques si :

1. tout bouquet d'objets de \mathcal{C} appartient à \mathcal{C} ;
2. tout objet faiblement équivalent à un objet de \mathcal{C} appartient à \mathcal{C} ;
3. si deux objets X et Y de \mathcal{C} s'insèrent dans une suite cofibre $X \rightarrow Y \rightarrow Z$, alors Z appartient à \mathcal{C} .

Exemple 2.3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. La sous-catégorie pleine des spectres G -équivariants n -connexes est la plus petite sous-catégorie de \mathcal{S}^G stable par colimites homotopiques contenant les cellules G -équivariantes $G \rtimes_H S^{n+1}$ (où H parcourt les sous-groupes de G).

La notion de connectivité qui nous intéresse consiste en une adaptation de cette notion au contexte des tranches :

Définition 2.4. Étant donné un entier n , on note $\mathcal{S}_{\geq n}^G$ la plus petite sous-catégorie (pleine) de \mathcal{S}^G stable par colimites homotopiques contenant les tranches élémentaires G -équivariantes de dimension au moins n .

Lorsque X est un objet de \mathcal{S}^G , on notera $X \geq n$ pour $X \in \text{Ob } \mathcal{S}_{\geq n}^G$.

On notera par ailleurs $> n$ au lieu de $\geq n + 1$ dans ce contexte.

On dira que X est n -connexe par tranches si $X > n$.

On commence par donner deux conséquences simples de la définition.

Proposition 2.5. La catégorie $\mathcal{S}_{\geq n}^G$ contient tous les spectres (équivariants) du type $T \wedge X$, où T est une tranche élémentaire de dimension au moins n et X un spectre en suspensions.

Démonstration. Si T est une tranche élémentaire de dimension $\geq n$, la sous-catégorie des spectres (équivariants) X tels que $T \wedge X \in \text{Ob } \mathcal{S}_{\geq n}^G$ est stable par colimites homotopiques. Elle contient les spectres $G/H \rtimes S^0$, où H est un sous-groupe de G , en vertu de la proposition 2.2 et de ce que $G/H \rtimes T \simeq G \rtimes_H T$. Par conséquent, elle contient tous les spectres en suspensions. \square

Proposition 2.6. Soit X un spectre G -équivariant tel que le G -espace $\mathcal{S}_0^G(T, X)$ soit contractile pour toute tranche élémentaire G -équivariante T de dimension au moins d . Alors $\mathcal{S}_0^G(Y, X)$ est contractile pour $Y \geq d$.

Démonstration. En effet, la sous-catégorie des $Z \in \text{Ob } \mathcal{S}^G$ tels que $\mathcal{S}_0^G(Z, X)$ soit contractile est stable par colimites homotopiques. \square

Proposition 2.7. Un objet X de \mathcal{S}^G est (-1) -connexe par tranches si et seulement s'il est (-1) -connexe au sens usuel, i.e. que le foncteur de Mackey $\pi_i(X)$ est nul pour i strictement négatif.

Démonstration. Les tranches élémentaires de dimension positive sont (-1) -connexes, ce qui montre que la (-1) -connexité par tranches entraîne la (-1) -connexité au sens usuel.

Les spectres G -équivariants (-1) -connexes sont les objets de la plus petite sous-catégorie de \mathcal{S}^G stable par colimites homotopiques et contenant les cellules G -équivariantes $G/H \rtimes S^0 \simeq \widehat{S}(0, H)$, pour tout sous-groupe H de G . Cela démontre la réciproque. \square

Remarque 2.8. En revanche, $X > 0$ n'implique pas que X soit 0-connexe.

Un critère pour reconnaître une équivalence faible

Lemme 2.9. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de \mathcal{S}^G , avec $X, Y \geq n$. Supposons que, pour toute tranche élémentaire T de dimension au moins n et tout $t \in \mathbb{N}$, l'application*

$$f_* : [\Sigma^t T, X]^G \rightarrow [\Sigma^t T, Y]^G$$

est un isomorphisme.

Alors f est une équivalence faible.

