# Noethérianité et finitude homologique des foncteurs polynomiaux (III)

Aurélien DJAMENT

CNRS, LAGA, Villetaneuse, France

novembre 2023

Dernier exposé d'un mini-cours virtuel à destination du VIASM
D'après des travaux avec Antoine Touzé.

# Plan de l'exposé

# Un théorème de préservation de la propriété $pf_\infty$

Le théorème suivant est ancien mais n'a pendant longtemps pas été publié ; voir Scholze, *Consended mathematics* (appendix to lecture IV).

**Théorème (Breen, Deligne...)**

*Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive. Le foncteur d'inclusion* $\mathbf{Add}(\mathcal{A};\mathbb{Z}) \to \mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ *préserve la propriété $pf_n$ pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

Il s'agit d'une pure propriété des groupes abéliens (précomposer ensuite par un foncteur $\mathcal{A}(a,-)$) qui se déduit de résultats de topologie algébrique classiques mais non triviaux sur l'homologie des espaces d'Eilenberg-MacLane.

# Une généralisation aux foncteurs polynomiaux

**Théorème (D.-Touzé)**

*Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive et $d \in \mathbb{N}$. On suppose que la catégorie $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ est localement noethérienne. Alors tout foncteur de type fini de $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ vérifie la propriété $pf_\infty$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$.*

(Dès le cas $d = 2$, il n'est pas difficile de voir que la conclusion peut tomber en défaut si l'on omet l'hypothèse de noethérianité locale.)

Le résultat s'établit par récurrence sur $d$. On va en esquisser la démonstration.

# Démonstration (I) : un résultat essentiel sur les produits tensoriels

La partie la plus difficile de la démonstration du théorème précédent à partir du cas additif consiste à établir le résultat suivant, que nous admettrons avant d'y revenir en fin d'exposé.

**Théorème (D.-Touzé)**

*Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $\mathfrak{P}$ une classe d'objets de $\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$\mathfrak{P}$ est stable par sous-objet ;*
2. *tout objet de $\mathfrak{P}$ est noethérien ;*
3. *$\mathfrak{P}$ est incluse dans $pf_n(\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z}))$.*

*Alors tout produit tensoriel d'éléments de $\mathfrak{P}$ vérifie $pf_n$.*

### Remarque

Il est clair qu'un produit tensoriel de foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ vérifiant $pf_n$ et *à valeurs sans torsion sur* $\mathbb{Z}$ vérifie encore $pf_n$ (regarder le produit tensoriel de projectifs de type fini !) ; toute la difficulté vient donc de la gestion de la torsion.
Sans hypothèse supplémentaire, un produit tensoriel de foncteurs, y compris additifs, de $\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ vérifiant $pf_2$ peut ne pas vérifier $pf_2$.

En combinant le théorème précédent à celui du début de cet exposé (Breen-Deligne...), on obtient :

### Corollaire

*Si la catégorie* $\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbb{Z})$ *est localement noethérienne, alors tout produit tensoriel de foncteurs additifs de type fini vérifie la propriété* $pf_\infty$ *dans* $\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$.

# Démonstration (II) : la diagonalisation des effets croisées vérifie $pf_\infty$

On se place sous les hypothèses du théorème : $\mathcal{A}$ est additive telle que $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathbb{Z})$ soit localement noethérienne, et $F$ désigne un foncteur de type fini de $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A},\mathbb{Z})$.

**Lemme**

*Les foncteurs $cr_d : \mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z}) \to \mathcal{F}(\mathcal{A}^d;\mathbb{Z})$ et $\Delta_d : \mathcal{F}(\mathcal{A}^d;\mathbb{Z}) \to \mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ (précomposition par la diagonale itérée) préservent la propriété $pf_n$ pour tout $n$.*

Cela découle de l'adjonction de ces foncteurs (des deux côtés) et du fait qu'ils sont exacts (l'adjonction se propage donc aux groupes d'extensions) et commutent aux colimites.

En particulier, $cr_d(F)$ est un multifoncteur de type fini de $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ (catégorie des $d$-multifoncteurs additifs par rapport à chaque variable).

La catégorie $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ est localement noethérienne car $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ l'est par hypothèse, donc aussi $\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A};\mathbb{Z}) \simeq \mathcal{P}ol_d(\mathcal{A};\mathbb{Z})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$, et l'on conclut par finitude du groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$.

