Noethérianité et finitude homologique des foncteurs polynomiaux (II) : foncteurs polynomiaux ordinaires et stricts ; premiers résultats de noethérianité

Aurélien DJAMENT

CNRS, LAGA, Villetaneuse, France

novembre 2023

Deuxième exposé d'un mini-cours virtuel à destination du VIASM
D'après un article avec Antoine Touzé à paraître au *Tunisian Journal of Mathematics*.

Effets croisés

Dans tout cet exposé, $\mathcal{A}$ désigne une catégorie additive essentiellement petite, $\mathcal{E}$ une catégorie abélienne, A un anneau et k un anneau commutatif.

Nous sommes principalement intéressés par le cas $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$ (A-modules à gauche libres de rang fini) et $\mathcal{E} = k$-$\mathbf{Mod}$.

Définition (Eilenberg-MacLane)

Soient $F : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ un foncteur et $d \in \mathbb{N}$. On définit le *d-ième effet croisé* de F comme le foncteur $cr_d(F) : \mathcal{A}^d \to \mathcal{E}$ donné par

$$cr_d(F)(a_1, \dots, a_d) = \operatorname{Ker}\left(F\Big(\bigoplus_{i=1}^{d} a_i\Big) \to \bigoplus_{i=1}^{d}\Big(F\Big(\bigoplus_{j \neq i} a_j\Big)\Big)\right)$$

où les morphismes sont induits par les projections canoniques

$$\bigoplus_{i=1}^{d} a_i \twoheadrightarrow \bigoplus_{j \neq i} a_j.$$

Foncteurs polynomiaux ordinaires (à la Eilenberg-MacLane)

On dispose d'une décomposition naturelle

$$F\Big(\bigoplus_{i=1}^{d} a_i\Big) \simeq \bigoplus_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n} cr_r(F)(a_{i_1},\dots,a_{i_r}).$$

On définit ainsi un foncteur $cr_d : \mathbf{Fct}(\mathcal{A},\mathcal{E}) \to \mathbf{Fct}(\mathcal{A}^d,\mathcal{E})$ qui est *facteur direct* de la précomposition par la somme directe d-itérée $\mathcal{A}^d \to \mathcal{A}$, et en particulier commute aux limites et colimites (et est en particulier exact).

Définition (Eilenberg-MacLane)

Un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ est dit *polynomial* de degré au plus d si le multifoncteur $cr_{d+1}(F)$ est nul.
On note $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A},\mathcal{E})$ formée de ces foncteurs.

(On vérifie aisément que, pour $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$, cette définition est équivalente à celle donnée dans le premier exposé.)

Une propriété de finitude facile

La propriété suivante se déduit facilement de la décomposition naturelle de la page précédente.

Proposition

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, la restriction du foncteur d'évaluation en A^d induit un foncteur exact et fidèle $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{P}(A), \mathcal{E}) \to \mathcal{E}$.

Ainsi, si F appartient à $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{P}(A), \mathcal{E})$, l'ensemble ordonné des sous-foncteurs de F est un sous-ensemble ordonné de l'ensemble ordonné des sous-objets de $F(A^d)$ dans $\mathcal{E}$, d'où :

Corollaire

Si $F : \mathbf{P}(A) \to \mathcal{E}$ est un foncteur polynomial dont les valeurs sont noethériennes (resp. artiniennes, finies) dans $\mathcal{E}$, alors F est noethérien (resp. artinien, fini) dans $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A), \mathcal{E})$

Deux applications

Si l'anneau A est fini, tout foncteur (non nécessairement polynomial) de type fini de $\mathcal{F}(A,k)$ est à valeurs dans les k-modules de type fini, ainsi :

Corollaire

Si A est un anneau fini et k un corps, alors tout foncteur polynomial de $\mathcal{F}(A,k)$ est localement fini.

Si l'anneau A a un groupe additif de type fini, tout foncteur polynomial de type fini de $\mathcal{F}(A,k)$ est à valeurs dans les k-modules de type fini, d'où :

Corollaire

Si le groupe additif sous-jacent à A est de type fini et que l'anneau k est artinien (resp. noethérien), alors tout foncteur polynomial de $\mathcal{F}(A,k)$ est localement fini (resp. localement noethérien).