(On rappelle que la notation $[-, -]^G$ désigne l'ensemble des morphismes dans la catégorie homotopique $\text{ho}(\mathcal{S}^G)$ des spectres G -équivariants.)

Démonstration. La sous-catégorie \mathcal{C} des $Z \in \text{Ob } \mathcal{S}^G$ tels que $f_* : [\Sigma^t Z, X] \rightarrow [\Sigma^t Z, Y]$ soit un isomorphisme pour tout $t \in \mathbb{N}$ (ce qui équivaut, quitte éventuellement à prendre des remplacements fibrants et cofibrants, à dire que $f_* : \mathcal{S}^G(Z, X) \rightarrow \mathcal{S}^G(Z, Y)$ est une équivalence faible) est stable par colimites homotopiques et contient par hypothèse les tranches élémentaires de dimension $\geq n$, elle contient donc $\mathcal{S}_{\geq n}^G$, et en particulier X et Y . Le lemme s'ensuit. \square

On peut renforcer cet énoncé :

Proposition 2.10. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de \mathcal{S}^G , avec $X, Y \geq n$. Supposons que pour toute tranche élémentaire T de dimension au moins n l'application*

$$f_* : [T, X]^G \rightarrow [T, Y]^G$$

est un isomorphisme.

Alors f est une équivalence faible.

Démonstration. On montre que l'hypothèse du lemme précédent est vérifiée. Par récurrence, on peut supposer que le résultat est connu pour tous les sous-groupes stricts de G , et que $f_* : [\Sigma^u T, X]^G \rightarrow [\Sigma^u T, Y]^G$ est une bijection pour tout $u < t$. On peut supposer $t > 0$, par hypothèse.

L'hypothèse de récurrence sur G entraîne que $i_H^* f$ est une équivalence faible pour tout sous-groupe strict H de G , donc que $f_* : [A \wedge Z, X]^G \rightarrow [A \wedge Z, Y]^G$ est un isomorphisme pour tout Z et tout A construit à partir de G -cellules induites de sous-groupes stricts. On peut choisir en particulier $A = S^{t\rho_G}/S^t$ (parce que la représentation triviale de G est contenue exactement une fois dans ρ_G).

Comme G est un 2-groupe, les tranches élémentaires G -équivariantes associées à des sous-groupes non triviaux de G (on sait déjà que $f_* : [\Sigma^t T, X]^G \rightarrow [\Sigma^t T, Y]^G$ est un isomorphisme si T est une tranche élémentaire associée au sous-groupe nul de G) sont de dimension paire si et seulement si elles sont du type $\widehat{S}(m, H)$. En particulier, l'hypothèse de récurrence montre que $f_* : [\Sigma^t T, X]^G \rightarrow [\Sigma^t T, Y]^G$ est un isomorphisme si T est une tranche élémentaire de dimension impaire, puisqu'alors ΣT est aussi une tranche élémentaire de dimension $\geq n$.

Supposons maintenant que T est une tranche élémentaire de dimension paire (associée à un sous-groupe non nul de G). La comparaison des suites exactes longues pour $[-, X]^G$ et $[-, Y]^G$ associées à la suite cofibre $\Sigma^t T \rightarrow S^{t\rho_G} \wedge T \rightarrow A \wedge T$ montre que $f_* : [\Sigma^t T, X]^G \rightarrow [\Sigma^t T, Y]^G$ est un isomorphisme si f induit des isomorphismes $[S^{t\rho_G} \wedge T, X]^G \rightarrow [S^{t\rho_G} \wedge T, Y]^G$ et $[\Sigma^{-1} S^{t\rho_G} \wedge T, X]^G \rightarrow [\Sigma^{-1} S^{t\rho_G} \wedge T, Y]^G$ (utiliser le lemme des cinq et ce qui précède sur A). Mais $S^{t\rho_G} \wedge T$ et $\Sigma^{-1} S^{t\rho_G} \wedge T$ sont des tranches élémentaires de dimension $\geq n$, de sorte que l'on dispose de ces isomorphismes par hypothèse, d'où la proposition. \square

Cette proposition, qui ne sera pas utilisée dans cet exposé mais intervient au § 5.2 de [HHR09], peut être vue comme une des motivations à la définition des tranches élémentaires (on y comprend l'importance d'introduire une désuspension des \widehat{S}).