La catégorie $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ est par ailleurs engendrée par les foncteurs projectifs de type fini $\mathcal{A}(a_1,-)\boxtimes\cdots\boxtimes\mathcal{A}(a_d,-)$, où les $a_i$ sont des objets de $\mathcal{A}$.
Ainsi, $cr_d(F)$ a une résolution projective dont chaque terme est une somme directe *finie* de foncteurs de ce type, donc $\Delta_d(cr_d(F))$ a une résolution dont tous les termes sont des sommes directes finies de foncteurs de la forme $\mathcal{A}(a_1,-)\otimes\cdots\otimes\mathcal{A}(a_d,-)$.

Par notre corollaire, il s'ensuit que $\Delta_d(cr_d(F)) \in pf_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z}))$.

# Démonstration (III) : passage aux co-invariants sous l'action de $\mathfrak{S}_d$

La résolution barre pour le groupe $\mathfrak{S}_d$ fournit un complexe de la forme

$$\dots \to \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_d^n] \otimes \Delta_d(cr_d(F)) \to \dots \to \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_d] \otimes \Delta_d(cr_d(F)) \to \Delta_d(cr_d(F))$$

dans $\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ qui possède les propriétés suivantes :

1. son homologie en degré 0 est $\Delta_d(cr_d(F))_{\mathfrak{S}_d}$ ;
2. son homologie en chaque degré $> 0$ appartient à $\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ (conséquence du recollement de Pirashvili) et est de type fini (comme sous-quotient d'un foncteur noethérien) ;
3. l'hypothèse de récurrence montre donc que cette homologie appartient à $pf_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z}))$ en chaque degré $> 0$ ;
4. et tous les termes du complexe appartiennent à $pf_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z}))$, comme $\Delta_d(cr_d(F))$.

Il en découle formellement que $\Delta_d(cr_d(F))_{\mathfrak{S}_d} \in pf_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z}))$.

# Démonstration (IV) : fin du pas de la récurrence

Par le théorème de Pirashvili, on dispose d'une suite exacte

$$0 \to G \to \Delta_d(cr_d(F))_{\mathfrak{S}_d} \to F \to H \to 0$$

où $G$ et $H$ appartiennent à $\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$. De plus, $H$ est de type fini (c'est un quotient de $F$), ainsi que $G$ (c'est un sous-quotient de $\Delta_d(cr_d(F))$, qui est noethérien). L'hypothèse de récurrence montre donc que $G$ et $H$ appartiennent à $pf_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z}))$. Comme c'est aussi le cas de $\Delta_d(cr_d(F))_{\mathfrak{S}_d}$, il s'ensuit que $F \in pf_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z}))$, d'où le théorème.

# Propriété $pf_\infty$ pour les foncteurs polynomiaux stricts

On rappelle que $i_d : \mathcal{P}_{d;\mathbb{Z}}(\mathcal{A}; k) \to \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ désigne le foncteur d'oubli.

### Théorème (D.-Touzé)

*Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive, $k$ un anneau commutatif noethérien et $d \in \mathbb{N}$. On suppose que les catégories $\mathcal{P}_{d;\mathbb{Z}}(\mathcal{A}; k)$ et* $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ *sont localement noethériennes.*
*Alors pour tout foncteur de type fini $F$ de $\mathcal{P}_d(\mathcal{A}; k)$, $i_d(F)$ appartient à $pf_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k))$.*

### Corollaire

*Soient $k$ et $A$ des anneaux commutatifs noethériens. On suppose que la $k$-algèbre $A_k := A \otimes_{\mathbb{Z}} k$ est essentiellement de type fini. Alors pour tout $d \in \mathbb{N}$ et tout foncteur de type fini $F$ de $\mathcal{P}_{d;\mathbb{Z}}(A, k)$, le foncteur $i_d(F)$ appartient à $pf_\infty(\mathcal{F}(A, k))$.*

Le corollaire se déduit du théorème, du résultat de noethérianité du cours précédent et de l'équivalence de catégories $\mathcal{P}_{d;\mathbb{Z}}(A, k) \simeq \mathcal{P}_{d;k}(A_k, k)$.

# Démonstration du théorème

Il suffit de montrer que pour tout $a \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, le foncteur $\Gamma^d_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}(a,-)) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ appartient à $pf_\infty(\mathcal{F}(\mathcal{A};k))$.