Théorème de recollement de Pirashvili (préliminaires)

Comme les foncteurs cr_n commutent aux limites et colimites, les sous-catégories $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ sont *bilocalisantes* dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ (au moins si $\mathcal{E}$ est une catégorie de Grothendieck). On peut donc former les catégories abéliennes quotients $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$. Pirashvili a décrit, à la fin des années 1980, ces catégories quotients.

Pour F dans $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, le multifoncteur $cr_d(F) : \mathcal{A}^d \to \mathcal{E}$ est *additif* par rapport à chacune des d variables. De plus, il est muni, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_d$, d'isomorphismes naturels

$$cr_d(F)(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(d)}) \simeq cr_d(F)(a_1, \dots, a_d)$$

compatibles en un sens approprié à la composition des permutations. On dit que $cr_d(F)$ est un d-multifoncteur *symétrique* sur $\mathcal{A}$ (à valeurs dans $\mathcal{E}$).

Théorème de recollement de Pirashvili (énoncé)

On note $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$ la catégorie des multifoncteurs $\mathcal{A}^d \to \mathcal{E}$ additifs par rapport à chaque variable (c'est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}^d,\mathcal{E})$), et $\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$ la catégorie des multifoncteurs *symétriques* de $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$. Les morphismes de $\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$ sont les transformations naturelles qui commutent aux isomorphismes de symétrie (qui font partie de la structure). Ainsi, cr_d induit un foncteur exact $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathcal{E}) \to \Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$. Son noyau est par définition $\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{A},\mathcal{E})$, il induit donc un foncteur exact et fidèle $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathcal{E})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{A},\mathcal{E}) \to \Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$.

Théorème (Pirashvili)

Le foncteur cr_d induit une équivalence de catégories

$$\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathcal{E})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{A},\mathcal{E}) \xrightarrow{\simeq} \Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E})\,.$$

Théorème de recollement de Pirashvili (cas particulier fondamental)

La catégorie $\mathbf{Add}_d(\mathbf{P}(A), k\text{-}\mathbf{Mod})$ est équivalente à $(k \otimes (A^{\mathrm{op}})^{\otimes d})\text{-}\mathbf{Mod}$, où les produits tensoriels sont pris sur $\mathbb{Z}$.

De manière générale, si un groupe G opère sur un anneau commutatif K, notons $K \rtimes G$ l'*algèbre de groupe tordue* de G sur K : le K-module sous-jacent est le même que l'algèbre de groupe usuelle $K[G]$, et la multiplication est donnée par

$$(\lambda[g]).(\mu[h]) = (\lambda(g_*\mu))[gh]$$

(pour $(\lambda, \mu, g, h) \in K \times K \times G \times G$).

Alors

$$\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathbf{P}(A), k\text{-}\mathbf{Mod}) \simeq (k \otimes (A^{\mathrm{op}})^{\otimes d}) \rtimes \mathfrak{S}_d\text{-}\mathbf{Mod}\,,$$

où $\mathfrak{S}_d$ opère sur $k \otimes (A^{\mathrm{op}})^{\otimes d}$ par permutation des facteurs du produit tensoriel.

Théorème de recollement de Pirashvili (éléments de démonstration)

Le foncteur $cr_d : \mathbf{Fct}(\mathcal{A},\mathcal{E}) \to \mathbf{Fct}(\mathcal{A}^d,\mathcal{E})$ prend ses valeurs dans la sous-catégorie pleine $\mathbf{Fct}^{d-\mathrm{red}}(\mathcal{A}^d,\mathcal{E})$ des multifoncteurs *d-réduits*, c'est-à-dire nuls sur tout d-uplet d'objets de $\mathcal{A}$ dont une composante est nulle.

