Noethérianité et finitude homologique des foncteurs polynomiaux (I)

Aurélien DJAMENT

CNRS, LAGA, Villetaneuse, France

novembre 2023

Premier exposé d'un mini-cours virtuel à destination du Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics (VIASM), dans le cadre du programme *Algebraic Topology Activity 2023*.

D'après des travaux récents avec Antoine Touzé, mais aussi des travaux plus classiques de Teimuraz Pirashvili et Lionel Schwartz notamment.

Bibliographie extrêmement sommaire

- Vincent Franjou, Jean Lannes et Lionel Schwartz. *Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis*. Invent. Math. **115** (1994). *(Lemme de Schwartz classique : § 10).*
- Stanisław Betley et Teimuraz Pirashvili. *Twisted (co)homological stability for monoids of endomorphisms*. Math. Ann. 295 (1993)
- Aurélien Djament et Antoine Touzé. *Finitude homologique des foncteurs sur une catégorie additive et applications*. Trans. AMS **376** (2023).
- Aurélien Djament et Antoine Touzé. *Sur la noethérianité locale des foncteurs polynomiaux*. À paraître au Tunisian Journal of Mathematics.

1. Foncteurs polynomiaux sur une catégories additive : motivations, historique
   - Catégories de foncteurs
   - Motivations de topologie algébrique
   - Catégories de foncteurs de théorie des représentations
   - Homologie des foncteurs, K-théorie algébrique et homologie des groupes linéaires
2. Propriétés de finitude dans les catégories abéliennes
   - Rappels sur les catégories abéliennes
   - Propriétés de finitude liées aux treillis de sous-objets
   - n-présentation finie
3. Le lemme de Schwartz
   - Foncteurs polynomiaux
   - n-présentation à support fini
   - Propriété psf_n pour les foncteurs polynomiaux

Catégories de foncteurs : définitions et notations

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie (essentiellement) petite et K un anneau commutatif. On note $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers les K-modules. On peut y penser comme à la catégorie des représentations sur K de $\mathcal{C}$ (à laquelle on peut penser comme à un monoïde à plusieurs objets).
La catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ est une catégorie abélienne agréable (cf. ci-après).
Si E est un ensemble, on désigne par $K[E]$ le K-module libre construit sur E. On note $P^c_{\mathcal{C}}$ le foncteur $K[\mathcal{C}(c,-)]$ de $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ pour $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Par une variante du lemme de Yoneda,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{C};K)}(P^c_{\mathcal{C}}, F) \simeq F(c)$$

naturellement en F et en c. Ces foncteurs sont importants car ils *engendrent* la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ et sont projectifs ; ce sont des analogues des modules libres de rang fini dans une catégorie de modules.

Catégories de foncteurs : cas d'une source additive

On va s'intéresser au cas où la catégorie source est *additive*, i.e. possède des sommes directes finies, ce qui induit une structure de groupe abélien sur les ensembles de morphismes entre deux objets donnés, de sorte que la composition soit bilinéaire.

Un cas particulier fondamental est celui de la catégorie $\mathbf{P}(A)$ des modules à gauche projectifs de type fini sur un anneau A (on peut la remplacer par la sous-catégorie de modules libres sans changer la catégorie de foncteurs) ; on notera simplement $\mathcal{F}(A, K)$ pour $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A); K)$.

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie additive essentiellement petite, les foncteurs *additifs* de $\mathcal{A}$ vers K-**Mod** forment une sous-catégorie abélienne pleine $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$, en général beaucoup plus simple à comprendre que $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$.

Exemple : le foncteur associant à un bimodule V le foncteur additif $V \underset{A}{\otimes} -$ définit une équivalence entre la catégorie des (K, A)-bimodules (i.e. $K \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A^{\mathrm{op}}$-modules à gauche) et $\mathbf{Add}(\mathbf{P}(A); K)$.

Eilenberg et MacLane (1954) ont introduit la notion de *foncteur polynomial* d'une catégorie additive vers une catégorie de modules, que nous rappellerons ultérieurement. C'est une généralisation des foncteurs additifs : les foncteurs polynomiaux de degré au plus 0 sont les foncteurs constants ; les foncteurs polynomiaux de degré au plus 1 sont les sommes directes d'un foncteur constant et d'un foncteur additif.

Les foncteurs de la forme $V \mapsto V^{\otimes d}$ (entre catégories de modules) sont des exemples typiques de foncteurs polynomiaux de degré au plus d.

