Comparaison de groupes d'extensions entre catégories de foncteurs polynomiaux

Notes d'exposé au groupe de travail sur la construction cubique de Mac Lane et ses applications en algèbre et topologie

Aurélien Djament

Strasbourg, 13 juin 2014

Résumé

Dans un article du début des années 1990 ([3]), T. Pirashvili montre que les groupes d'extensions dans la catégorie des foncteurs d'une petite catégorie additive $\mathcal{A}$ vers les groupes abéliens et dans sa sous-catégorie de foncteurs polynomiaux de degré au plus d coïncident dès lors que les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :

1. les groupes abéliens de morphismes de $\mathcal{A}$ sont sans torsion ;
2. l'un des deux arguments des Ext est un foncteur additif ;
3. le degré cohomologique est au plus $2d$.

Nous expliquerons comment généraliser ce résultat (avec des bornes généralement différentes de celle donnée par 3.) en s'affranchissant de 2. et en affaiblissant la première condition, supposant simplement que la torsion des groupes abéliens de morphismes de $\mathcal{A}$ est bornée. Nous montrerons également par un calcul simple en degré cohomologique 2 que, sans aucun contrôle sur la torsion, des phénomènes étranges peuvent survenir. L'approche originelle de Pirashvili, comme la nôtre, utilisent les propriétés de la filtration du foncteur algèbre de groupe par les puissances de son idéal d'augmentation, des suites exactes de type Koszul mais aussi la construction cubique de Mac Lane.

1 Énoncé des résultats

D'abord quelques notations : $\mathcal{A}$ désigne une petite catégorie **additive**, k un anneau commutatif (qui sera très vite soit $\mathbb{Z}$ soit un corps), $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{A}$ vers les k-modules. Pour $d \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ la sous-catégorie pleine des foncteurs *polynomiaux* de degré au plus d. On note également $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; k)$ la sous-catégorie pleine des foncteurs *analytiques*, c'est-à-dire des foncteurs qui sont la réunion de leurs sous-foncteurs polynomiaux. Toutes ces catégories sont de belles catégories abéliennes (toutefois, $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; k)$ n'a généralement pas assez d'objets projectifs, contrairement aux autres catégories, mais comme il a assez d'injectifs on peut y définir des groupes d'extensions sans problème).

On note $i_d : \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k) \to \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ et $i_{d,l} : \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k) \to \mathcal{F}_l(\mathcal{A}; k)$ ($d \leq l$) les foncteurs d'inclusion. Comme ils sont exacts, on dispose, pour $d \leq l$ et F, G des foncteurs de $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$, de morphismes naturels de k-modules gradués

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)}(F, G) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_l(\mathcal{A};k)}(i_{d,l}(F), i_{d,l}(G)) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(i_d(F), i_d(G))$$

(dans la suite, la notation des foncteurs i sera souvent omise pour alléger).

La question sur laquelle porte cet exposé est de savoir quand ces morphismes sont des isomorphismes.

Une première remarque importante est que, d, l, F et G étant fixés, on ne doit presque jamais s'attendre à obtenir un isomorphisme en *tout* degré cohomologique $*$, sauf lorsque k est un corps de caractéristique 0 (ou situation analogue, du type : les groupes abéliens de morphismes dans $\mathcal{A}$ n'ont que de la torsion p-primaire, p étant un nombre premier fixé, et p est inversible dans k).

Proposition 1 (Folklore)**.** *Supposons que k est un corps de caractéristique nulle. Pour tous $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et tous foncteurs F, G dans $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$, le morphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)}(F,G) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(i_d(F), i_d(G))$$

qu'induit le foncteur i_d est un isomorphisme.

(Cette proposition est bien connue, depuis longtemps, des spécialistes des foncteurs polynomiaux, mais votre serviteur ne sait pas à qui en attribuer la primeur et ne connaît pas de référence écrite.)

Nous donnons un aperçu de la démonstration de ce résultat, car elle donne un avant-goût, dans un cadre beaucoup plus simple, des arguments utilisés pour établir nos résultats en caractéristique positive.