Proposition (adjonction somme/diagonale)

Le foncteur $\mathbf{Fct}(\mathcal{A},\mathcal{E}) \to \mathbf{Fct}^{d-\mathrm{red}}(\mathcal{A}^d,\mathcal{E})$ induit par cr_d est adjoint à droite et à gauche à la restriction à $\mathbf{Fct}^{d-\mathrm{red}}(\mathcal{A}^d,\mathcal{E})$ de la précomposition δ_d^* par la diagonale d-itérée $\delta_d : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^d$.
Cette adjonction se restreint au foncteur $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathcal{E}) \to \mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$ induit par cr_d, adjoint à droite et à gauche au foncteur $\Delta_d : \mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E}) \to \mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$ induit par δ_d^*.

Si X est un objet de $\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$, la structure symétrique sur X induit une action du groupe $\mathfrak{S}_d$ sur le foncteur $\Delta_d(X)$ de $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$.

Proposition

Le foncteur $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathcal{E}) \to \Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$ qu'induit cr_d est adjoint à gauche au foncteur

$$\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E}) \to \mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathcal{E}) \qquad X \mapsto \Delta_d(X)^{\mathfrak{S}_d}$$

(invariants sour l'action de $\mathfrak{S}_d$).

Si F est un foncteur de $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$, on vérifie facilement que le noyau et le conoyau de l'unité de l'adjonction $F \to \Delta_d cr_d(F)^{\mathfrak{S}_d}$ appartiennent à $\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{A},\mathcal{E})$.
On en déduit que le foncteur $(\Delta_d cr_d)^{\mathfrak{S}_d}$ induit l'identité sur $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathcal{E})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{A},\mathcal{E})$.
On vérifie également que la composée $cr_d(\Delta_d^{\mathfrak{S}_d})$ est isomorphe à l'identité de la catégorie $\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$.

Puissances divisées

Si V est un k-module, on définit l'algèbre des *puissances divisées* de V sur k, notée $\Gamma_k^*(V)$ comme la k-algèbre associative, commutative et unitaire engendrée par des éléments $v^{[n]}$ pour $v \in V$ et $n \in \mathbb{N}$ soumis aux relations suivantes :

- $\forall v \in V, \qquad v^{[0]} = 1\,;$
- $\forall (\lambda, v, n) \in k \times V \times \mathbb{N}, \qquad (\lambda v)^{[n]} = \lambda^n . v^{[n]}\,;$
- $\forall (v, n, m) \in V \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \qquad v^{[n]}.v^{[m]} = \frac{(n+m)!}{n!m!}.v^{[n+m]}\,;$
- $\forall (v, w, n) \in V \times V \times \mathbb{N}, \qquad (v+w)^{[n]} = \sum_{i+j=n} v^{[i]}.w^{[j]}\,.$

Cette algèbre est graduée par $\deg(v^{[n]}) := n$. On note $\Gamma_k^d(V)$ la composante homogène de degré d de l'algèbre graduée $\Gamma_k^*(V)$. On définit ainsi un endofoncteur Γ_k^d des k-modules appelé d-ième puissance divisée.

Le foncteur Γ^d_k est polynomial de degré d. Il préserve les morphismes surjectifs et les colimites filtrantes, et l'on dispose d'un morphisme k-linéaire naturel $\Gamma^d_k(V) \to (V^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}$ qui est un isomorphisme si V est un module *plat*.
Le foncteur Γ^d_k est compatible au changement de l'anneau de base k en le sens suivant : si $k \to K$ est un morphisme d'anneaux, avec K commutatif, on dispose d'un isomorphisme K-linéaire $\Gamma^d_K(K \otimes_k V) \simeq K \otimes_k \Gamma^d_k(V)$ naturel en le k-module V.

Le foncteur Γ^d_k possède une structure canonique d'endofoncteur *monoïdal symétrique* de la catégorie monoïdale symétrique $(k\text{-}\mathbf{Mod}, \otimes, k)$. Cela permet de relever Γ^d_k en un endofoncteur des k-algèbres.