En revanche, si a est un objet non nul d'une catégorie additive essentiellement petite $\mathcal{A}$, le foncteur $P^a_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ n'est *pas* polynomial.

Topologie algébrique (I) : Eilenberg-MacLane (1954)

Soient i et n des entiers naturels, V un groupe abélien. L'espace d'Eilenberg-MacLane $K(V,n)$ (i.e. espace topologique pointé dont l'homologie est V en degré n et triviale ailleurs) donne lieu, en prenant l'homologie singulière, à des foncteurs $V \mapsto H_i(K(V,n);K)$ qu'on peut voir comme des objets de $\mathcal{F}(\mathbf{Ab}^{\mathrm{tf}};K)$ (où $\mathbf{Ab}^{\mathrm{tf}}$ est la catégorie des groupes abéliens de type fini), qu'Eilenberg et MacLane ont étudiés dans les années 1950.

On sait dire beaucoup de choses sur ces foncteurs, mais il est très difficile d'en donner une description complète, sauf pour des valeurs particulières de n et i.

Ces foncteurs ne sont généralement pas additifs, mais ils sont *polynomiaux* ; c'est à cette occasion qu'Eilenberg et MacLane ont introduit la notion de polynomialité d'un foncteur.

Topologie algébrique (II) : les suites d'Eilenberg-MacLane

Dold et Puppe ont introduit (1961) les *foncteurs dérivés des foncteurs non additifs* entre catégories abéliennes (raisonnables) à l'aide d'une construction simpliciale reposant sur la correspondance de Dold-Kan ; l'homologie des espaces d'Eilenberg-MacLane s'interprète directement à l'aide des foncteurs dérivés du foncteur de linéarisation $K[-] : \mathbf{Ab} \to K\text{-}\mathbf{Mod}$.

La *suite spectrale de Curtis* (1963, 1965) converge vers l'homotopie des sphères (ou plus généralement d'espaces de Moore) et a une première page donnée par des foncteurs dérivés à la Dold-Puppe des foncteurs de Lie (des endofoncteurs polynomiaux des groupes abéliens liés à la suite centrale descendante des groupes libres).

Les foncteurs dérivés non additifs et leur application à la suite spectrale de Curtis ont fait l'objet de travaux beaucoup plus récents de Breen et Mikhailov (2011).

Topologie algébrique (III) : Henn-Lannes-Schwartz (1993)

Dans la lignée des travaux de Lannes sur le foncteur T, Henn, Lannes et Schwartz étudient au début des années 1990 un foncteur de la catégorie $\mathcal{U}$ des *modules instables* sur l'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}(p)$ (où p est un nombre premier fixé) des opérations stables de la cohomologie modulo p vers la catégorie de foncteurs $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$. Ils montrent que ce foncteur induit une équivalence entre le quotient de $\mathcal{U}$ par la sous-catégorie localisante des modules instables *nilpotents* et la sous-catégorie pleine des foncteurs *analytiques* (c'est-à-dire colimite de sous-foncteurs polynomiaux) de $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$.
C'est le point de départ de l'étude systématique des catégories $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$ par des topologues (L. Schwartz, N. Kuhn, G. Powell...).

Liens avec la théorie des représentations

Les foncteurs polynomiaux constituent un cadre très efficace pour relier les représentations linéaires des groupes symétriques à celles des groupes linéaires. La préhistoire de ce lien, sur lequel nous reviendrons, remonte à la thèse de Schur et est déjà présente avec un point de vue fonctoriel (non systématique) chez Macdonald (*Symmetric functions and Hall polynomials*, 1979), tandis que la notion de *représentation polynomiale* des groupes linéaires est étudiée systématiquement dans l'ouvrage éponyme de Green publié en 1980.

Auslander a inauguré dès les années 1960 l'utilisation en théorie des représentations (notamment d'algèbres artiniennes) de catégories de foncteurs *additifs* entre catégories de modules.

Homologie des foncteurs et homologie des groupes linéaires

Dans sa thèse, Scorichenko (2000, non publiée) montre le résultat remarquable suivant (obtenu peu avant dans le cas des corps finis indépendamment par Betley et Suslin).