Esquisse de démonstration. On explique l'argument seulement pour $d < \infty$ et lorsque F est *additif*. Le cas général peut soit s'établir de manière analogue, par un argument approprié de colimite pour $d = \infty$, et pour d fini mais F polynomial de degré au plus n, soit en remplaçant la construction cubique ou la stabilisation à la Dold-Puppe par les constructions similaires adaptées aux fonteurs polynomiaux de degré n, soit par un argument de récurrence sur n utilisant les résultats de base sur la structure des foncteurs polynomiaux, en commençant par traiter de produits tensoriels de foncteurs additifs à partir du cas $n = 1$.

On peut aussi supposer que F est du type $\mathcal{A}(a,-) \otimes k$, quitte à prendre une résolution projective standard de ce foncteur *dans la catégorie* $\mathcal{F}_1(\mathcal{A};k)$. La stabilisation à la Dold-Puppe du foncteur $k[\mathcal{A}(a,-)]$ (c'est-à-dire la construction cubique tensorisée par k et précomposée par $\mathcal{A}(a,-)$) constitue une résolution projective de F dans $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$. Cela découle de ce que l'homologie *rationnelle* stable des espaces d'Eilenberg-Mac Lane est triviale.

Maintenant, la stabilisation à la Dold-Puppe du foncteur $q_d k[\mathcal{A}(a,-)]$, où q_d désigne le plus grand quotient polynomial de degré au plus d, constitue une résolution projective de F dans $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$. Pour le voir, utiliser la filtration de $k[V]$ (V étant un groupe abélien) par les puissances de l'idéal d'augmentation : ses sous-quotients sont les $k \otimes S^i(V)$, qui sont *facteurs directs* de $(k \otimes V)^{\otimes i}_k$ puisque k est de caractéristique nulle. Or pour $i > 1$, les dérivés stables à la Dold-Puppe d'un produit tensoriel de i foncteurs réduits (i.e. nuls en 0) sont nuls, par l'argument habituel d'annulation homologique de Pirashvili, d'où notre assertion de résolution projective.

Par conséquent, il existe une résolution projective de F dans $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ dont l'image par q_d est une résolution projective de F dans $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$, ce qui termine la démonstration. $\square$

Remarque 2. Une variante de cette démonstration consiste à utiliser la construction bar plutôt que la construction cubique (ou stabilisation à la Dold-Puppe).

Remarque 3. Il existe d'autres situations où la comparaison des groupes d'extensions entre catégorie de tous les foncteurs et sous-catégories de foncteurs polynomiaux de degrés donnés fonctionne de manière aussi favorable, par exemple les Γ-modules. On n'a même pas besoin, dans ce contexte, de faire une hypothèse de caractéristique nulle ou apparentée : l'équivalence de catégories de Pirashvili ([4]) à la Dold-Kan entre Γ-modules et Ω-modules (où le degré polynomial se lit de façon transparente, par l'annulation des valeurs du foncteurs sur les ensembles de cardinal strictement supérieur au degré) implique aussitôt le résultat.

Dès que l'on est en caractéristique positive, la proposition précédente tombe grossièrement en défaut, comme l'illustre l'exemple très classique suivant.

Exemple 4. Soient p un nombre premier et $\mathcal{F}(p)$ la catégorie des foncteurs des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels de dimension finie vers les $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels, on note I le foncteur d'inclusion, qui est polynomial de degré 1. Il est classique que $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{F}(p)}(\mathrm{I},\mathrm{I})$ est isomorphe à $\mathbb{F}_p$, un générateur en étant donné par la classe de la suite exacte

$$0 \to \mathrm{I} \to S^p \to \Gamma^p \to \mathrm{I} \to 0$$

dont la première flèche est le morphisme de Frobenius, la deuxième la norme et la troisième le morphisme de Verschiebung (dual du Frobenius).

