Introduction à la cohomologie des faisceaux

Notes d'exposé au groupe de travail de topologie algébrique Nantes/Angers

Aurélien DJAMENT

3 novembre 2011

Table des matières

1 Algèbre homologique et catégories dérivées

1.1 Catégories abéliennes, résolutions, foncteurs dérivés

Une catégorie abélienne est une catégorie additive dans laquelle existent noyaux et conoyaux et telle que le morphisme canonique de la coïmage dans l'image d'un morphisme soit un isomorphisme. Cela permet de définir une bonne notion de suite exacte, qui se manipule comme dans les groupes abéliens dès lors qu'on ne fait pas intervenir de limites ou colimites infinies, lesquelles ne sont même pas censées exister (par exemple, une propriété importante de la catégorie abélienne des groupes abéliens, l'exactitude des colimites filtrantes, n'est pas vraie dans toute catégorie abélienne, la catégorie opposée des groupes abéliens fournissant un exemple). En particulier, le lemme des cinq ou le lemme du serpent (qui permet de construire les morphismes de liaison) demeurent exacts.

Un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des catégories abéliennes, est dit :

1. *exact* s'il transforme une suite exacte dans $\mathcal{A}$ en une suite exacte dans $\mathcal{B}$;
2. *exact à droite* s'il transforme toute suite exacte de $\mathcal{A}$ de la forme $C \to B \to A \to 0$ en une suite exacte dans $\mathcal{B}$;

3. *exact à gauche* s'il vérifie la propriété duale : si $0 \to A \to B \to C$ est exacte dans $\mathcal{A}$, alors $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ est exacte dans $\mathcal{B}$.

Dans une catégorie d'espaces vectoriels, toute suite exacte courte est scindée, de sorte qu'un foncteur additif (donc en particulier un foncteur exact à droite ou à gauche) est automatiquement exact. Ce n'est pas le cas dans les catégories abéliennes plus compliquées (déjà dans la catégorie **Ab** des groupes abéliens !) ; l'algèbre homologique, dont l'un des premiers objectifs consiste à dériver des foncteurs (exacts à droite ou à gauche, pour nous — on peut faire beaucoup plus général, mais cela ne nous sera pas utile), i.e. à «mesurer leur défaut d'exactitude».

Un objet P (resp. I) d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est dit *projectif* (resp. *injectif*) si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -) : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I) : \mathcal{A}^{op} \to \mathbf{Ab}$) est exact (il est toujours exact à gauche). Une *résolution projective* (resp. *résolution injective* d'un objet A de $\mathcal{A}$ est une suite exacte

$$\cdots P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

$$(\text{resp.} \quad 0 \to A \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^n \to I^{n+1} \to \cdots \qquad)$$

où tous les P_n (resp. I^n) sont projectifs (resp. injectifs). On dit que la catégorie abélienne $\mathcal{A}$ possède assez d'objets projectifs (resp. injectifs) si tout objet de $\mathcal{A}$ possède une résolution projective (resp. injective), ce qui revient à exiger que tout objet de $\mathcal{A}$ soit quotient d'un projectif (resp. se plonge dans un injectif).

Définition 1.1. On appelle *catégorie de Grothendieck* toute catégorie abélienne $\mathcal{A}$ telle que :

1. $\mathcal{A}$ possède des colimites arbitraires ;
2. les colimites filtrantes sont exactes dans $\mathcal{A}$;
3. $\mathcal{A}$ possède un générateur, i.e. un objet X tel que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ soit fidèle (il est parfois commode de parler d'ensemble de générateurs, i.e. d'ensemble d'objets de $\mathcal{A}$ dont la somme directe est un générateur).

En particulier, les catégories de modules sont des catégories de Grothendieck.

Proposition 1.2. *Toute catégorie de Grothendieck possède assez d'injectifs.*

En revanche, plein de catégories de Grothendieck usuelles et « sympathiques » ne possèdent pas assez de projectifs : les faisceaux fourniront un exemple fondamental.

Exactitude et adjonctions Soient $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ des foncteurs entre catégories abéliennes ; supposons que F est adjoint à gauche de G, i.e. qu'on dispose d'isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B).$$

Alors F est exact à droite (il commute même à toutes les colimites [1]) et G exact à gauche (il commute même à toutes les limites).

1. Remarquer qu'un foncteur entre catégories abéliennes est exact à droite si et seulement s'il commute aux colimites finies.

De plus, si F (resp. G) est exact, alors G (resp. F) envoie tout objet injectif (resp. projectif) de $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{A}$) sur un objet injectif (resp. projectif) de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$). Réciproquement, si G préserve les injectifs et que $\mathcal{B}$ a assez d'injectifs (resp. si F préserve les projectifs et que $\mathcal{A}$ a assez de projectifs), alors F (resp. G) est exact.