Théorème (Scorichenko)

Soient A un anneau et $X : \mathbf{P}(A)^{\mathrm{op}} \times \mathbf{P}(A) \to \mathbf{Ab}$ un bifoncteur polynomial. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, il existe une suite exacte naturelle scindée

$$0 \to \bigoplus_{i+j=d} H_i(\mathrm{GL}_\infty(A);\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} HH_j(\mathbf{P}(A);X) \to H_d(\mathrm{GL}_\infty(A);X_\infty)$$

$$\to \bigoplus_{i+j=d-1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_i(\mathrm{GL}_\infty(A);\mathbb{Z}), HH_j(\mathbf{P}(A);X)) \to 0$$

où $\mathrm{GL}_\infty(A) := \operatorname{colim}_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{GL}_n(A)$ et $X_\infty := \operatorname{colim}_{n\in\mathbb{N}} X(A^n, A^n)$ et HH_* désigne l'homologie de Hochschild.

Corollaire

Si K est un corps parfait de caractéristique première, pour tout bifoncteur polynomial X de $\mathcal{F}(\mathbf{P}(K)^{\mathrm{op}} \times \mathbf{P}(K); K)$, on dispose d'un isomorphisme naturel

$$H_* * (\mathrm{GL}_\infty(K); X_\infty) \simeq HH_*(\mathbf{P}(K); X)$$

de K-espaces vectoriels gradués.

Le groupe abélien $HH_*(\mathbf{P}(A); X)$ est calculable ou au moins contrôlable pour un certain nombre d'anneaux raisonnables A et de bifoncteurs polynomiaux raisonnables X. C'est notamment le cas si A est un corps (en caractéristique 0, c'est beaucoup plus facile qu'en caractéristique première).

Catégories abéliennes I : catégories de Grothendieck

La plupart des catégories abéliennes que nous rencontrerons seront des *catégories de Grothendieck*, c'est-à-dire des catégories abéliennes possédant un générateur, dans lesquelles les colimites arbitraires existent et où les colimites *filtrantes* sont exactes.

Dans une catégorie de Grothendieck :

1. les limites arbitraires existent ;
2. la classe des sous-objets d'un objet fixé forme un ensemble ;
3. il existe un *cogénérateur injectif* ; en particulier, la catégorie possède assez d'objets injectifs.

Les catégories de foncteurs $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ (où $\mathcal{C}$ est une petite catégorie quelconque) sont des catégories de Grothendieck.

Algèbre homologique

Comme une catégorie de Grothendieck $\mathcal{E}$ possède assez d'objets injectifs, on peut dériver à droite tout foncteur exact à gauche de $\mathcal{E}$ vers une catégorie abélienne. En particulier, on peut y définir des *groupes d'extensions*, obtenant des foncteurs $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{E}} : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{E} \to \mathbf{Ab}$ ($\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{E}}(X,-)$ est le dérivé à droite de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X,-)$).

Comme les catégories $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ possèdent également assez d'objets projectifs (grâce aux $P^c_{\mathcal{C}}$), les groupes d'extensions peut également s'y obtenir en dérivant les foncteurs contravariants $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{C};K)}(-,Y)$.

On peut également définir des *groupes de torsion* $\mathrm{Tor}^{\mathcal{C}}_*(-,-)$ sur une petite catégorie $\mathcal{C}$ en dérivant à *gauche* par rapport à l'une ou l'autre des variables le *produit tensoriel sur* $\mathcal{C}$

$$- \underset{\mathcal{C}}{\otimes} - : \mathcal{F}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}};K) \times \mathcal{F}(\mathcal{C};K) \to \mathbf{Ab}$$

qui est caractérisé par le fait qu'il commute aux colimites par rapport à chaque variable et que $F \underset{\mathcal{C}}{\otimes} P^c_{\mathcal{C}} \simeq F(c)$.

Catégories abéliennes quotient

On appelle sous-catégorie *épaisse* d'une catégorie abélienne $\mathcal{E}$ toute sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ qui est stable par sous-objet, quotient et extensions. Une telle sous-catégorie donne lieu à une *catégorie quotient* $\mathcal{E}/\mathcal{C}$ (Grothendieck, Gabriel) qui s'obtient à partir de $\mathcal{E}$ en inversant formellement les morphismes dont le noyau et le conoyau appartiennent à $\mathcal{C}$. Une telle catégorie quotient existe si la classe des sous-objets d'un objet donné de $\mathcal{E}$ forme toujours un ensemble, par exemple si $\mathcal{E}$ est une catégorie de Grothendieck.
Le foncteur canonique $\mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{C}$ est *exact*. S'il possède un adjoint à droite (resp. à gauche, resp. des deux côtés), on dit que $\mathcal{C}$ est *localisante* (resp. *colocalisante*, *bilocalisante*).