Par ailleurs, pour $d < p$, il est classique que la catégorie $\mathcal{F}_d(p)$ des foncteurs polynomiaux de degré (au plus) d de $\mathcal{F}(p)$ est semi-simple (parce que les représentations des groupes symétriques Σ_n à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ sont semi-simples pour $n < d$; si l'on se restreint à $d = 1$ l'assertion est de toute façon triviale), de sorte que $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{F}_d(p)}(\mathrm{I},\mathrm{I}) = 0$ n'est alors pas isomorphe à $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{F}(p)}(\mathrm{I},\mathrm{I})$. En revanche, pour $d \geq p$, le morphisme canonique $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{F}_d(p)}(\mathrm{I},\mathrm{I}) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{F}(p)}(\mathrm{I},\mathrm{I})$ est un isomorphisme. En effet, c'est un toujours un monomorphisme parce que $\mathcal{F}_d(p)$ est une sous-catégorie *épaisse* de $\mathcal{F}(p)$, et il est déjà clair avec ce qui précède que c'est un épimorphisme pour $d \geq p$, puisque S^p et Γ^p sont de degré p.

En général, on ne peut donc pas s'attendre à mieux qu'à ce que le morphisme naturel

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)}(F,G) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(i_d(F), i_d(G))$$

soit un isomorphisme en degré cohomologique $*$ suffisamment petit par rapport à d, avec une borne dépendant de conditions sur la torsion des groupes abéliens de morphismes dans la catégorie additive $\mathcal{A}$. (Pour $d = \infty$, on s'attend donc à un isomorphisme en tout degré cohomologique... mais nous verrons que ce n'est vrai que lorsque $\mathcal{A}$ n'est pas trop méchante.)

On rappelle maintenant le résultat partiel important en cette voie établi par Pirashvili dans [3] :

Théorème 5 (Pirashvili)**.** *Soient $d, i \in \mathbb{N}$, F et G deux objets de $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$. Supposons que :*

1. *les groupes abéliens $\mathcal{A}(a, b)$ sont tous sans torsion ;*
2. *F ou G est additif ;*
3. *$i \leq 2d$.*

Alors le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)}(F,G) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(F,G)$$

est un isomorphisme.

(Il n'est pas difficile de reprendre les arguments de Pirashvili pour inclure aussi le cas $d = \infty$ dans l'énoncé.)

Noter que k peut ici être quelconque (Pirashvili se place dans le cas universel $k = \mathbb{Z}$).

La démonstration de ce théorème donnée dans [3] repose sur un examen minutieux de la construction cubique et de la filtration polynomiale (i.e. par les puissances de l'idéal d'augmentation) de l'anneau de groupe $\mathbb{Z}[V]$, où V est un groupe abélien sans torsion (un point fondamental est un argument d'idéal *quasi-régulier* — notion introduite par Quillen dans ses travaux sur l'homologie des algèbres — qui repose fortement sur l'absence de torsion).

Présentons maintenant nos résultats ([1]). On suppose que $k = \mathbb{F}_p$, où p est un nombre premier.

Théorème 6. *Supposons qu'il existe un entier naturel r tel que, pour tous objets a et b de $\mathcal{A}$, la torsion p-primaire du groupe abélien $\mathcal{A}(a,b)$ soit bornée par p^r.*

Soient $d,n,i \in \mathbb{N}$ tels que $d \leq n$, F un foncteur de $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};\mathbb{F}_p)$, G un foncteur de $\mathcal{F}_n(\mathcal{A};\mathbb{F}_p)$. Alors le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}_n(\mathcal{A};k)}(F,G) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(F,G)$$

est un isomorphisme pour $i \leq \left[\frac{n-d+1}{p^r}\right]$ et un monomorphisme pour $i = \left[\frac{n-d+1}{p^r}\right] + 1$.

Le même résultat vaut si l'on échange F et G dans les groupes d'extensions.

Théorème 7. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Pour tout objet a de $\mathcal{A}$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout objet b de $\mathcal{A}$, la torsion p-primaire du groupe abélien $\mathcal{A}(a,b)$ soit bornée par p^r ;*
2. *pour tous objets F et G de $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A};\mathbb{F}_p)$, le morphisme canonique*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A};k)}(F,G) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(F,G)$$

   est un isomorphisme ;

3. *pour tous objets F et G de $\mathcal{F}_1(\mathcal{A};\mathbb{F}_p)$, le morphisme canonique*

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A};k)}(F,G) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(F,G)$$

   est un isomorphisme.