Un lien entre connectivité par tranches et connectivité usuelle

Lemme 2.11. *Soit T une tranche élémentaire de dimension n .*

1. *Si $n \geq 0$, alors T admet une décomposition cellulaire formée de cellules du type $G/H \rtimes S^k$ avec $[n/|G|] \leq k \leq n$ (où H est un sous-groupe de G).*
2. *Si $n < 0$, alors T admet une décomposition cellulaire formée de cellules du type $G/H \rtimes S^k$ avec $n \leq k \leq [n/|G|]$.*

Démonstration. Le deuxième cas se déduit du premier par dualité de Spanier-Whitehead (cf. [GM95], §4). Par ailleurs, il suffit de traiter le cas des tranches élémentaires du type $S^{m\rho_G}$ et $\Sigma^{-1}S^{m\rho_G}$, le cas général s'en déduisant par induction d'un sous-groupe à G .

Pour $m \geq 0$, le G -espace $S^{m\rho_G}$ est un G -complexe cellulaire formé de cellules de dimensions comprises entre m et $m|G|$, ce qui donne le résultat pour la tranche élémentaire correspondante. Le cas d'une tranche du type $\Sigma^{-1}S^{m\rho_G}$ s'en déduit en désuspendant, puisque $m - 1 = [(m|G| - 1)/|G|]$. \square

Proposition 2.12. *Soit X un objet de $\mathcal{S}_{\geq n}^G$.*

1. *Si $n \geq 0$, alors X est faiblement équivalent à un G -spectre cellulaire formé de cellules du type $G/H \rtimes S^k$ avec $k \geq [n/|G|]$.*
2. *Si $n < 0$, alors X est faiblement équivalent à un G -spectre cellulaire formé de cellules du type $G/H \rtimes S^k$ avec $k \geq n$.*

Démonstration. Le résultat se déduit du lemme précédent par stabilité par colimites homotopiques des spectres considérés. \square

3 Décomposition en tranches

D'une manière générale, un foncteur de *localisation* (resp. *colocalisation*) d'une catégorie \mathcal{C} relativement à une sous-catégorie \mathcal{D} est un foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ adjoint à gauche (resp. à droite) au foncteur d'inclusion. Dans un contexte homotopique, on désigne plutôt par (co)localisation un relevé convenable aux catégories d'espaces (ou de spectres) d'un foncteur de (co)localisation entre les catégories homotopiques².

Les foncteurs de (co)localisation considérés dans [HHR09] sont les suivants :

- Colocalisation (homotopique) relativement à $\mathcal{S}_{\geq n}^G$: c'est un foncteur P_n de \mathcal{S}^G vers $\mathcal{S}_{\geq n}^G$ (on confondra souvent P_n avec sa composée avec le foncteur d'inclusion dans \mathcal{S}^G) muni d'une transformation naturelle vers l'identité qui induit, pour tous spectres G -équivariants X et A , avec $A \in \text{Ob } \mathcal{S}_{\geq n}^G$, une *équivalence faible* d'espaces $\mathcal{S}^G(A, P_n X) \rightarrow \mathcal{S}^G(A, X)$.
- Disons qu'un spectre équivariant Z est $\mathcal{S}_{> n}^G$ -nul si $\mathcal{S}^G(A, Z)$ est un espace (faiblement) contractile pour tout objet A de $\mathcal{S}_{> n}^G$ et notons \mathcal{N}_n^G la sous-catégorie pleine de \mathcal{S}^G des spectres $\mathcal{S}_{> n}^G$ -nuls. La localisation (homotopique) relativement à \mathcal{N}_n^G est un foncteur $P^n : \mathcal{S}^G \rightarrow \mathcal{N}_n^G$ (souvent confondu avec sa composée avec l'inclusion dans \mathcal{S}^G) muni d'une transformation naturelle depuis l'identité telle que pour tous spectres (équivariants) X et Z , avec $Z \in \text{Ob } \mathcal{N}_n^G$, $X \rightarrow P^n X$ induise une équivalence faible d'espaces $\mathcal{S}^G(P^n X, Z) \rightarrow \mathcal{S}^G(X, Z)$.