Comme $\mathcal{A}(a,-)$ est de type fini dans la catégorie localement noethérienne $\mathbf{Add}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$, son sous-foncteur de torsion est de type fini, donc il existe un entier $N > 0$ tel que toute la torsion de $\mathcal{A}(a,-)$ soit annulée par $N$.
Notons $\mathbf{ab}_N$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ab}$ constituée des groupes abéliens de type fini dont le sous-groupe de torsion est annulé par $N$. Cette catégorie est équivalente à $\mathbf{P}(\mathrm{A}_N)$, où $\mathrm{A}_N$ désigne l'anneau des endomorphismes du groupe abélien $\mathbb{Z} \oplus \bigoplus \mathbb{Z}/n$, où la somme directe est prise sur les diviseurs strictement positifs $n$ de $N$. Comme le groupe abélien sous-jacent à $\mathrm{A}_N$ est de type fini, la catégorie $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{ab}_N;\mathbb{Z})$ est localement noethérienne (cf. exposé 2), de sorte que le théorème qu'on a vu au début de cet exposé montre que la restriction à $\mathbf{ab}_N$ de $\Gamma^d_{\mathbb{Z}}$ appartient à $pf_\infty(\mathcal{F}(\mathbf{ab}_N;\mathbb{Z}))$.

Comme les foncteurs $\Gamma^d_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}[-]$ : $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ commutent aux colimites *filtrantes*, toute résolution projective de type fini de la restriction de $\Gamma^d_{\mathbb{Z}}$ à $\mathbf{ab}_N$ s'étend en une résolution de sa restriction à la sous-catégorie pleine $\mathbf{Ab}_N$ de $\mathbf{Ab}$ des groupes abéliens dont la torsion est annulée par $N$. En précomposant par $\mathcal{A}(a,-)$, on en déduit le résultat souhaité pour $k = \mathbb{Z}$.

Lorsque $k$ est sans torsion sur $\mathbb{Z}$, la conclusion s'ensuit aussitôt. Pour le cas général, on utilise :

**Lemme**

*Supposons que $k$ est un anneau noethérien et $F$ un foncteur noethérien de $\mathbf{Add}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$. Alors $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(F,k)$ est un foncteur de type fini de $\mathbf{Add}(\mathcal{A};k)$.*

La conclusion se montre alors par des arguments formels analogues à ceux qu'on va présenter plus loin pour montrer le théorème sur les produits tensoriels de foncteurs $pf_n$.

# Démonstration du lemme

Comme l'anneau $k$ est noethérien, l'idéal de ses éléments de $\mathbb{Z}$-torsion est de type fini, donc annulé par un entier $r > 0$. Il s'ensuit que le morphisme naturel

$$\bigoplus_n \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Z}/n) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(F, k)$$

de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k)$ déduit de la fonctorialité de $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$, où la somme directe est prise sur l'ensemble fini des diviseurs strictement positifs de $r$, est surjectif. La conclusion provient donc de ce que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, k) \hookrightarrow k$ est un $k$-module de type fini et $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Z}/n) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, F) \hookrightarrow F$ est un foncteur de type fini de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$, puisque $k$ et $F$ sont noethériens.

# Énoncé du théorème principal

**Théorème (D.-Touzé)**

*Soient $A$ un anneau commutatif essentiellement de type fini, $k$ un anneau commutatif noethérien et $F$ un foncteur polynomial de type fini de $\mathcal{F}(A,k)$. Alors $F$ est noethérien et vérifie la propriété $pf_\infty$.*

Avant de présenter la démonstration de ce théorème, qui est courte à partir des résultats vus dans les exposés précédents, nous allons en donner quelques généralisations et exemples.

# Quelques améliorations de l'énoncé

Plutôt que de supposer que $A$ est un anneau commutatif de type fini, on peut se contenter de supposer que $A$ est noethérien et que la $k$-algèbre $A_k := A \otimes_{\mathbb{Z}} k$ est essentiellement de type fini. On peut aussi seulement supposer que $A$ est non nécessairement commutatif, noethérien à droite, et que la $k$-algèbre $A_k$ est finie (i.e. de type fini comme module) sur une $k$-algèbre essentiellement de type fini. La démonstration est la même.

Si l'on suppose que $A$ commutatif, non nécessairement noethérien, et que la $k$-algèbre $A_k$ est essentiellement de type fini, alors la conclusion persiste *pour la noethérianité*, mais pas pour la propriété $pf_\infty$. La démonstration consiste à se ramener au théorème précédent par des arguments de changement d'anneau, à l'aide de résultats élémentaires d'algèbre commutative.