Proposition 8. *Soient $d \in \mathbb{N}$, F et G des foncteurs de $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};\mathbb{F}_p)$. Le morphisme canonique*

$$\operatorname*{colim}_{r \geq d} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_r(\mathcal{A};\mathbb{F}_p)}(F,G) \to \operatorname*{colim}_{p^t > d} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A}/p^t;\mathbb{F}_p)}(F,G)$$

est un isomorphisme.

Cet énoncé mérite quelques précisions : pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{A}/n$ la catégorie additive ayant les mêmes objets que $\mathcal{A}$ et dont les morphismes sont donnés par $(\mathcal{A}/n)(a,b) = \mathcal{A}(a,b)/n$, la composition étant induite par celle de $\mathcal{A}$, de sorte qu'on dispose d'un foncteur canonique additif plein et essentiellement surjectif $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/n$. On dispose donc d'un diagramme commutatif de foncteurs d'inclusion

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_d(\mathcal{A}/p^t;\mathbb{F}_p) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(\mathcal{A}/p^t;\mathbb{F}_p) \arrow[d] \\
\mathcal{F}_d(\mathcal{A};\mathbb{F}_p) \arrow[r] & \mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{F}_p)
\end{tikzcd}$$

dans lequel on voit sans trop de peine (nous redonnerons l'argument plus bas) que la flèche verticale de gauche est une égalité si $p^t > d$, ce qui procure un foncteur (exact et pleinement fidèle) $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};\mathbb{F}_p) \to \mathcal{F}(\mathcal{A}/p^t;\mathbb{F}_p)$ sous cette condition. Le morphisme canonique de la proposition est induit par ces foncteurs.

Notre dernier résultat constitue le cœur de la démonstration de l'implication *3.*$\Rightarrow$*1.* du théorème 6.

Proposition 9. *Soient A un foncteur additif de $\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{F}_p)$ et $T : \mathcal{A}^{op} \to \mathbf{Ab}$ un foncteur additif projectif de la forme $\bigoplus_i \mathcal{A}(-,a_i)$, où (a_i) est une collection d'objets de $\mathcal{A}$. On note $B := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T,\mathbb{F}_p)$, c'est donc un foncteur additif de $\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{F}_p)$.*

On dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underset{d\in\mathbb{N}^*}{\mathrm{colim}}\,\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A};\mathbb{F}_p)}(A,B) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \underset{i\in\mathbb{N}}{\mathrm{colim}}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{F}_p)}\big(A,\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z}/p)\circ(T/p^i)\big) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A};\mathbb{F}_p)}(A,B) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{F}_p)}\big(A,\underset{i\in\mathbb{N}}{\mathrm{colim}}\,\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z}/p)\circ(T/p^i)\big) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{F}_p)}(A,B) \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};\mathbb{F}_p)}\big(A,\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z}/p)\circ T\big)
\end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont induites par les foncteurs d'inclusion.

2 Réductions et remarques préliminaires

Rôle de l'anneau k On remarque déjà que, même si nos résultats ne concernent que $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ et ses sous-catégories $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ lorsque k est un corps fini premier, on en déduit aussitôt des résultats pour k quelconque par changement de base au but : comme tout se passe bien pour $k=\mathbb{Q}$ (proposition 1), on obtient d'abord des énoncés (qu'on laisse au lecteur le soin d'écrire) pour $k=\mathbb{Z}$, puis pour k quelconque.

Tout petit degré cohomologique On constate également que le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)}(F,G) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(F,G)$$

est toujours un isomorphisme pour $i \le 1$ et un monomorphisme pour $i=2$, car $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ est une sous-catégorie *épaisse* de $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$. Cette propriété est évidente pour d fini (les foncteurs polynomiaux sont définis par l'annulation de certains effets croisés, or les effets croisés sont exacts — ils commutent même à toutes les limites et colimites) ; pour $d=\infty$, elle découle formellement de ce que la sous-catégorie pleine $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A};k)$ est *engendrée* par des foncteurs qui sont *de présentation finie dans* $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ (de tels générateurs de présentation finie sont donnés par les plus grands quotients polynomiaux de degrés variables des générateurs projectifs à la Yoneda $k[\mathcal{A}(a,-)]$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$).