Foncteurs polynomiaux stricts (à la Friedlander-Suslin)

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie k-linéaire, on définit une catégorie k-linéaire $\Gamma^d_k\mathcal{A}$ ayant les mêmes objets que $\mathcal{A}$ et dont les morphismes sont donnés par $(\Gamma^d_k\mathcal{A})(a,b) := \Gamma^d_k(\mathcal{A}(a,b))$ et la composition par

$$\Gamma^d_k(\mathcal{A}(a,b)) \otimes_k \Gamma^d_k(\mathcal{A}(b,c)) \to \Gamma^d_k(\mathcal{A}(a,b) \otimes_k \mathcal{A}(b,c)) \to \Gamma^d_k(\mathcal{A}(a,c))$$

où la première flèche est induite par la structure monoïdale de Γ^d_k et la seconde par la composition de $\mathcal{A}$.

Définition

Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie k-linéaire, $\mathcal{E}$ une catégorie abélienne k-linéaire et $d \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}_{d;k}(\mathcal{A},\mathcal{E})$ la catégorie $\mathbf{Add}_k(\Gamma^d_k(\mathcal{A}),\mathcal{E})$ des foncteurs k-linéaires $\Gamma^d_k(\mathcal{A}) \to \mathcal{E}$. Ses objets sont appelés *foncteurs polynomiaux stricts* homogènes de degré d sur k de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{E}$.
On note $\mathcal{P}_{d;k}(\mathcal{A};k)$ pour $\mathcal{P}_{d;k}(\mathcal{A},k\text{-}\mathbf{Mod})$; lorsque A et B sont des k-algèbres, on note $\mathcal{P}_{d;k}(A,B)$ pour $\mathcal{P}_{d;k}(\mathbf{P}(A),B\text{-}\mathbf{Mod})$.

Cette notion a été introduite, dans le cas de $\mathcal{P}_{d;k}(k,k)$, par Friedlander et Suslin (*Inventiones* 1997). Elle est reliée aux représentations des groupes *algébriques* linéaires.

Lien avec les foncteurs polynomiaux ordinaires

On dispose d'un morphisme k-linéaire $k[V] \to \Gamma_k^d(V) \quad v \mapsto v^{[d]}$ naturel en le k-module V. Il est compatible aux structures monoïdales symétriques des foncteurs $k[-]$ et Γ_k^d. On en déduit, si $\mathcal{A}$ est une catégorie k-linéaire, un foncteur k-linéaire $k[\mathcal{A}] \to \Gamma_k^d(\mathcal{A})$ qui est l'identité sur les objets.

Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ est également petite et additive. Le foncteur $\mathcal{P}_{d;k}(\mathcal{A},\mathcal{E}) \to \mathbf{Fct}(\mathcal{A},\mathcal{E})$ (où $\mathcal{E}$ est une catégorie abélienne k-linéaire) qu'on obtient par précomposition par le foncteur précédent est à valeurs dans $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$.
On obtient ainsi un foncteur $i_d : \mathcal{P}_{d;k}(\mathcal{A},\mathcal{E}) \to \mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$ qui est exact (il commute même à toutes les limites et colimites) et fidèle. Il n'est en revanche pas plein en général.

Proposition

Un foncteur F de $\mathcal{P}_{d;k}(\mathcal{A},\mathcal{E})$ est de type fini si et seulement si le foncteur $i_d(F)$ de $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$ est de type fini.

Supposons maintenant $k=\mathbb{Z}$. Le morphisme naturel $\Gamma^d_{\mathbb{Z}}(V)\to V^{\otimes d}$ induit un foncteur additif $\Gamma^d_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})\to\mathcal{A}^{\otimes d}$ (le produit tensoriel de deux catégories préadditives $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est la catégorie préadditive $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ donnée par $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})=\mathrm{Ob}(\mathcal{A})\times\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ et $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})((a,b),(a',b'))=\mathcal{A}(a,a')\otimes\mathcal{B}(b,b')$). Par précomposition, on en déduit un foncteur exact et fidèle

$$\mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E})\simeq\mathbf{Add}(\mathcal{A}^{\otimes d},\mathcal{E})\to\mathcal{P}_{d;\mathbb{Z}}(\mathcal{A},\mathcal{E})$$

d'où en précomposant par le foncteur d'oubli un foncteur

$$\tilde{\Delta}_d:\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E})\to\mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E})\to\mathcal{P}_{d;\mathbb{Z}}(\mathcal{A},\mathcal{E})$$

tel que $\Delta_d\simeq i_d\circ\tilde{\Delta}_d:\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A},\mathcal{E})\to\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathcal{E})$.