(Dans ces notations, un exposant ou un indice G est ajouté lorsqu'une ambiguïté est possible sur le groupe.)

²De manière axiomatique, il peut même être avantageux de considérer une (co)localisation comme une nouvelle structure de catégorie de modèles sur la catégorie de modèles de départ, le foncteur usuel de (co)localisation apparaissant alors comme un foncteur de remplacement (co)fibrant dans cette nouvelle catégorie — cf. [Hir03].

Ces foncteurs existent (et sont uniques à équivalences faibles près) par la théorie générale de Bousfield et d'autres. On pourra consulter, par exemple, l'ouvrage de Hirschhorn [Hir03].

Les transformations naturelles structurales forment, pour tout entier n et tout spectre X , une suite cofibre

$$P_{n+1}X \rightarrow X \rightarrow P^n X.$$

Les inclusions $\mathcal{S}_{>n}^G \subset \mathcal{S}_{>n-1}^G$ induisent des transformations naturelles $P^n \rightarrow P^{n-1}$.

La *décomposition en tranches* (slice tower en anglais) de $X \in \text{Ob } \mathcal{S}^G$ est par définition la tour de spectres $(P^n X)_{n \in \mathbb{N}}$. On nommera parfois *n -ième section* (slice section en anglais) de X le spectre $P^n X$.

On introduit également la fibre homotopique P_n^n de la transformation naturelle $P^n \rightarrow P^{n-1}$. On dit que $X \in \text{Ob } \mathcal{S}^G$ est une *n -tranche* (G -équivariante) si le morphisme canonique $X \rightarrow P^n X$ se factorise en une équivalence faible³ $X \xrightarrow{\simeq} P_n^n X$. Les propriétés universelles des foncteurs de localisation impliquent que $P_n^n X$ est toujours une n -tranche, qu'on nomme *n -tranche de X* .

La décomposition en tranches de X vérifie les propriétés suivantes, qui la caractérisent (à équivalence près) :

1. le morphisme canonique de X dans la limite homotopique de la tour $(P^n X)$ est une équivalence faible ;
2. la colimite homotopique de la tour est contractile ;
3. la fibre de $P^n X \rightarrow P^{n-1} X$ est une n -tranche pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

La démonstration que la décomposition en tranches vérifie ces propriétés sera donnée au § 4.

La décomposition en tranches se comporte bien relativement aux changements de groupe :

Proposition 3.1. *Les foncteurs P^n commutent à la restriction : si H est un sous-groupe de G , la transformation naturelle $i_H^* P_G^n \rightarrow P_H^n i_H^*$ est une équivalence.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier que, pour tout $X \in \text{Ob } \mathcal{S}^G$:

1. $i_H^* P_G^n(X)$ est $\mathcal{S}_{>n}^H$ -nul ;
2. le morphisme canonique $i_H^* X \rightarrow i_H^* P_G^n(X)$ induit, pour tout spectre $\mathcal{S}_{>n}^H$ -nul Z , une équivalence faible $\mathcal{S}^H(i_H^* P_G^n(X), Z) \rightarrow \mathcal{S}^H(i_H^* X, Z)$.

Pour le premier point, on montre que le foncteur de restriction i_H^* envoie un objet $\mathcal{S}_{>n}^G$ -nul Y sur un spectre $\mathcal{S}_{>n}^H$ -nul, ce qui provient de l'adjonction $\mathcal{S}^H(A, i_H^* Y) \simeq \mathcal{S}^G(G \rtimes_H A, Y)$ et de la proposition 2.2.