Une remarque formelle Penchons-nous sur le morphisme canonique

$$\underset{r\ge d}{\mathrm{colim}}\,\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_r(\mathcal{A};k)}(F,G) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A};k)}(F,G)\,,$$

où F et G sont des foncteurs de $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$.

Pour des raisons formelles, on peut voir facilement que c'est un isomorphisme lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. F est de type fini ;
2. la catégorie $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A};k)$ est localement noethérienne (ce qui équivaut à dire que chaque catégorie $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$, pour d fini, est localement noethérienne).

Cela provient de ce que, sous la deuxième hypothèse, on peut former une résolution injective $I^\bullet_\infty$ de G dans $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A};k)$ en prenant la colimite sur les entiers $r\ge d$ de résolutions injectives $I^\bullet_r$ de G dans $\mathcal{F}_r(\mathcal{A};k)$ (le caractère localement noethérien de $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A};k)$ implique qu'un objet J de celle-ci est injectif si $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A};k)}(F,J)=0$ pour tout F noethérien, mais un foncteur analytique noethérien est polynomial, et nécessairement de présentation finie dans $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A};k)$, en utilisant encore le caractère localement noethérien de cette catégorie, ce qui permet de conclure par un argument de colimite filtrante).

Mais il existe des petites catégories additives a priori très « raisonnables » telles que $\mathcal{F}_1(\mathcal{A};\mathbb{Z})$ (ou $\mathcal{F}_1(\mathcal{A};\mathbb{F}_p)$) ne soit pas localement noethérienne, par exemple la sous-catégorie pleine de **Ab** constituée des groupes abéliens finis : le foncteur associant à un groupe son sous-groupe de torsion p-primaire n'est pas de type fini, alors que c'est un sous-foncteur du foncteur d'inclusion, qui est de type fini.

Adjonctions et suites spectrales de Grothendieck Le foncteur $i_d : \mathcal{F}_d(\mathcal{A};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ possède toujours un adjoint à droite noté p_d ; pour d fini il possède également un adjoint à gauche noté q_d. Nous nous intéresserons à leurs foncteurs dérivés ; une variation classique sur le lemme de Yoneda montre que ceux-si sont donnés par des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{R}^\bullet p_d(F)(a) = \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}\big(q_d(k[\mathcal{A}(a,-)]),F\big)$$

et

$$\mathbf{L}_\bullet q_d(F)(a) = \mathrm{Tor}^{\mathcal{A}}_\bullet\big(q_d(k[\mathcal{A}(-,a)]),F\big).$$

Comme i_d est exact, on dispose de suites spectrales de Grothendieck

$$E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)}(G,\mathbf{R}^j p_d(F)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(i_d(G),F)$$

et

$$E^2_{i,j} = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)}(\mathbf{L}_j q_d(F),G) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(F,i_d(G)).$$

Pour démontrer nos résultats, nous chercherons donc des zones d'annulation pour $\mathbf{R}^j p_d(F)$ ou $\mathbf{L}_j q_d(F)$ lorsque j est non nul et assez petit par rapport à d.

3 Outils

Filtration polynomiale sur $\mathbb{F}_p[-]$ Notons $Q^d_{(p)}$ le foncteur $q_d\mathbb{F}_p[-] : \mathbf{Ab} \to \mathbb{F}_p-\mathbf{Vect}$ et $S^d_{(p)}$ le noyau de la projection $Q^d_{(p)} \twoheadrightarrow Q^{d-1}_{(p)}$. On a classiquement :