Foncteurs dérivés à droite, à gauche Supposons que $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un foncteur exact à gauche et que $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'objets injectifs. Donnons-nous une résolution injective $A \to I^\bullet$ d'un objet A de $\mathcal{A}$ comme précédemment : on a envie de définir le n-ème foncteur dérivé à droite de F (noté $\mathbf{R}^nF$) comme le foncteur (additif) $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ envoyant A sur l'objet de cohomologie $H^n(F(I^\bullet))$. Cela est licite, modulo un certain nombre de précautions (la résolution n'est pas unique !) et vérifications. Ces foncteurs sont caractérisés axiomatiquement de la façon suivante :

1. ils sont additifs, et $\mathbf{R}^0F \simeq F$;
2. les foncteurs $\mathbf{R}^nF$ sont nuls sur les objets injectifs de $\mathcal{A}$ pour $n > 0$;
3. à toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$ de $\mathcal{A}$ est associée *fonctoriellement* une suite exacte longue de cohomologie :

$$0 \to \mathbf{R}^0F(A) \to \cdots \to \mathbf{R}^nF(A) \to \mathbf{R}^nF(B) \to \mathbf{R}^nF(C) \to \mathbf{R}^{n+1}F(A) \to \cdots .$$

On définit de façon duale les dérivés à gauche d'un foncteur exact à droite entre catégories abéliennes dont la source possède suffisamment d'objets projectifs.

Un cas fondamental est les foncteurs Ext : si $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs, pour tout objet A de $\mathcal{A}$ on peut dériver à droite le foncteur exact à gauche $\mathrm{Hom}_\mathcal{A}(A, -) : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$; si $\mathcal{A}$ a assez de projectifs on peut aussi dériver à droite les foncteurs exacts à gauche $\mathrm{Hom}_\mathcal{A}(-, B)$. Dans tous les cas, on obtient des foncteurs $\mathrm{Ext}^n_\mathcal{A} : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ avec des suites exactes longues naturelles associées en chaque variable ; quand $\mathcal{A}$ a assez de projectifs et d'injectifs les deux constructions donnent des résultats canoniquement isomorphes (donc confondus).

Les constructions classiques rappelées sommairement dans la suite de cette section permettent, entre autres, de démontrer les assertions (longues à vérifier dans le détail, même s'il n'y a aucune difficulté) contenues dans les lignes qui précèdent.

1.2 Hypercohomologie, suites spectrales

(Une des meilleures références sur le sujet demeure l'ouvrage [CE99] de Cartan et Eilenberg — rédigé dans des catégories de modules, mais de sorte que les arguments s'étendent au cas général de façon transparente.)

Résoudre (par des objets projectifs, injectifs, voire plus généraux) les objets d'une catégorie abélienne ne suffit pas pour faire de l'algèbre homologique de manière efficace : il est fort utile de pouvoir résoudre les *complexes*.

On note $C(\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont les complexes $\mathbb{Z}$-gradués (très souvent on ne considérera que des complexes nuls en degré strictement négatif, mais cette hypothèse est inutile voire nocive pour l'instant), avec une convention d'indexation cohomologique (différentielles de degré $+1$). Appelons résolution injective d'un objet C de $C(\mathcal{A})$ la donnée d'un objet I de $C(\mathcal{A})$ dont tous les termes sont des objets injectifs de $\mathcal{A}$ et d'un quasi-isomorphisme $C \to I$. Si C est nul en degré assez petit et que $\mathcal{A}$ possède assez d'injectifs, une telle résolution injective existe toujours (c'est un argument de complexe total d'un complexe double construit à partir de résolutions injectives de chaque terme de C).

Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un foncteur exact à gauche et que $\mathcal{A}$ a suffisamment d'injectifs, on peut définir les foncteurs *hyperdérivés* à droite de F, notés $\mathcal{R}^n F$ (ici n est un entier *relatif*), sur les complexes ou au moins sur les complexes nuls en degré assez petit, obtenus en appliquant C sur le n-ème objet de cohomologie de $F(I)$, où I est une résolution injective de C.

Suites spectrales d'hypercohomologie Il existe des suites spectrales naturelles dont les deuxièmes pages sont données par

$$\mathrm{I}_2^{p,q} = H^p(\mathbf{R}^q F(C^\bullet))$$

et

$$\mathrm{II}_2^{p,q} = \mathbf{R}^p F(H^q(C^\bullet))$$

(on indexe de sorte à de que les différentielles à la page r soient toujours de bidegré $(r, 1-r)$) ayant pour aboutissement commun l'hypercohomologie $(\mathcal{R}^{p+q}F)(C)$.

Pour la démonstration, on renvoie à [CE99], chap. XVII,§ 2 — la première suite spectrale est un cas particulier transparent de suite spectrale de complexe double, tandis que l'identification de la deuxième page de la seconde nécessite un peu de travail préliminaire général sur les résolutions (traité dans le chap. IV, § 6 et 7 et le § 1 du chap. XVII de [CE99]).

Comme application, pour dériver à droite un foncteur exact à gauche, on peut utiliser des résolutions acycliques pour ce foncteur (i.e. par des objets sur lesquels les dérivés de degré strictement positif sont nuls).

Suites spectrales de Grothendieck (ou de foncteurs composés) Soient $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ deux foncteurs exacts à gauche entre catégories abéliennes ; on suppose que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ possèdent assez d'injectifs. On suppose également que F envoie tout objet injectif de $\mathcal{A}$ sur un objet G-acyclique de $\mathcal{B}$. Cette hypothèse est en particulier vérifiée si F préserve les injectifs — par exemple si F possède un adjoint à gauche exact.

Il existe alors une suite spectrale naturelle en l'objet A de $\mathcal{A}$ de deuxième page

$$E_2^{p,q} = (\mathbf{R}^p G)(\mathbf{R}^q F(A))$$

et d'aboutissement $\mathbf{R}^{p+q}(G \circ F)(A)$.