Supposons que $\mathcal{E}$ est une catégorie de Grothendieck et $\mathcal{C}$ une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{E}$. Alors $\mathcal{C}$ est localisante si et seulement si $\mathcal{C}$ est stable par sommes directes arbitraires ; $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}/\mathcal{C}$ sont alors des catégories de Grothendieck.

$\mathcal{C}$ est colocalisante si et seulement si elle est bilocalisante si et seulement si elle est stable par produits arbitraires.

Exemple typique : dans la catégorie $\mathbf{Ab}$, la sous-catégorie $\mathbf{Ab}_{\mathrm{tor}}$ des groupes abéliens de torsion est localisante (mais non colocalisante). Le foncteur de rationalisation $\mathbf{Ab} \to \mathbb{Q}\text{-}\mathbf{Mod}$ induit une équivalence $\mathbf{Ab}/\mathbf{Ab}_{\mathrm{tor}} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Q}\text{-}\mathbf{Mod}$.

Treillis de sous-objets et propriétés de finitude dans les catégories de Grothendieck

Soient $\mathcal{E}$ une catégorie de Grothendieck et X un objet de $\mathcal{E}$. L'ensemble $\mathrm{Sob}(X)$ des sous-objets de X, ordonné par inclusion, est un *treillis complet* : toute partie possède une borne supérieure et une borne inférieure.

On dit que X est :

- *noethérien* si toute suite croissante de sous-objets de X stationne ;
- *artinien* si toute suite décroissante de sous-objets de X stationne ;
- *fini* s'il est à la fois noethérien et artinien (ce qui équivaut à l'existence d'une filtration finie dont les sous-quotients sont *simples*, i.e. avec un treillis de sous-objets à exactement deux éléments ; la longueur de la filtration et le type d'isomorphisme des sous-quotients, à l'ordre près, sont uniquement déterminés par X) ;
- *de type fini* si toute famille de sous-objets de X dont la réunion (i.e. borne supérieure pour l'inclusion) est X possède une sous-famille finie dans la réunion est X.

La sous-catégorie pleine des objets noethériens (resp. artiniens, finis) de $\mathcal{E}$ est épaisse. La sous-catégorie des objets de type fini est stable par quotient et extensions, mais généralement par sous-objet. Un objet est noethérien si et seulement si tous ses sous-objets sont de type fini.

On dit que $\mathcal{E}$ est *localement noethérienne* (resp. *localement de type fini*, *localement finie*) si elle est engendrée par ses objets noethériens (resp. de type fini, finis), ce qui revient à dire que tout objet y est localement noethérien (resp. localement de type fini, localement fini), i.e. somme de ses sous-objets noethériens (resp. de type fini, finis).

La catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ est localement de type fini car elle est engendrée par les foncteurs de type fini $P^c_{\mathcal{C}}$. Elle n'est en revanche pas localement noethérienne, en général (même si K est un corps).

Proposition

Si X est un objet d'une catégorie de Grothendieck $\mathcal{E}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *X est de type fini ;*
2. *le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X,-) : \mathcal{E} \to \mathbf{Ab}$ commute aux colimites filtrantes de monomorphismes ;*
3. *si I est une petite catégorie filtrante et $\Phi : I \to \mathcal{E}$ un foncteur où I est une petite catégorie filtrante, alors le morphisme canonique*

$$\operatorname*{colim}_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X,-) \circ \Phi \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \operatorname*{colim}_I \Phi)$$

est un monomorphisme.

La démonstration de cette propriété classique repose sur l'exactitude des colimites filtrantes dans $\mathcal{E}$.

Présentation finie

Définition

On dit qu'un objet X de $\mathcal{E}$ est *de présentation finie* si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X,-)$ commute aux colimites filtrantes.

Contrairement à la propriété de type fini, la présentation finie ne dépend pas que du treillis des sous-objets, c'est une propriété globale de la catégorie (par exemple, un objet *simple* n'est pas nécessairement de type fini, déjà dans une catégorie de modules — par exemple, le A-module A/I, où A est un anneau commutatif et I un idéal maximal de A qui n'est pas de type fini).

Présentation finie supérieure

On définit la propriété de présentation finie supérieure d'ordre n, où $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ — en abrégé pf_n — de la façon suivante.

Définition

On dit qu'un objet X d'une catégorie de Grothendieck $\mathcal{E}$ vérifie la propriété pf_n si le foncteur $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{E}}(X, -)$ commute aux colimites filtrantes de monomorphismes pour tout entier naturel $i \leq n$.

Ainsi, pf_0 est la propriété de type fini.