1. $S^*_{(p)}$ est un foncteur exponentiel de Hopf (i.e. on dispose d'isomorphismes naturels d'espaces vectoriels gradués $S^*_{(p)}(U\oplus V) \simeq S^*_{(p)}(U)\otimes S^*_{(p)}(V)$ vérifiant les conditions monoïdales usuelles). Ainsi, $S^*_{(p)}(V)$ est naturellement une algèbre graduée (c'est l'algèbre graduée associée à la filtration de l'algèbre de groupe $\mathbb{F}_p[V]$ par les puissances de son idéal d'augmentation) ;
2. cette algèbre graduée est naturellement isomorphe au quotient de l'algèbre (graduée) symétrique sur le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $\mathbb{F}_p\otimes V$ par l'idéal (homogène) engendré par les éléments v^{p^n}, où $v\in V$ est tel que $p^n.v=0$. En particulier, $S^*_{(p)}(V)$ est naturellement isomorphe à l'algèbre symétrique sur $\mathbb{F}_p\otimes V$ si V n'a pas de p-torsion, et $S^d_{(p)}(\mathbb{Z}/p^r)$ est de dimension 1 pour $d<p^r$ et nul sinon ;
3. il peut être utile (et surtout intuitif) d'avoir en tête la description duale suivante (l'exposant $\vee$ indiquant la dualité des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels) : $Q_d(V)^\vee \hookrightarrow \mathbb{F}_p[V]^\vee \simeq Fct(V,\mathbb{F}_p)$ (espace vectoriel des fonctions ensemblistes $V\to\mathbb{F}_p$) s'identifie au sous-espace $Pol_d(V,\mathbb{F}_p)$ des fonctions polynomiales de degré au plus d.

Un fait élémentaire mais fondamental dans tout ce travail est le suivant :

1. pour $p^i > d$, l'inclusion $Pol_d(V/p^i, \mathbb{F}_p) \hookrightarrow Pol_d(V, \mathbb{F}_p)$ qu'induit la projection $V \twoheadrightarrow V/p^i$ est une égalité. Comme corollaire, sous la même hypothèse, le foncteur d'inclusion $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}/p^i; \mathbb{F}_p) \to \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$ est une égalité (nous l'avons utilisé pour définir la flèche de la proposition 8);
2. en particulier, si l'on note $Pol(U, V)$ (où U et V sont deux groupes abéliens) le groupe abélien des fonctions polynomiales $U \to V$ (i.e. la colimite sur d des $Pol_d(U, V)$), le morphisme canonique
$$\operatorname*{colim}_{i \in \mathbb{N}} Pol(V/p^i, \mathbb{F}_p) \to Pol(V, \mathbb{F}_p)$$
est un isomorphisme;
3. comme l'inclusion $Pol(U, \mathbb{F}_p) \hookrightarrow Fct(U, \mathbb{F}_p)$ est une égalité si U est un p-groupe abélien, on en déduit une inclusion naturelle
$$Pol(V, \mathbb{F}_p) \hookrightarrow \operatorname*{colim}_{i \in \mathbb{N}} Fct(V/p^i, \mathbb{F}_p)$$
qui est un isomorphisme si V est de type fini.

Complexes de type Koszul La structure exponentielle graduée sur $S^*_{(p)}$ permet de définir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un complexe
$$0 \to \mathbb{F}_p \otimes \Lambda^n \to S^1_{(p)} \otimes \Lambda^{n-1} \to S^2_{(p)} \otimes \Lambda^{n-2} \to \cdots \to S^{n-1}_{(p)} \otimes \Lambda^1 \to S^n_{(p)} \to 0$$
de foncteurs $\mathbf{Ab} \to \mathbb{F}_p - \mathbf{Vect}$. Notons $H_i(n)$ son homologie en degré i (on gradue de sorte que $S^{n-i}_{(p)} \otimes \Lambda^i$ se trouve en degré i).

Proposition 10. *Si la torsion p-primaire du groupe abélien V est bornée par p^r, alors $H_i(n)(V) = 0$ pour $n > p^r i$.*

(La démonstration consiste à remarquer que la propriété exponentielle et la commutation aux colimites filtrantes permettent de se ramener au cas où V est un groupe *cyclique*, auquel cas il est facile de calculer à la main les termes et l'homologie de ce complexe.)