1.3 Catégories dérivées

Cette notion, pressentie par Grothendieck, a été dégagée par Verdier — [Ver96] demeure une référence de choix sur le sujet.

La catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ s'obtient à partir de la catégorie des complexes $C(\mathcal{A})$ en inversant les quasi-isomorphismes. (Il n'est pas clair a priori que cette construction ne pose pas de problèmes de théorie des ensembles : il y a de nombreuses choses à vérifier pour voir que cette catégorie se comporte bien.) On commence en général par inverser les équivalences d'homotopie, ce qui permet déjà d'obtenir une structure de *catégorie triangulée* (quelques mots sont dits à ce sujet plus bas), puis ensuite on forme la catégorie triangulée quotient obtenue en inversant les quasi-isomorphismes.

Sous de bonnes hypothèses, et en se restreignant en général à des sous-catégories de complexes bornés d'un côté, on peut dériver à droite (ou à gauche) un foncteur additif $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre deux catégories abéliennes, obtenant un *foncteur dérivé total* $\mathbf{R}F : D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$, de sorte que l'hyperdérivé $\mathcal{R}^n F(C)$ sur un complexe C ne soit que le n-ème objet de cohomologie de $\mathbf{R}F(C)$. En particulier, les groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^n(A, B)$ entre deux objets de $\mathcal{A}$ s'identifient à $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A, \Sigma^n B)$ (on plonge toujours $\mathcal{A}$ dans $C(A)$ comme sous-catégorie des complexes concentrés en degré 0).

Avec ce formalisme, sous les bonnes hypothèses, la suite spectrale de Grothendieck se déduit d'une formule beaucoup plus simple, à savoir un isomorphisme canonique $\mathbf{R}(G \circ F) \simeq (\mathbf{R}G) \circ (\mathbf{R}F)$!

Sans entrer dans les détails des structures triangulées (on pourra consulter, par exemple, le chap. II de [Ver96] pour une présentation complète de la notion), rappelons que le fait que $D(\mathcal{A})$ soit une catégorie triangulée signifie en gros les choses suivantes : c'est une catégorie additive, munie d'un endofoncteur Σ, la suspension (qui s'obtient simplement en décalant le degré des complexes de 1), qui est pleinement fidèle (et est même une équivalence si on considère la « grosse »catégorie dérivée, sans restriction sur les complexes), munie d'une notion de *triangles distingués*, c'est-à-dire d'une classe de diagrammes $X \to Y \to Z \to \Sigma X$ vérifiant un certain nombre d'axiomes. Essentiellement, au moins sous certaines hypothèses (complexes bornés d'un côté...), les suites de complexes qui s'insèrent dans des triangles distingués sont celles qui, à quasi-isomorphisme près, sont des suites exactes. Les triangles distingués donnent lieu à des suites exactes longues lorsqu'on applique le foncteur de cohomologie vers les objets gradués de $\mathcal{A}$.

2 Les faisceaux et leur cohomologie

Les références abondent sur le sujet ; on s'est ici servi surtout de [God73], [Voi02] et [Dim04].

2.1 Préfaisceaux et faisceaux

Soit X un espace topologique, notons $\mathcal{T}_X$ (ou simplement $\mathcal{T}$) sa topologie, vue comme ensemble ordonné pour l'inclusion, puis comme (petite) catégorie. Pour toute catégorie $\mathcal{A}$, on appelle *préfaisceau* sur X à valeurs dans $\mathcal{A}$ un foncteur contravariant de $\mathcal{T}_X$ vers $\mathcal{A}$; on notera $Pref(X, \mathcal{A}) = \mathbf{Fct}(\mathcal{T}_X^{op}, \mathcal{A})$ la catégorie de ces préfaisceaux. Les cas généralement intéressants sont ceux où $\mathcal{A}$ est la catégorie des ensembles et surtout où $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne (en général une catégorie de modules — le plus souvent, **Ab** ou une catégorie d'espaces vectoriels).

Définition 2.1. Supposons que la catégorie $\mathcal{A}$ admet des produits. On dit qu'un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X est un *faisceau* si, pour tout sous-ensemble E de $\mathcal{T}$, le diagramme

$$\mathcal{F}\Big(\bigcup E\Big) \to \prod_{U \in E} \mathcal{F}(U) \rightrightarrows \prod_{(U,V)\in E^2} \mathcal{F}(U \cap V)$$

dont les flèches sont induites par les restrictions est un égalisateur dans $\mathcal{A}$.

On notera $\mathbf{Fsc}(X, \mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine des faisceaux de $Pref(X, \mathcal{A})$. (L'argument $\mathcal{A}$ sera parfois omis s'il est clair dans le contexte.)

Remarque 2.2. On peut définir plus généralement les notions de préfaisceau et de faisceau dans le cadre des *topologies de Grothendieck*; ce degré de généralité, indispensable pour certaines considérations de géométrie algébrique, ne sera pas nécessaire pour ce groupe de travail.

Exemple 2.3.
1. Si A est un espace topologique, le préfaisceau (d'ensembles) sur X envoyant un ouvert U sur l'ensemble des fonctions continues de U dans A est un faisceau.
2. Si $f : Y \to X$ est une application continue, alors le préfaisceau (d'ensembles) envoyant un ouvert U sur l'ensemble des sections de f sur U (i.e. des fonctions continues $s : U \to Y$ telles que $f \circ s : U \to X$ soit l'inclusion) est un faisceau. En fait, on peut montrer (facilement) que tout faisceau est isomorphe à un tel faisceau, où l'on peut de plus supposer que f est un homéomorphisme local (cf. par exemple [God73], ch. II, § 1.2).