Proposition

Pour $n > 0$, es assertions suivantes sont équivalentes :

1. *X vérifie pf_n ;*
2. *le foncteur $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{E}}(X, -)$ commute aux colimites filtrantes pour $i < n$.*

En particulier pf_1 est la propriété de présentation finie.

Exemples fondamentaux

Tout objet projectif de type fini d'une catégorie de Grothendieck $\mathcal{E}$ vérifie la propriété pf_∞.

Proposition

Si la catégorie $\mathcal{E}$ est localement noethérienne, alors tout objet de type fini de $\mathcal{E}$ vérifie la propriété pf_∞.

Réciproquement, si $\mathcal{E}$ est localement de type fini et que tout objet de type fini de $\mathcal{E}$ est de présentation finie, alors $\mathcal{E}$ est localement noethérienne. En général, il n'est pas facile de déterminer si un objet de type fini de $\mathcal{E}$ vérifie pf_∞ (par exemple, si K est un corps et G un groupe infini, le problème de savoir quand le $K[G]$-module K vérifie pf_∞ est intéressant et difficile).

Propriété pf_n et suites exactes courtes

La propriété classique suivante découle de considérations formelles de foncteurs cohomologiques.

Proposition

Soient $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ une suite exacte courte d'une catégorie de Grothendieck $\mathcal{E}$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

1. *Si X et Z vérifient pf_n, alors il en est de même pour Y.*
2. *Si $X \in pf_n(\mathcal{E})$ et $Y \in pf_{n+1}(\mathcal{E})$, alors $Z \in pf_{n+1}(\mathcal{E})$.*
3. *Si $Z \in pf_{n+1}(\mathcal{E})$ et $Y \in pf_n(\mathcal{E})$, alors $X \in pf_n(\mathcal{E})$.*

Propriété pf_n et résolutions projectives de type fini

Corollaire

Supposons que $\mathcal{E}$ possède un ensemble d'objets F qui engendre $\mathcal{E}$ et est inclus dans $pf_n(\mathcal{E})$. Alors un objet X de $\mathcal{E}$ vérifie pf_n si et seulement s'il existe une suite exacte

$$P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to X \to 0$$

où chaque objet P_i est une somme directe finie d'éléments de F.

Un cas particulier fondamental est celui où F est constitué d'objets projectifs de type fini — par exemple, les $P_{\mathcal{C}}^c$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$.

Applications de la propriété pf_n (I) : une propriété de finitude

Proposition

Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie, $n \in \mathbb{N}$ et F un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ vérifiant la propriété pf_n. Pour tout foncteur G (resp. H) de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ (resp. $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}; K)$) prenant ses valeurs dans les K-modules noethériens et tout entier $i \leq n$, le K-module $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathcal{C};K)}(F, G)$ (resp. $\mathrm{Tor}^{\mathcal{C}}_i(H, F)$) est noethérien.

Applications de la propriété pf_n (II) : une formule de Künneth

Proposition

Supposons que K est un corps. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des petites catégories et F, G (resp. X, Y) des foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ (resp. $\mathcal{F}(\mathcal{D};K)$). Il existe un morphisme naturel de K-espaces vectoriels gradués

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{C};K)}(F,G)\otimes_K \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{D};K)}(X,Y)\to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{C}\times\mathcal{D};K)}(F\boxtimes_K X, G\boxtimes_K Y)$$

qui est bijectif en degrés $< n$ et injectif en degré n si F et X vérifient la propriété pf_{n-1}.

Ici $\boxtimes_K$ désigne le *produit tensoriel extérieur* sur K, donné par $(F\boxtimes_K X)(c,d)=F(c)\otimes_K X(d)$.

Foncteurs polynomiaux sur $\mathbf{P}(A)$

Soient A un anneau et $\mathcal{E}$ une catégorie de Grothendieck. On définit le *foncteur différence* $\Delta : \mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A), \mathcal{E}) \to \mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A), \mathcal{E})$ par

$$\Delta(F)(V) := \mathrm{Ker}\,(F(V \oplus A) \twoheadrightarrow F(V)) \simeq \mathrm{Coker}\,(F(V) \hookrightarrow F(V \oplus A))\ ;$$

on a ainsi une décomposition naturelle $F \circ (- \oplus A) \simeq F \oplus \Delta(F)$.

Définition

Soient $d \in \mathbb{N}$ et $F : \mathbf{P}(A) \to \mathcal{E}$ un foncteur. On dit que F est polynomial de degré au plus d si $\Delta^{d+1}(F) = 0$.