Arguments d'annulation à la Pirashvili

Lemme 11. *Soient $d, i, j \in \mathbb{N}$ et A, B des foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ tels que $\operatorname{Ext}^p_{\mathcal{F}(\mathcal{A})}(A, F) = 0$ (resp. $\operatorname{Ext}^q_{\mathcal{F}(\mathcal{A})}(B, F) = 0$) pour F dans $\mathcal{F}_d(\mathcal{A})$ et $p < i$ (resp. $q < j$). Alors $\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{F}(\mathcal{A})}(A \otimes B, T) = 0$ pour T dans $\mathcal{F}_{d+1}(\mathcal{A})$ et $n < i + j$.*

Stabilisation à la Dold-Puppe généralisée (Tout cela est contenu, sous-jacent ou conséquence facile du point de vue de [2] sur la construction cubique et la stabilisation de Dold-Puppe généralisées.)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{A})$, on dispose d'un complexe de chaînes naturel $D^{(n)}_*(F)$ de foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ de sorte que :

1. $D^{(n)}_*$ commute aux limites, aux colimites, et à la précomposition par un foncteur additif;
2. si F est projectif, chaque foncteur $D^{(n)}_i(F)$ est projectif;
3. l'homologie de $D^{(n)}_*(F)$ est constituée de foncteurs polynomiaux de degré au plus n et elle s'identifie à $q_n(F)$ en degré 0;

4. on a $H_j(D_*^{(n)}(F))=0$ pour $j<i$ si et seulement si $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{F}(\mathcal{A})}(F,T)=0$ pour tout $j<i$ et tout foncteur T de $\mathcal{F}_n(\mathcal{A})$.
(Remarque culturelle : en combinant cette équivalence à la commutation de $\mathcal{D}_*^{(n)}$ aux colimites filtrantes, on obtient la stabilité par colimites filtrantes pour les foncteurs F vérifiant cette condition d'annulation, qui n'a rien d'innocent puisqu'en général on ne peut pas engendrer la catégorie des foncteurs polynomiaux par des foncteurs ayant une résolution projective de type fini dans $\mathcal{F}(\mathcal{A})$.)

De plus, pour $n=1$, on peut choisir ce complexe de sorte d'obtenir exactement la construction cubique de Mac Lane lorsque $F=\mathbb{Z}[-]$.

On a une variante duale avec un complexe de cochaînes $D^*_{(n)}(F)$ dont l'annulation de la cohomologie équivaut à l'annulation de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A})}(T,F)$ pour T dans $\mathcal{F}_n(\mathcal{A})$.

Deux lemmes à la Troesch Les deux lemmes voisins qui suivent sont reliés de près au critère d'annulation cohomologique de Troesch.

Lemme 12. *Soient A et B deux foncteurs additifs dans $\mathcal{F}(\mathcal{A},k)$, on dispose d'un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(A;k)}(k[A],B)\simeq \mathrm{Ext}^*_{Add}(A,B)$$

où Add est la catégorie des foncteurs additifs de $\mathcal{A}$ vers **Ab** *(même si k n'est pas $\mathbb{Z}$!).*

Lemme 13. *Soient A et B deux foncteurs additifs $\mathcal{A}\to$* **Ab** *et F un foncteur de $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$. Alors la fonction ensembliste canonique entre groupes abéliens*

$$\mathrm{Hom}(B,A)\to \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(k[A],F),\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(k[B],F))$$

est polynomiale de degré au plus d.

Un lemme sur les groupes abéliens Le lemme suivant permet de déduire de la proposition 9 l'implication *3.$\Rightarrow$1.* du théorème 6.

Lemme 14. *Soit V un groupe abélien. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *la torsion p-primaire de V est bornée (i.e. il existe $r\in\mathbb{N}$ tel que tout élément de torsion p-primaire de V soit de p^r-torsion) ;*
2. *le morphisme canonique*

$$\operatorname*{colim}_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(V/p^i,\mathbb{Z}/p)\to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(V,\mathbb{Z}/p)$$

est un isomorphisme.

4 Esquisse de démonstrations

On renvoie pour cela à l'exposé oral ou à [1].

Références

[1] Aurélien Djament. Groupes d'extensions et foncteurs polynomiaux. Prépublication disponible sur http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01023705.

[2] B. Johnson and R. McCarthy. Deriving calculus with cotriples. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(2) :757–803 (electronic), 2004.

[3] Teimuraz Pirashvili. Polynomial approximation of Ext and Tor groups in functor categories. *Comm. Algebra*, 21(5) :1705–1719, 1993.

[4] Teimuraz Pirashvili. Dold-Kan type theorem for Γ-groups. *Math. Ann.*, 318(2) :277–298, 2000.