L'exemple précédent justifie que l'on appelle, pour tout faisceau (disons d'ensembles) $\mathcal{F}$ sur X et tout ouvert U de X, *sections* de $\mathcal{F}$ sur U les éléments de $\mathcal{F}(U)$.

Exemple 2.4 (Quelques exemples géométriques fondamentaux).
1. Si X est une variété C^∞ (resp. analytique complexe, algébrique sur un corps commutatif k), alors X est munie d'un faisceau privilégié : celui des fonctions C^∞ vers $\mathbb{R}$ (resp. des fonctions analytiques vers $\mathbb{C}$, des fonctions régulières vers k). Ce sont des faisceaux d'*anneaux commutatifs* — même d'algèbres sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$, k).
2. Formes différentielles : supposons d'abord que X est une variété C^∞. À partir du fibré tangent T_X, on peut former, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le fibré $\Lambda^n(T_X^*)$ (l'étoile indique le dual ; Λ^n désigne la n-ème puissance extérieure sur $\mathbb{R}$). Le faisceau de ses sections (C^∞) est par définition le faisceau des formes différentielles de degré n sur X ; on le note Ω^n_X. Il s'agit d'un faisceau de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

   Dans le cas d'une variété algébrique sur k, la définition est la même (on obtient un faisceau de k-espaces vectoriels) ; seule diffère la définition de l'espace tangent.

Définition 2.5. Supposons que $\mathcal{A}$ possède des colimites. Pour tout préfaisceau $\mathcal{F}$ et tout $x \in X$, on pose

$$\mathcal{F}(x) = \operatorname*{colim}_{U \in \mathcal{V}(x)^{op}} \mathcal{F}(U)$$

où $\mathcal{V}(x)$ est le sous-ensemble ordonné de $\mathcal{T}$ des voisinages ouverts de x. Les éléments de $\mathcal{F}(x)$ s'appellent les *germes* de sections de $\mathcal{F}$ en x (ou simplement germes en x de $\mathcal{F}$) et $\mathcal{F}(x)$ s'appelle la *fibre* de $\mathcal{F}$ en x.

Plus généralement, si A est une partie quelconque de E, on pose

$$\mathcal{F}(A) = \operatorname*{colim}_{U \in \mathcal{V}(A)^{op}} \mathcal{F}(U)$$

(ce qui est licite puisque cette limite est *canoniquement* isomorphe à $\mathcal{F}(A)$ pour A ouvert).

Pour la proposition suivante (élémentaire, mais nécessitant d'être soigneux), voir par exemple [KS06], § 17.4.

Proposition 2.6. *Supposons que $\mathcal{A}$ possède des limites et des colimites, que les colimites filtrantes y sont exactes (i.e. commutent aux limites finies) et vérifiant l'axiome (*) ci-dessous (par exemple, la catégorie des ensembles ou des groupes abéliens). Alors l'inclusion $\mathbf{Fsc}(X, \mathcal{A}) \to Pref(X, \mathcal{A})$ possède un adjoint à gauche, appelé* faisceautisation *et noté $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_f$.*

De plus, le morphisme canonique de préfaisceaux (unité) $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_f$ induit un isomorphisme entre les fibres.

(*) pour tout ensemble S, toute famille $\phi_s : I_s \to \mathcal{A}$ de foncteurs dont les sources sont des petites catégories filtrantes, si l'on note $\Phi : J := \prod_{s \in S} I_s \to \mathcal{A} \quad (i_s) \mapsto \prod_s \phi_s(i_s)$, le morphisme canoniquement

$$\operatorname{colim} \Phi \to \prod_{s \in S} \operatorname{colim} \phi_s$$

est un isomorphisme.

Exemple 2.7 (Faisceautisation d'un préfaisceau constant). Soit A un ensemble ; on notera encore A le préfaisceau sur X constant en A. On vérifie aussitôt que ce n'est un faisceau que si A est un singleton. La faisceautisation A_f, notée souvent A_X, est le faisceau des fonctions localement constantes vers A.

2.2 Constructions de base sur les faisceaux abéliens

Nous nous limiterons ici au cas de faisceaux de groupes abéliens. (Toutes les considérations s'étendent sans aucun changement aux faisceaux de modules sur un anneau fixé et, sous certaines hypothèses faciles à déterminer, à d'autres situations de catégories but diverses.)

On note tout d'abord que, comme toute catégorie de foncteurs, la catégorie $Pref(X, \mathbf{Ab})$ hérite d'un grand nombre de structures et propriétés de la catégorie but $\mathbf{Ab}$: elle possède des limites et des colimites qui se calculent au but ; c'est une catégorie abélienne (l'exactitude se teste au but) avec colimites filtrantes exactes, le produit tensoriel (calculé toujours au but) en fait une catégorie monoïdale symétrique... Toutefois, la sous-catégorie pleine des faisceaux ne se comporte pas bien relativement à toutes ces constructions.

Une limite quelconque, dans la catégorie des préfaisceaux, de faisceaux, est encore un faisceau, car la condition qui définit un faisceau porte sur des limites (c'est un argument de «double limite») ; c'est une limite dans la catégorie des faisceaux. On note également que le foncteur fibre en un point commute aux limites finies car la fibre est définie par une colimite *filtrante*, et les colimites filtrantes commutent aux limites finies dans $\mathbf{Ab}$.