Comme le foncteur Δ est exact (et commute aux limites et colimites), la sous-catégorie $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{P}(A), \mathcal{E})$ des foncteurs polynomiaux de degré au plus d est *bilocalisante* dans $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A), \mathcal{E})$.
Nous reviendrons au deuxième exposé sur ces sous-catégories, avec une source additive générale (et une variante de la définition précédente).

Support de n-présentation

Définition

Soient $\mathcal{E}$ une catégorie de Grothendieck, $\mathcal{C}$ une petite catégorie, S un ensemble d'objets de $\mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$ et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ un foncteur. On dit que S est un *support de n-présentation* de F s'il existe une suite exacte

$$X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to F \to 0$$

où chaque foncteur X_i est de la forme

$$\bigoplus_{s \in S} M_s[\mathcal{C}(s, -)]$$

où les M_s sont des objets de $\mathcal{E}$.

($M[T]$: somme directe de copies de M indexées par T.)

Propriété psf_n

On dit qu'un foncteur vérifie la propriété psf_n (où $n \in \mathbb{N}$) s'il admet un support de n-présentation fini. On dit qu'un foncteur vérifie la propriété psf_∞ s'il vérifie psf_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La propriété psf_n est une forme « relative » de la propriété pf_n, ce que nous allons préciser maintenant.

Liens entre les propriétés pf_n et psf_n

Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie, $\mathcal{E}$ une catégorie de Grothendieck et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Proposition

Tout foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ *vérifiant la propriété* pf_n *vérifie également* psf_n.

Proposition

Supposons que, pour tous objets a *et* b *de* $\mathcal{C}$, *l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$ *est fini. Alors les assertions suivantes sont équivalentes pour un foncteur* F *de* $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$.

1. F *vérifie la propriété* pf_n.
2. F *vérifie la propriété* psf_n *et ses valeurs appartiennent à* $pf_n(\mathcal{E})$.

Propriété psf_n et foncteur différence

On commence par introduire une version quantitative de la propriété psf_n pour un foncteur $F : \mathbf{P}(A) \to \mathcal{E}$: on dit que F vérifie $psf_n(m)$, où $m \in \mathbb{N}$, si $\{A^m\}$ en constitue un support de n-présentation. Il revient au même de demander que $\{A^i \mid i \leq n\}$ en constitue un support de m-présentation.

Proposition

1. *Si F vérifie $psf_n(m)$, alors il en est de même pour $\Delta(F)$.*
2. *Si $\Delta(F)$ vérifie $psf_n(m)$, alors F vérifie $psf_n(n+m+1)$.*

Le lemme de Schwartz (version psf_∞)

Théorème

Soient A un anneau, $\mathcal{E}$ une catégorie de Grothendieck et $n, d \in \mathbb{N}$. Alors tout foncteur de $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{P}(A), \mathcal{E})$ vérifie la propriété $psf_n(d.(n+1))$. En particulier, tout foncteur polynomial de $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A), \mathcal{E})$ vérifie la propriété psf_∞.

Le lemme de Schwartz (cas d'un anneau fini à la source)

Corollaire

Soient A un anneau **fini** *et F un foncteur polynomial de $\mathcal{F}(A, K)$. Supposons que l'anneau K est noethérien. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *F est de type fini ;*
2. *F prend ses valeurs dans les K-modules de type fini ;*
3. *F vérifie la propriété pf_∞.*

L'équivalence entre 1 et 3 est fausse pour un anneau quelconque ; nous verrons qu'elle demeure exacte si A est un anneau commutatif de type fini, mais avec une approche différente.

Postlude : le théorème de noethérianité de Putman-Sam-Snowden

En effet, l'équivalence des trois assertions du théorème précédent demeure valide pour un foncteur quelconque (non polynomial) de $\mathcal{F}(A, K)$, grâce au résultat suivant :

Théorème (Putman-Sam-Snowden)

Si l'anneau A est fini et l'anneau K noethérien, alors la catégorie $\mathcal{F}(A, K)$ est localement noethérienne.

Toutefois, ce résultat est postérieur de quelque 20 ans au lemme de Schwartz et bien plus difficile à démontrer.
De plus, si A est infini, la catégorie $\mathcal{F}(A, K)$ n'est *pas* localement noethérienne, alors que la propriété pf_∞ persiste pour de vastes classes de foncteurs polynomiaux.

Fin (provisoire)

Merci pour votre attention !

Cảm ơn