# Exemple : cas d'un corps

**Corollaire**

*Soient $k$ est un corps commutatif et $d \geq 1$ un entier. Les assertions sont équivalentes :*

1. *$k$ est un corps de type fini ;*
2. *la catégorie $\mathcal{P}ol_d(k, k)$ est localement noethérienne ;*
3. *tout foncteur de type fini de $\mathcal{P}ol_d(k, k)$ appartient à $pf_\infty(\mathcal{F}(k, k))$ ;*
4. *tout foncteur de type fini de $\mathcal{P}ol_d(k, k)$ appartient à $pf(\mathcal{F}(k, k))$.*

En effet, l'anneau $k \otimes_{\mathbb{Z}} k$ est noethérien si et seulement si $k$ est un corps de type fini.

# Démonstration du théorème principal

On procède par récurrence sur le degré $d$ de notre foncteur polynomial de type fini $F$ de $\mathcal{F}(A,k)$. On peut supposer $d > 0$ et l'assertion démontrée pour les foncteurs de degré $< d$.

Le multifoncteur $cr_d(F)$ est de type fini, de même que le foncteur $\Delta_d(cr_d(F))$. Comme $\Delta_d \circ cr_d \simeq i_d \circ \tilde{\Delta}_d \circ cr_d$, il s'ensuit que le foncteur polynomial *strict* $\tilde{\Delta}_d(cr_d(F))$ est de type fini dans la catégorie localement noethérienne (cf. exposé 2) $\mathcal{P}_{d;\mathbb{Z}}(A,k) \simeq \mathcal{P}_{d;k}(A_k,k)$. Par conséquent, son sous-foncteur $\tilde{\Delta}_d^{\mathfrak{S}_d}(cr_d(F))$ est de type fini dans $\mathcal{P}_{d;\mathbb{Z}}(A,k)$, et $\Delta_d^{\mathfrak{S}_d}(cr_d(F)) \simeq i_d\big(\tilde{\Delta}_d^{\mathfrak{S}_d}(cr_d(F))\big)$ est de type fini dans $\mathcal{F}(A,k)$.

Notons $T$ et $X$ le noyau et le conoyau respectivement de l'unité $F \to \Delta_d^{\mathfrak{S}_d}(cr_d(F))$ : $T$ et $X$ appartiennent à $\mathcal{P}ol_{d-1}(A,k)$ (théorème de Pirashvili). De plus, $X$ est de type fini car c'est un quotient de $\Delta_d^{\mathfrak{S}_d}(cr_d(F))$ qui est de type fini. L'hypothèse de récurrence montre donc que $X \in pf_\infty(\mathcal{F}(A,k)) \subset pf_2(\mathcal{F}(A,k))$. De plus, $\Delta_d^{\mathfrak{S}_d}(cr_d(F)) \in pf_\infty(\mathcal{F}(A,k)) \subset pf_1(\mathcal{F}(A,k))$ par le théorème qu'on a vu sur les foncteurs polynomiaux stricts (on sait que $\mathcal{P}_{d;\mathbb{Z}}(A,k)$ est localement noethérienne, et $\mathbf{Add}(A,\mathbb{Z}) \simeq A\text{-}\mathbf{Mod}$ est localement noethérienne puisque $A$ est noethérien).
La suite exacte

$$0 \to T \to F \to \Delta_d^{\mathfrak{S}_d}(cr_d(F)) \to X \to 0$$

avec $F$ (resp. $\Delta_d^{\mathfrak{S}_d}(cr_d(F))$, $X$) $pf_0$ (resp. $pf_1$, $pf_2$) montre que $T$ est de type fini.

L'hypothèse de récurrence montre donc que $T$ vérifie $pf_\infty$. Comme c'est aussi le cas de $\Delta_d^{\mathfrak{S}_d}(cr_d(F))$ et $X$, cette même suite exacte montre maintenant que $F$ vérifie $pf_\infty$.

Ainsi, tout foncteur de type fini de $\mathcal{P}ol_d(A,k)$ appartient à $pf_\infty(\mathcal{F}(A,k))$ et est donc de présentation finie dans $\mathcal{F}(A,k)$. Cela entraîne qu'un tel foncteur $F$ est noethérien : si $G$ est un sous-foncteur de $F$, alors $F/G$ est de type fini, donc de présentation finie, dans $\mathcal{F}(A,k)$, ce qui implique que $G$ est de type fini. Cela termine la démonstration.