En revanche, une colimite de faisceaux dans la catégorie des préfaisceaux n'est généralement pas un faisceau. La colimite dans la catégorie des faisceaux s'obtient en prenant la faisceautisation du préfaisceau colimite. Une observation importante est que le foncteur fibre en un point de X commute aux colimites.

En conséquence, on voit que *la catégorie* $\mathbf{Fsc}(X, \mathbf{Ab})$ *est une catégorie abélienne et que l'exactitude s'y teste sur les fibres.* Les colimites filtrantes y sont exactes comme dans $\mathbf{Ab}$.

Images directe et réciproque d'un faisceau par une application continue Si $f : X \to Y$ est une application continue et $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur X, on définit un préfaisceau noté $f_*\mathcal{F}$ ou $f(\mathcal{F})$ sur Y par $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$. Il est immédiat que $f_*\mathcal{F}$ est un faisceau sur Y si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X ; on l'appelle *image directe par* f de $\mathcal{F}$. Noter que cette construction ne se comporte pas bien relativement aux fibres. On obtient ainsi un foncteur $f_* : \mathbf{Fsc}(X) \to \mathbf{Fsc}(Y)$.

Supposons maintenant que $f : X \to Y$ est une application continue et $\mathcal{G}$ un préfaisceau sur Y. On définit un préfaisceau $\mathcal{H}$ sur X par $\mathcal{H}(U) = \mathcal{G}(f(U))$ (on rappelle que $\mathcal{G}(A)$, pour $A \subset Y$ non nécessairement ouvert, est défini en 2.5). Mais $\mathcal{H}$ n'est pas nécessairement un faisceau si $\mathcal{G}$ en est un. On définit *l'image réciproque* d'un faisceau $\mathcal{G}$ sur Y comme le faisceau $\mathcal{H}_f$ sur X ; on le note $f^*\mathcal{G}$ (ou $f^{-1}\mathcal{G}$). Cette construction possède un bon comportement sur les fibres : on dispose d'un isomorphisme canonique $(f^*\mathcal{G})(x) \simeq \mathcal{G}(f(x))$. Cela entraîne que le foncteur $f^* : \mathbf{Fsc}(Y) \to \mathbf{Fsc}(X)$ est *exact.*

Les assignations $f \mapsto f_*$ et $f \mapsto f^*$ possèdent des propriétés de fonctorialité qu'on n'écrira pas ici.

Proposition 2.8. *Pour toute application continue* $f : X \to Y$ *le foncteur* $f^* : \mathbf{Fsc}(Y) \to \mathbf{Fsc}(X)$ *est adjoint à gauche du foncteur* $f_* : \mathbf{Fsc}(X) \to \mathbf{Fsc}(Y)$.

Produits tensoriels, faisceaux d'homomorphismes Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux préfaisceaux sur l'espace topologique X. On définit un préfaisceau $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sur X par

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fsc}(U)}(\mathcal{F}|U, \mathcal{G}|U)$$

où $\mathcal{F}|U$ désigne la restriction de $\mathcal{F}$ à U, c'est-à-dire l'image réciproque de $\mathcal{F}$ par l'inclusion $U \hookrightarrow X$. Les flèches de restriction de ce préfaisceau s'obtiennent en utilisant le foncteur de restriction de $\mathbf{Fsc}(U) \to \mathbf{Fsc}(V)$ pour $V \subset U$. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des faisceaux, alors $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est un faisceau, appelé faisceau des homomorphismes de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$.

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux faisceaux sur X, le préfaisceau $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{G}(U)$ n'est généralement par un faisceau ; sa faisceautisation est appelée *produit tensoriel* de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ et noté $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. On dispose d'isomorphismes canoniques $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})(x) \simeq \mathcal{F}(x) \otimes \mathcal{G}(x)$ (tandis que les faisceaux d'homomorphismes ne se comportent pas bien sur les fibres).

Ces constructions donnent lieu à un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

2.3 Cohomologie des faisceaux

On a vu que la catégorie $\mathbf{Fsc}(X) = \mathbf{Fsc}(X, \mathbf{Ab})$ est une catégorie abélienne possédant des limites et colimites quelconques et dans laquelle les colimites filtrantes sont exactes. C'est même une catégorie de Grothendieck ; en effet, la proposition suivante montre qu'elle admet un ensemble de générateurs.

Proposition 2.9. *Pour toute base $\mathcal{B}$ de la topologie de X, l'ensemble des $\mathbb{Z}_U^X := (incl : U \to X)_* \mathbb{Z}_U \in \mathbf{Fsc}(X)$ (rapidement l'exposant X sera omis s'il n'y a pas d'ambiguïté), où U parcourt $\mathcal{B}$, engendre la catégorie abélienne $\mathbf{Fsc}(X)$.*

Lemme 2.10. *On dispose d'un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_U^X, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}(U).$$

La catégorie $\mathbf{Fsc}(X)$ possède donc assez d'injectifs. En revanche, elle n'a pratiquement jamais assez de projectifs, comme l'illustre la remarque suivante.