Comme induction et restriction sont adjoints *de chaque côté* entre spectres G -équivariants et H -équivariants, on obtient de même que $G \rtimes_H$ envoie \mathcal{N}_n^H dans \mathcal{N}_n^G . Cela permet d'obtenir le deuxième point, en jouant encore sur l'adjonction entre induction et restriction et la proposition 2.2. \square

Remarque 3.2. On en déduit une propriété analogue vaut pour les foncteurs P_n^n .

³La prépublication [HHR09] requiert l'égalité, ce qui est manifestement un abus pour isomorphisme ; néanmoins, surtout à défaut de spécifier très précisément les choix des foncteurs, il semble plus prudent de demander une équivalence.

Comportement vis-à-vis du produit contracté Le comportement mutuel du produit contracté et de la décomposition en tranches n'est pas aussi simple que ce qu'on pourrait rêver (on n'a *pas* $(X \geq n \text{ et } Y \geq m) \Rightarrow (X \wedge Y \geq n + m)$); on dispose néanmoins de propriétés de commutation partielles. La prépublication [HHR09] complète les premiers résultats reproduits ci-dessous à l'aide de la notion de spectre parfait, qui apparaîtra dans un exposé ultérieur.

Proposition 3.3. 1. Le produit contracté avec $S^{m\rho_G}$ induit une équivalence $\mathcal{S}_{\geq n}^G \rightarrow \mathcal{S}_{\geq n+m|G|}^G$.

2. Pour tout $X \in \text{Ob } \mathcal{S}^G$, les applications naturelles

$$S^{m\rho_G} \wedge P_n X \rightarrow P_{n+m|G|}(S^{m\rho_G} \wedge X)$$

$$S^{m\rho_G} \wedge P^n X \rightarrow P^{n+m|G|}(S^{m\rho_G} \wedge X)$$

sont des équivalences faibles.

Démonstration. Cela découle de ce que le produit contracté avec $S^{m\rho_G}$ induit une bijection de l'ensemble des tranches élémentaires de dimension k vers celles de dimension $k + m|G|$. \square

Proposition 3.4. Si $X \geq n$, $Y \geq m$ et que n est divisible par $|G|$, alors $X \wedge Y \geq n + m$.

Démonstration. La proposition 3.3 permet de se ramener au cas où n est nul, en prenant le produit contracté avec $S^{(-n/|G|)\rho_G}$. La sous-catégorie (pleine) des Y tels que $X \wedge Y \geq m$, $X \geq 0$ étant fixé, est stable par colimites homotopiques : il suffit donc de montrer qu'elle contient les tranches élémentaires de dimension au moins m .

Pour cela, on se fixe une telle tranche élémentaire T et on considère la sous-catégorie des X tels que $X \wedge T \geq m$. Elle est stable par colimites homotopiques et contient les cellules $G/H \rtimes S^0$, grâce à la proposition 2.2. Elle contient donc tous les spectres (équivariants) (-1) -connexes, qui sont exactement les spectres ≥ 0 par la proposition 2.7, d'où le résultat. \square

Nous admettrons les deux propositions suivantes (qui sont aisées : la première est une conséquence de la définition de P^n et de la suite exacte longue associée à une suite cofibre ; la deuxième en découle via la proposition 3.4 et une récurrence), qui ne seront pas utilisées dans cet exposé.

Proposition 3.5. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{S}^G dont la fibre F appartient à $\mathcal{S}_{>n}^G$ est une P^n -équivalence (i.e. $P^n f$ est une équivalence).

Proposition 3.6. 1. Si X, Y et Z sont ≥ 0 et que $f : Y \rightarrow Z$ est une P^n -équivalence, alors $X \wedge f : X \wedge Y \rightarrow X \wedge Z$ est une P^n -équivalence.

2. Pour $X_1, \dots, X_k \geq 0$, le morphisme canonique

$$X_1 \wedge \dots \wedge X_k \rightarrow P^n X_1 \wedge \dots \wedge P^n X_k$$

est une P^n -équivalence.