# Démonstration du théorème sur les produits tensoriels de foncteurs $pf_n$ (I)

Si $F$ et $G$ sont des foncteurs de $pf_n(\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z}))$ (avec $\mathcal{A}$ additive), on note $\mathrm{Tor}(F,G)$ le foncteur $\mathcal{A} \xrightarrow{(F,G)} \mathbf{Ab} \times \mathbf{Ab} \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}} \mathbf{Ab}$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$.

**Lemme**

*Soient $F$ et $G$ des foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On suppose que $F$ et $G$ vérifient $pf_n$. Alors le foncteur $F \otimes G$ vérifie $pf_n$ si et seulement si $\mathrm{Tor}(F,G)$ vérifie $pf_{n-2}$.*

(On convient que la propriété $pf_i$ est vide pour $i < 0$ ; en particulier, un produit tensoriel de foncteurs de présentation finie est de présentation finie.)

La démonstration est formelle à partir du fait que les projectifs de type fini de $\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ engendrent cette catégorie, sont à valeurs plates sur $\mathbb{Z}$ et sont stables par produit tensoriel.

# Démonstration du théorème sur les produits tensoriels de foncteurs $pf_n$ (II) : préliminaires de torsion

On rappelle que, pour un entier $N > 0$, $\mathbf{Ab}_N$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ab}$ des groupes abéliens dont le sous-groupe de torsion est annulé par $N$, et $\mathbf{ab}_N$ sa sous-catégorie pleine des objets de type fini.

Si $V$ est un groupe abélien, on désigne par $V_{\mathrm{tor}}$ son sous-groupe de torsion et, pour $n \in \mathbb{N}$, par $V_{(n)}$ le sous-groupe de ses éléments annulés par $n$. Si $F$ est un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$, on utilise les notations $F_{\mathrm{tor}}$ et $F_{(n)}$ pour désigner la postcomposition par les endofoncteurs précédents des groupes abéliens.

On dit que $F$ est *de torsion bornée* s'il existe un entier $N > 0$ tel que $F_{\mathrm{tor}} = F_{(N)}$ (on dit alors que $F$ est de torsion bornée par $N$), autrement dit, si $F$ est à valeurs dans $\mathbf{Ab}_N$.
Un foncteur noethérien est toujours de torsion bornée.

**Lemme**

*Soient $N > 0$ un entier et $T : \mathbf{Ab}_N\text{-}\mathbf{Mod} \times \mathbf{Ab}_N\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ un bifoncteur qui, par rapport à chaque variable, est additif et commute aux colimites filtrantes. Supposons également que $T(U,V)$ est de type fini si $U$ et $V$ sont de type fini.*
*Alors il existe une résolution de $T$ par des sommes directes finies de foncteurs de la forme $(U,V) \mapsto U_{(i)} \otimes V_{(j)}$, avec $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.*

Comme tout commute aux colimites filtrantes, on peut se borner à considérer la restriction de $T$ à $\mathbf{ab}_N \times \mathbf{ab}_N$. La catégorie $\mathbf{Add}_2(\mathbf{ab}_N;\mathbb{Z})$ est localement noethérienne, et ses objets de type fini sont exactement les bifoncteurs prenant des valeurs de type fini.
Ainsi, $T$ appartient à $pf_\infty(\mathbf{Add}_2(\mathbf{ab}_N;\mathbb{Z}))$. Comme $\mathbf{Add}_2(\mathbf{ab}_N;\mathbb{Z})$ est engendrée par les bifoncteurs projectifs de type fini $(U,V) \mapsto U_{(i)} \otimes V_{(j)}$, où $(i,j) \in (\mathbb{N})^2$, le lemme s'ensuit.

# Démonstration du théorème sur les produits tensoriels de foncteurs $pf_n$ (III) : la propriété clef

## Proposition

*Soient $F$, $G$ des foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ et $n, m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Supposons que :*

1. *$F$ et $G$ vérifient la propriété $pf_n$ ;*
2. *$F$ et $G$ sont de torsion bornée ;*
3. *pour tout entier $i > 0$, les foncteurs $F_{(i)}$ et $G_{(i)}$ vérifient $pf_m$.*