Remarque 2.11. Supposons X localement connexe et X sans point isolé. Alors il n'existe aucun objet projectif non nul dans $\mathbf{Fsc}(X)$. En effet, l'hypothèse de connexité locale entraîne que les $\mathbb{Z}_U$, pour U connexe non vide, engendrent la catégorie $\mathbf{Fsc}(X)$, donc un projectif est forcément facteur direct d'une somme directe de ces faisceaux. Ensuite, on note que l'anneau des endomorphismes de $\mathbb{Z}_U$ est $\mathbb{Z}$ pour U connexe non vide et que ce faisceau n'est jamais projectif si X est sans point isolé (on peut le voir par exemple en utilisant, pour $V \subset U$ ouvert, la suite exacte $0 \to \mathbb{Z}_V \to \mathbb{Z}_U \to \mathbb{Z}_{U \setminus V} \to 0$ — cf. [God73], § 2.9).

Définition 2.12. La cohomologie de X à valeurs dans un faisceau $\mathcal{F}$ est définie comme l'image de $\mathcal{F}$ par les foncteurs dérivés à gauche du foncteur des sections globales ; c'est donc, par le lemme 2.10 le groupe abélien gradué

$$H^*(X; \mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^*_{\mathbf{Fsc}(X)}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}).$$

Exemple 2.13. Soit $f : X \to Y$ une application continue ; le foncteur $f_* : \mathbf{Fsc}(X) \to \mathbf{Fsc}(Y)$ est exact à gauche et préserve les injectifs (car son adjoint à gauche f^* est exact) et sa composée avec le foncteur section $\mathbf{Fsc}(Y) \to \mathbf{Ab}$ est le foncteur section $\mathbf{Fsc}(X) \to \mathbf{Ab}$. Par conséquent, on dispose d'une suite spectrale de Grothendieck naturelle en le faisceau $\mathcal{F}$ sur X de la forme :

$$E_2^{p,q} = H^p(Y; (\mathbf{R}^q f_*)(\mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(X; \mathcal{F})$$

(suite spectrale de Leray).

Modules sur un faisceau d'anneaux La considération des faisceaux de groupes abéliens (ou de modules sur un anneau fixé, qui se traite exactement de la même façon) ne suffit pas toujours, même dans des situations simples. Supposons que $\mathcal{A}$ est un *faisceau d'anneaux* sur X ; un $\mathcal{A}$-module (disons à gauche) est par définition un faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$ tel que, pour tout $U \in \mathcal{T}_X$, le groupe abélien $\mathcal{F}(U)$ est muni d'une structure de $\mathcal{A}(U)$-module (à gauche). Ces $\mathcal{A}$-modules (parfois aussi appelés faisceaux de $\mathcal{A}$-modules) forment une catégorie $\mathcal{A} - \mathbf{Mod}$.

Exemple 2.14 (Exemple fondamental). Si X est une variété (topologique, différentielle, analytique complexe, algébrique...), les fonctions (continues vers $\mathbb{R}$, lisses vers $\mathbb{R}$, analytiques vers $\mathbb{C}$, régulières vers le corps de base...) forment un faisceau d'anneaux. Tout fibré vectoriel (topologique, différentiel, analytique complexe, algébrique...) sur X définit un faisceau — le faisceau de ses sections (vérifiant les mêmes propriétés de régularité) qui est naturellement un module sur le faisceau d'anneaux canoniquement attaché à la variété.

Le foncteur d'oubli d'une telle catégorie de modules vers la catégorie $\mathbf{Fsc}(X, \mathbf{Ab})$ commute aux limites et colimites ; en particulier $\mathcal{A} - \mathbf{Mod}$ est également une catégorie abélienne. C'est une catégorie de Grothendieck. La plupart des constructions mentionnées précédemment fonctionnent sans changement dans ce cas ; pour le produit tensoriel, on a une notion naturelle de produit tensoriel au-dessus de $\mathcal{A}$: le faisceau $\mathcal{F} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{G}$ (il faut ici supposer que $\mathcal{A}$ est un faisceau d'anneaux commutatifs — ce qui est toujours le cas dans le cadre géométrique classique — ou alors que $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{A}$-module à droite et $\mathcal{G}$ un $\mathcal{A}$-module à gauche, et l'on n'obtient alors à l'arrivée qu'un faisceau de groupes abéliens, et non un $\mathcal{A}$-module) est la faisceautisation du préfaisceau $U \mapsto \mathcal{F}(U) \underset{\mathcal{A}(U)}{\otimes} \mathcal{G}(U)$.

2.4 Quelques cas classiques d'acyclicité

Faisceaux flasques

Définition 2.15. On dit qu'un faisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens sur X est *flasque* si, pour toute inclusion $V \subset U$ d'ouverts de X, l'application de restriction $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ est surjective. (Il suffit évidemment de l'exiger pour $U = X$.)

Proposition 2.16. *Les faisceaux flasques sont acycliques (pour le foncteur section) : si $\mathcal{F}$ est flasque, alors $H^n(X; \mathcal{F}) = 0$ pour $n > 0$.*

Démonstration. On note d'abord que tout faisceau se plonge dans un faisceau injectif et flasque (tout injectif est donc flasque). Cela provient de ce que, pour I groupe abélien injectif et $x \in X$, le faisceau $I_x \in \mathbf{Fsc}(X)$ image directe de I par l'inclusion $\{x\} \hookrightarrow X$ est injectif et flasque.