Corollaire 3.7. Soit A un spectre équivariant (-1) -connexe. Si A est une algèbre commutative ou associative (éventuellement à homotopie près), il en est de même pour $P^n A$ pour tout entier n .

4 Suite spectrale associée aux décompositions en tranches

La tour de fibrations $(P^n X)$ donne lieu à une suite spectrale de foncteurs de Mackey, fonctorielle en $X \in \mathcal{S}^G$, qui prend la forme suivante :

$$E_1^{s,t} = \pi_{t-s}(P_t^t X) \Rightarrow \pi_{t-s}(X)$$

avec des différentielles $d_r : E_r^{s,t} \rightarrow E_r^{s+r,t+1-r}$ de degré $(r, 1-r)$.

Dans [HHR09], § 3, ce terme est noté E_2 , mais cela ne correspond pas aux conventions les plus usuelles d'indexation.

Il n'est pas clair a priori que cette suite spectrale converge. Cela s'établit en exhibant une zone d'annulation, à partir d'arguments de comparaison entre la connectivité par tranches et la connectivité usuelle.

Zone d'annulation fondamentale

Notation 4.1. On désigne par g l'ordre de $|G|$.

Proposition 4.2. *Soit H un sous-groupe de G .*

1. *Si n et k sont des entiers tels que $k > n \geq 0$, alors $G/H \rtimes S^k > n$.*
2. *Si m et k sont des entiers tels que $k \geq m \leq -1$, alors $G/H \rtimes S^k \geq (m+1)g - 1$.*
3. *Si $X \geq n$ pour un $n \in \mathbb{N}$, alors $\pi_i(X) = 0$ pour $i < [n/g]$.*
4. *Si $X \geq n$ pour un entier négatif n , alors $\pi_i(X) = 0$ pour $i < n$.*

Démonstration. Établissons le premier point. Il s'agit de voir que, pour tout spectre $\mathcal{S}_{>n}^G$ -nul X , on a $[(G/H) \rtimes S^k, X]^G = 0$ (pour $k > n$). Par récurrence, on peut supposer que cette assertion est vraie pour tout sous-groupe strict de G ; elle est immédiate pour le groupe trivial. Comme $[(G/H) \rtimes S^k, X]^G \simeq [S^k, X]^H$, il suffit donc de montrer la nullité de $[S^k, X]^G$.

Le raisonnement est très analogue à celui de la démonstration de la proposition 2.10 : la fibre homotopique F de $S^k \rightarrow S^{k\rho_G}$ vérifie $[F, X]^G = 0$ et $[\Sigma F, X]^G = 0$ pour $X \in \mathcal{S}_{>n}^G$ -nul X , en vertu de l'hypothèse de récurrence. On en déduit $[S^k, X]^G \simeq [S^{k\rho_G}, X]^G$, groupe qui est nul puisque la dimension de la tranche élémentaire $S^{k\rho_G}$ est $kg > n$.

Pour la deuxième assertion, on peut supposer $k < 0$, car sinon $G/H \rtimes S^k \geq 0$ par la proposition 2.7. On écrit alors

$$G/H \rtimes S^k \simeq \Sigma^{-1}G/H \rtimes S^{(k+1)\rho_G} \wedge S^{-(k+1)(\rho_G-1)}$$

Mais $S^{-(k+1)(\rho_G-1)}$ est un spectre en suspensions ($k < 0$), d'où $G/H \rtimes S^k \geq (k+1)g - 1 \geq (m+1)g - 1$ par la proposition 3.4.

Les deux dernières assertions se déduisent de la proposition 2.12. \square

Le résultat suivant, qui implique la convergence forte de la suite spectrale, constitue une conséquence directe de la proposition 4.2.