*Alors :*

(A) *le foncteur $F \otimes G$ vérifie $pf_{\min(n,m+2)}$ ;*

(B) *le foncteur $\mathrm{Tor}(F, G)$ vérifie $pf_{\min(n,m)}$ ;*

(C) *Si $T : \mathbf{Ab} \times \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ est un bifoncteur qui, par rapport à chaque variable, est additif et commute aux colimites filtrantes, et envoie tout couple de groupes abéliens de type fini sur un groupe abélien de type fini, alors $T \circ (F, G) \in pf_{\min(n,m)}(\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z}))$.*

# Schéma de la démonstration de la propriété clef

Considérons, pour $n \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, les conditions suivantes :

$(\mathrm{A})_n$ Si $F$ et $G$ sont des foncteurs de $pf_n(\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z}))$, de torsion bornée, et que pour tout entier $i > 0$, $F_{(i)}$ et $G_{(i)}$ vérifient $pf_{n-2}$, alors $F \otimes G$ vérifie $pf_n$.

$(\mathrm{B})_n$ Si $F$ et $G$ sont des foncteurs de $pf_n(\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z}))$, de torsion bornée, et que pour tout entier $i > 0$, $F_{(i)}$ et $G_{(i)}$ vérifient $pf_n$, alors $\mathrm{Tor}(F, G)$ vérifie $pf_n$.

$(\mathrm{C})_n$ Si $F$ et $G$ sont des foncteurs de $pf_n(\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z}))$, de torsion bornée, que pour tout entier $i > 0$, $F_{(i)}$ et $G_{(i)}$ vérifient $pf_n$, et que $T$ est un bifoncteur comme dans (C) de la proposition précédente, alors $T \circ (F, G) \in pf_n(\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z}))$.

$(\mathrm{D})_n$ Si $F$ et $G$ sont des foncteurs de $pf_n(\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z}))$, de torsion bornée, et que pour tout entier $i > 0$, $F_{(i)}$ et $G_{(i)}$ vérifient $pf_n$, alors pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $F_{(i)} \otimes G_{(j)}$ vérifie $pf_n$.

On va montrer les implications

$$(\mathrm{A})_n \Rightarrow (\mathrm{D})_n \Rightarrow (\mathrm{C})_n \Rightarrow (\mathrm{B})_n \Rightarrow (\mathrm{A})_{n+2}.$$

1. $(\mathrm{A})_n \Rightarrow (\mathrm{D})_n$ : il suffit d'appliquer $(A)_n$ à $F_{(i)}$ et $\otimes G_{(j)}$.
2. $(\mathrm{D})_n \Rightarrow (\mathrm{C})_n$ : comme $F$ et $G$ sont de torsion bornée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F$ et $G$ soient à valeurs dans $\mathbf{Ab}_N$. Il suffit alors de précomposer la résolution donnée par le lemme avec $(F, G)$.
3. $(\mathrm{C})_n \Rightarrow (\mathrm{B})_n$ : le foncteur $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}} : \mathbf{Ab} \times \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ vérifie en effet les hypothèses de (C).
4. $(\mathrm{B})_n \Rightarrow (\mathrm{A})_{n+2}$ : les hypothèses de $(A)_{n+2}$ sont plus fortes que celles de $(B)_n$, donc $\mathrm{Tor}(F, G)$ vérifie $pf_n$. Comme $F$ et $G$ vérifient $pf_{n+2}$, on en déduit par le lemme vu au début que $F \otimes G$ vérifie $pf_n$.

Comme les conditions $(A)_n$, $(B)_n$, $(C)_n$ et $(D)_n$ sont triviales pour $n < 0$, cela les montre par récurrence et entraîne la proposition.

# Démonstration du théorème sur les produits tensoriels de foncteurs $pf_n$ (fin)

**Notation**

Soit $Tpf_n$ la classe des foncteurs $F$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ tels que :

1. la torsion de $F$ est bornée ;
2. $F$ et les $F_{(i)}$ vérifient $pf_n$ pour tout entier $i > 0$.

**Corollaire**

*Soient $F$ et $G$ des foncteurs de $Tpf_n$. Alors $F \otimes G$ et $\mathrm{Tor}(F, G)$ appartiennent à $Tpf_n$.*

Sous les hypothèses du théorème sur les produits tensoriels de foncteurs $pf_n$, la classe $\mathfrak{P}$ est incluse dans $Tpf_n$ (car un foncteur noethérien est de torsion bornée), donc ce théorème est un cas particulier du corollaire précédent.

# Fin

Merci pour votre attention !

Cám on vì su quan tâm cùa ban !