Soit donc $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I} \to \mathcal{G} \to 0$ une suite exacte courte avec $\mathcal{I}$ injectif et flasque. Le lemme 2.17 ci-après montre tout d'abord que cette suite reste exacte quand on l'évalue sur un ouvert quelconque de X (parce que $\mathcal{F}$ est flasque), ce dont on déduit d'abord (parce que $\mathcal{I}$ est flasque) que $\mathcal{G}$ est flasque. On en déduit d'autre part en considérant la suite exacte longue de cohomologie associée que $H^1(X; \mathcal{F})$ est nul et $H^n(X; \mathcal{F})$ isomorphe à $H^{n-1}(X; \mathcal{G})$ pour $n > 1$. On conclut donc par récurrence sur le degré cohomologique. □

Lemme 2.17. *Si $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to 0$ est une suite exacte de faisceaux avec $\mathcal{F}$ flasque, alors c'est aussi une suite exacte de préfaisceaux, i.e. la suite $0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{A}(U) \to \mathcal{B}(U) \to 0$ est exacte pour tout ouvert U de X.*

Démonstration. Soit $s \in \mathcal{B}(U)$: il s'agit de montrer que s se relève en une section de $\mathcal{A}$ au-dessus de U. Pour cela, considérons l'ensemble E des couples (V, t) où V est un ouvert inclus dans U et t un élément de $\mathcal{A}(V)$ dont l'image dans $\mathcal{B}(V)$ est la restriction de s à V. On ordonne E par $(V, t) \leq (V', t')$ si $V \subset V'$ et t est la restriction de t' à V. La propriété de faisceau entraîne que E est un ensemble ordonné *inductif*; il admet donc, par le lemme de Zorn, un élément maximal (V, t). Supposons que V soit un sous-ensemble strict de U et donnons-nous $x \in U \setminus V$. L'exactitude de notre suite de faisceaux implique l'existence d'un voisinage ouvert W de x, qu'on peut supposer inclus dans U, et d'une section r de $\mathcal{A}$ sur W qui s'envoie dans $\mathcal{B}(W)$ sur la restriction de s. Restreints à $V \cap W$, r et t diffèrent d'une section venant de $\mathcal{F}(V \cap W)$, qui est la restriction d'une section de $\mathcal{F}$ sur W, puisque $\mathcal{F}$ est flasque. Par conséquent, quitte à modifier t, on peut supposer que r et t ont la même restriction à $V \cap W$, i.e. qu'ils induisent un élément de $\mathcal{F}(V \cup W)$, par l'axiome des faisceaux. Comme $V \cup W$ contient strictement V, cela contredit la maximalité de V et achève la démonstration. □

Une application fondamentale de la proposition 2.16 est le résultat suivant.

Proposition 2.18. *Soit X un espace topologique dont la topologie admet une base d'ouverts contractiles et suffisamment régulier (par exemple, où tout ouvert est paracompact, ce qui est le cas d'un espace métrisable)*[2]*. Alors la cohomologie $H^*(X; \mathbb{Z}_X)$ du faisceau constant est naturellement isomorphe à la cohomologie singulière $H^*(X; \mathbb{Z})$.*

Esquisse de démonstration, suivant [Voi02] et [God73]. Pour tout entier naturel n, notons C^n_{sing} le préfaisceau des n-cochaînes singulières sur les ouverts de X et $\mathcal{C}^n_{sing}$ sa faisceautisation.

1. C^*_{sing} est un complexe de préfaisceaux et $\mathcal{C}^*_{sing}$ un complexe de faisceaux. Celui-ci est une résolution du faisceau constant $\mathbb{Z}_X$ car $\mathcal{T}_X$ a une base d'ouverts contractiles. En effet, cette hypothèse assure que $C^*_{sing}(U)$ est une résolution de $\mathbb{Z}$ pour des ouverts U formant une base de la topologie de X, ce qui implique que, sur chaque fibre (qui est la même pour un préfaisceau ou sa faisceautisation), on obtient une résolution de $\mathbb{Z}$.
2. Pour tout ouvert U de X et tout entier naturel n, l'application canonique $C^n_{sing}(U) \to \mathcal{C}^n_{sing}(U)$ est surjective et son noyau est le sous-groupe abélien $C^n_0(U)$ des éléments de $C^n_{sing}(U)$ dont la restriction à des ouverts convenables de U le recouvrant est nulle. Cela découle formellement, lorsque X est suffisamment régulier (cf. [God73], chap. II, théorème 3.9.1), de ce que C^n_{sing} vérifie « la moitié » de l'axiome des faisceaux : si (V_i) est un recouvrement ouvert de U, toute famille d'éléments de $C^n_{sing}(V_i)$ compatibles sur les $V_i \cap V_j$ provient d'un élément de $C^n_{sing}(U)$.
3. Les faisceaux $\mathcal{C}^n_{sing}$ sont flasques. Cela résulte de l'observation précédente et de ce que, pour toute inclusion $V \subset U$ d'ouverts, la restriction $C^n_{sing}(U) \to C^n_{sing}(V)$ est surjective. En conséquence, la cohomologie de X à valeurs dans le faisceau constant $\mathbb{Z}_X$ est naturellement isomorphe à la cohomologie du complexe $\mathcal{C}^*_{sing}(X)$.
4. L'application canonique $C^*_{sing}(X) \twoheadrightarrow C^*_{sing}(X)/C^*_0(X) \simeq \mathcal{C}^*_{sing}(X)$ est un quasi-isomorphisme. C'est une conséquence du théorème des petites chaînes.