Lien avec les algèbres de Schur

Le résultat suivant se déduit du théorème de Gabriel-Popescu.

Proposition

Soient A et B des k-algèbres et $n \geq d \geq 0$ des entiers. Alors le foncteur d'évaluation en A^n induit une équivalence de catégories k-linéaire

$$\mathcal{P}_{d;k}(A, B) \xrightarrow{\simeq} (\Gamma^d_k(\mathcal{M}_n(A)) \otimes_k B)\text{-}\mathbf{Mod}.$$

Les algèbres $\Gamma^d_k(\mathcal{M}_n(A))$ sont des généralisations des algèbres de Schur classiques.

(On peut également montrer que la catégorie $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{P}(A), k)$ est équivalente à une catégorie de modules sur un certain anneau, mais cet anneau est peu maniable.)

Un théorème classique de Noether

Théorème (Noether)

Soient k un anneau commutatif noethérien, A une k-algèbre commutative de type fini et G un groupe fini opérant sur A (par automorphismes de k-algèbre). Alors l'algèbre A^G des invariants est une k-algèbre de type fini (et donc en particulier noethérienne).

En appliquant ce résultat à une extension de carré nul, on obtient :

Corollaire

Sous les hypothèses précédentes, si V est un A-module de type fini muni d'une action de G telle que $g_*(a.v) = (g_*a).(g_*v)$ pour tout $(g, a, v) \in G \times A \times V$, alors V^G est un A^G-module de type fini.

Un théorème de noethérianité pour les foncteurs polynomiaux stricts

Théorème (D.-Touzé)

Soient k un anneau commutatif noethérien et A une k-algèbre commutative essentiellement de type fini (i.e. une localisation d'une k-algèbre commutative de type fini).
Alors pour tout $d \in \mathbb{N}$, la catégorie de foncteurs polynomiaux stricts $\mathcal{P}_{d;k}(A, k)$ est localement noethérienne.

On peut aussi remplacer A par une algèbre (non nécessairement commutative) *finie* (i.e. de type fini comme module) sur une k-algèbre commutative essentiellement de type fini (avec la même démonstration).

Démonstration (1) : réductions

1. Il s'agit de montrer que la k-algèbre $\Gamma_k^d(\mathcal{M}_d(A))$ est noethérienne.
2. Il suffit de montrer le résultat lorsque A est une k-algèbre de type fini. (Tout commute à la localisation, et un localisé d'un anneau noethérien est noethérien.)
3. Il suffit de montrer le résultat lorsque A est une k-algèbre de type fini et *plate*. En effet, une k-algèbre de type fini est quotient d'une algèbre de polynômes $k[x_1, \dots, x_n]$, qui est k-plate, Γ_k^d préserve les morphismes surjectifs, et un quotient d'un anneau noethérien est noethérien.

Démonstration (2) : cas où A est plate et de type fini

$A^{\otimes d}$ est une k-algèbre de type fini, et $V := (\mathcal{M}_d(A))^{\otimes d}$ est un $A^{\otimes d}$-module de type fini. Le groupe $\mathfrak{S}_d$ opère sur $A^{\otimes d}$ et V (de façon compatible), de sorte que le théorème de Noether montre que $(A^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}$ est une k-algèbre commutative de type fini, donc noethérienne, et que $V^{\mathfrak{S}_d}$ est un $(A^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}$-module de type fini.

Comme les k-modules A et $\mathcal{M}_d(A)$ sont plats, $\Gamma^d_k(A) \simeq (A^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}$ et $\Gamma^d_k(\mathcal{M}_d(A)) \simeq V^{\mathfrak{S}_d}$. Ainsi, $\Gamma^d_k(\mathcal{M}_d(A))$ est une algèbre finie sur une k-algèbre commutative de type fini, et est donc noethérienne.

Fin (provisoire)

Merci pour votre attention !

Cảm ơn