Théorème 4.3. *Soit X un spectre G -équivariant.*

1. *Le foncteur de Mackey $\pi_k(P^n X)$ est nul pour $k > n \geq 0$ ou pour $k \geq [(n+1)/g]$ et $n < 0$.*
2. *Le morphisme canonique $X \rightarrow P^n X$ induit une équivalence $\pi_k(X) \simeq \pi_k(P^n X)$ pour $k < [(n+1)/g]$ et $n \geq 0$ ou pour $k - 1 < n < 0$.*
3. *La colimite homotopique de la tour $(P^n X)$ est contractile.*
4. *Le morphisme canonique de X dans la limite homotopique de cette tour est une équivalence faible ; de surcroît, la flèche $\pi_k(X) \rightarrow (\pi_k(P^n X))_n$ est un pro-isomorphisme.*

Les propriétés suivantes sont également des conséquences directes de la proposition 4.2.

Corollaire 4.4. *Si M est une n -tranche, alors $\pi_k(M) = 0$ si $n \geq 0$ et $k \notin [[n/g], n]$, ou que $n < 0$ et $k \notin [n, [(n+1)/g][$.*

Corollaire 4.5. *Si X est un spectre équivariant $(n-1)$ -connexe, avec $n \in \mathbb{N}$, alors $X \geq n$.*

Corollaire 4.6. 1. *Si M est une 0-tranche, alors $\pi_i(M) = 0$ pour $i \neq 0$.*

2. *Pour tout $X \in \mathcal{S}^G$, X et le spectre d'Eilenberg-Mac Lane $H\pi_0(X)$ ont la même 0-tranche. Plus précisément, P_0X est la couverture (-1) -connexe de X , et le morphisme $P_0X \rightarrow H\pi_0(X)$ qui s'en déduit est une P^0 -équivalence.*

Corollaire 4.7. *Soit X un spectre équivariant.*

1. *Les foncteurs de Mackey $\pi_{-1}(X)$ et $\pi_{-1}(P_{-1}^{-1}X)$ sont isomorphes.*

De plus, pour tout foncteur de Mackey A , le spectre $\Sigma^{-1}HA$ est une (-1) -tranche.

2. *Si T est une tranche élémentaire de dimension **impaire** d , alors*

$$[T, X]^G \simeq [T, P_d^d X]^G.$$

Démonstration. Pour le premier point, on note que le corollaire 4.4 entraîne que les n -tranches ont un π_{-1} nul si $n \neq -1$, et qu'une (-1) -tranche a pour seul foncteur de Mackey d'homotopie éventuellement non nul π_{-1} .

Pour le second, la commutation du foncteur P_d^d à la restriction des scalaires (cf. proposition 3.1) et une récurrence sur g (qui est, on le rappelle, une puissance de 2) ramènent au cas où T est de la forme $S^{m\rho_G^{-1}}$. On peut alors se restreindre au cas où m est nul, par la proposition 3.3, qui provient de la première partie de ce corollaire. \square

La suite spectrale graduée sur $RO(G)$ Prendre le produit contracté par un spectre S^{-V} , où V est une représentation virtuelle de G , de la décomposition en tranches d'un autre spectre X donne encore une tour de limite homotopique $S^V \wedge X$ et de colimite homotopique contractile. Celle-ci est isomorphe (à décalage de degré près) à la décomposition en tranches de $S^V \wedge X$ lorsque V est un multiple de la représentation régulière, par la proposition 3.3, mais ce n'est pas le cas en général. On peut néanmoins former une suite spectrale convergente tout à fait analogue à la précédente à l'aide de cette tour ; elle prend la forme

$$E_1^{s,t,V} = \pi_{V+t-s}(P_{d+t}^{d+t}X) \Rightarrow \pi_{V+t-s}(X)$$

où d est la dimension (virtuelle) de V . On considère donc essentiellement la même suite spectrale, mais avec une graduation supplémentaire par l'anneau $RO(G)$ des représentations orthogonales du groupe G .

Références

- [GM95] J. P. C. GREENLEES & J. P. MAY – « Equivariant stable homotopy theory », in *Handbook of algebraic topology*, North-Holland, Amsterdam, 1995, p. 277–323.
- [HHR09] M. HILL, M. HOPKINS & D. RAVENEL – « On the non-existence of elements of Kervaire invariant one », arXiv :0908.3724, 2009.
- [Hir03] P. S. HIRSCHHORN – *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.