□

Partitions de l'unité et faisceaux acycliques

Définition 2.19. Soient X un espace topologique, $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X et $\mathcal{F}$ un sous-faisceau de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels du faisceau des fonctions continues vers $\mathbb{R}$. On appelle *partition de l'unité* de $(X, \mathcal{F})$ subordonnée à (U_i) toute famille $(f_i)_{i \in I}$ de sections globales de $\mathcal{F}$ à valeurs dans $[0, 1]$ telles que :

2. On prendra garde que les hypothèses indiquées dans le théorème 4.47 de [Voi02] semblent insuffisantes ; on s'est aidé de [God73] pour rétablir un énoncé qu'on sait démontrer entièrement.

1. le support de f_i (i.e. l'adhérence de l'ensemble des points où f_i ne s'annule pas) est inclus dans U_i ;
2. la somme des f_i est localement finie (i.e. les ouverts V tels que l'ensemble des i tels que $f_i|_V$ ne soit pas identiquement nulle soit fini recouvrent X) et égale à 1.

Exemple 2.20. Il est classique qu'une variété C^∞ (réelle) munie de son faisceau canonique possède des partitions de l'unité subordonnées à tout recouvrement. L'absence totale de propriété analogue dans le cadre analytique ou algébrique engendre des difficultés supplémentaires, que cet exposé n'abordera pas.

Proposition 2.21. *Soient X un espace topologique, $\mathcal{A}$ un sous-faisceau de $\mathbb{R}$-algèbres des fonctions continues vers $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{A}$-module. On suppose que, pour tout recouvrement ouvert de X, il existe une partition de l'unité de $(X, \mathcal{A})$ subordonnée. Alors $\mathcal{F}$ est acyclique : $H^i(X; \mathcal{F}) = 0$ pour $i > 0$ (où $\mathcal{F}$ est vu comme faisceau de groupes abéliens).*

Démonstration. On note d'abord que le foncteur d'oubli $\mathcal{A}-\mathbf{Mod} \to \mathbf{Fsc}(X, \mathbf{Ab})$ préserve les injectifs. En effet, il possède un adjoint à gauche *exact*, $\mathcal{A} \otimes -$ (puisque celui-ci est donné sur les fibres par le produit tensoriel usuel et qu'on travaille avec des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels). Par conséquent, il suffit de montrer que la composée de ce foncteur d'oubli et du foncteur des sections globales $\mathbf{Fsc}(X, \mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}$ préserve les épimorphismes.

Soit en effet $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ un épimorphisme de $\mathcal{A}$-modules et t un élément de $\mathcal{G}(X)$. Il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X tel que, pour tout $i \in I$, la restriction t_i de t à U_i provienne d'un élément s_i de $\mathcal{F}(U_i)$. Soit (f_i) une partition de l'unité subordonnée à (U_i). En considérant le recouvrement ouvert de X formé de U_i et du complémentaire de $Supp(f_i)$ et la propriété de faisceau pour $\mathcal{F}$, on voit que s_i se prolonge en une section globale de $\mathcal{F}$, disons ξ_i. On vérifie aussitôt que $\sum_{i \in I} f_i \xi_i \in \mathcal{F}(X)$ s'envoie sur t dans $\mathcal{G}(X)$, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 2.22. *La cohomologie de de Rham d'une variété différentielle réelle est naturellement isomorphe à sa cohomologie singulière à coefficients dans $\mathbb{R}$.*

3 Une suite spectrale de Hodge vers de Rham et la suite spectrale de Leray

(On suit ici [Voi02], § 16.1.3 ; il ne s'agit pas du cas le plus simple ou le plus général de suite spectrale de Hodge : cette section est donc surtout là pour faire joli.)

Supposons que $\phi : X \to Y$ est une submersion propre de variétés (différentiables, mais on pourrait aussi considérer une submersion algébrique entre variétés algébriques projectives). Le faisceau $\phi^* \Omega_Y^n$ est un sous-faisceau de Ω_X^n. Cela procure une filtration décroissante sur le complexe de de Rham :

$$F^p \Omega_X^q := \phi^* \Omega_Y^p \wedge \Omega_X^{q-p}$$

qui procure une suite spectrale aboutissant à la cohomologie de de Rham de X et dont la page 2 est une cohomologie de Hodge.

On dispose d'autre part de la suite spectrale de Leray pour le faisceau constant $\mathbb{R}_X$:

$$E_2^{p,q} = H^p(Y; \mathbf{R}^q \phi_*(\mathbb{R}_X)) \Rightarrow H^{p+q}(X; \mathbb{R}_X).$$

Le théorème 16.12 de [Voi02] (qui n'est nullement trivial) affirme que ces deux suites spectrales sont canoniquement isomorphes à partir de la deuxième page (dans le cas différentiable).

Références

[CE99] H. Cartan & S. Eilenberg – *Homological algebra*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999, With an appendix by David A. Buchsbaum, Reprint of the 1956 original.

[Dim04] A. Dimca – *Sheaves in topology*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[God73] R. Godement – *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1973, Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252.

[KS06] M. Kashiwara & P. Schapira – *Categories and sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 332, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Ver96] J.-L. Verdier – « Des catégories dérivées des catégories abéliennes », *Astérisque* (1996), no. 239, p. xii+253 pp. (1997), With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis.

[Voi02] C. Voisin – *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2002.