Introduction aux travaux de Galatius sur l'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres

Notes d'exposé au groupe de travail de topologie algébrique Nantes/Angers

Aurélien DJAMENT

13 octobre 2011

Résumé

On se propose d'expliquer sommairement le plan de la démonstration du résultat de Galatius ([Gal]) selon lequel l'inclusion du groupe symétrique dans le groupe des automorphismes du groupe libre correspondant induit stablement un isomorphisme en homologie.

Table des matières

1 Les automorphismes des groupes libres et leur homologie

Les automorphismes des groupes libres constituent un sujet d'intérêt intrinsèque en théorie des groupes ; ils possèdent également de fortes analogies avec les groupes de difféotopies. Il n'est pas très difficile d'en décrire des générateurs : si $(e_1, \dots, e_n)$ est une «base »d'un groupe libre de rang n, les automorphismes $e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$ (où σ est un élément du groupe symétrique Σ_n), $e_j \mapsto e_j^{-1}$, $e_i \mapsto e_i$ pour $i \neq j$ (où $j \in \{1, \dots, n\}$ est fixé) et $e_j \mapsto e_j e_k$, $e_i \mapsto e_i$ pour $i \neq j$ (où j et k sont fixés et distincts) engendrent ce groupe. Avec un peu plus de travail, on peut aussi décrire les relations entre ces générateurs. Voir pour tout cela, par exemple, [MKS04], chap. 3 (qui s'appuie notamment sur des travaux de Nielsen datant de presque un siècle). On note au passage (on n'en fera pas usage) qu'on dispose d'un épimorphisme de groupes $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}) \twoheadrightarrow GL_n(\mathbb{Z})$ par abélianisation (parce que $SL_n(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices élémentaires), dont le noyau est d'ailleurs extrêmement délicat à étudier. On s'intéresse également au groupe des automorphismes extérieurs (quotient par le sous-groupe distingué des automorphismes intérieurs) $\mathrm{Out}(\mathbb{Z}^{*n})$.

L'homologie de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$ et $\mathrm{Out}(\mathbb{Z}^{*n})$ a été l'objet d'un grand intérêt au moins depuis les années 1980. Citons sans plus de précision quelques résultats significatifs :

- Le travail de Culler et Vogtmann [CV86] construit un bel espace contractile (appelé parfois *outre espace* pour traduire l'anglais *outer space*) sur lequel opère joliment $\mathrm{Out}(\mathbb{Z}^{*n})$ (avec certains stabilisateurs finis). Cet espace est construit à partir d'une notion appropriée d'arbre. Ce travail difficile constitue un ingrédient fondamental des recherches ultérieures sur le sujet (dont l'article [Gal] de Galatius auquel on s'intéresse). - Hatcher ([Hat95]) a démontré la stabilité homologique pour les groupes $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$ dans [Hat95] ; il a ensuite, en collaboration avec Vogtmann, amélioré la borne ([HV98]) : l'inclusion canonique induit un isomorphisme $H_i(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})) \to H_i(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n+1}))$ pour $n > 2i + 1$.
- Dans [HV04], Hatcher et Vogtmann (voir aussi l'erratum [HVW06] avec Wahl) montrent également que la projection $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}) \twoheadrightarrow \mathrm{Out}(\mathbb{Z}^{*n})$ induit un isomorphisme en homologie de degré i pour $n \geq 2i + 4$.
- Signalons enfin un survol efficace du sujet par Vogtmann ([Vog06]), où de nombreux autres résultats sont mentionnés.

Avant Galatius, seuls des résultats très partiels étaient connus sur l'homologie stable des $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$, témoignant de la difficulté du sujet malgré une machinerie déjà bien développée. Le résultat essentiel de [Gal] est le suivant :

Théorème 1.1 (Galatius). *L'inclusion canonique $\Sigma_n \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$ induit stablement un isomorphisme en homologie — donc un isomorphisme entre H_i pour $n > 2i + 1$.*

En effet, la stabilité homologique pour les groupes symétriques est connue depuis longtemps (et est beaucoup plus facile que pour les automorphismes des groupes libres) ; Nakaoka ([Nak60]) a même calculé entièrement, il y a une cinquantaine d'années, l'homologie de tous les groupes symétriques.

La seule annulation rationnelle de l'homologie stable des automorphismes des groupes libres restait conjecturale, hors des très petits degrés homologiques, ce qui illustre la profondeur du théorème de Galatius.

2 Aperçu de la stratégie de démonstration de Galatius

On présente ici l'approche de [Gal]. De légères variations, mettant en perspective ce travail avec d'autres résultats du même type sur les groupes de difféotopies par exemple (théorème de Madsen et Weiss), sont esquissées dans l'exposé [Hat10] d'Hatcher.

2.1 Le faisceau d'espaces topologiques des graphes sur $\mathbb{R}^N$

À chaque ouvert U de $\mathbb{R}^N$, Galatius associe un espace topologique $\Phi(U)$ de graphes dans U. On ne donnera pas ici la définition formelle de ceux-ci, assez technique — les graphes sont des sous-ensembles de U munis d'une fonction continue vers $[0,1]$ (qui paramètre en gros la distance aux sommets) vérifiant certaines propriétés — et encore moins celle de la topologie, qui l'est encore davantage. De plus, on a une notion de restriction qui fait de $U \mapsto \Phi(U)$ un faisceau d'espaces topologiques sur $\mathbb{R}^N$. Cela est démontré dans le §2 de [Gal], avec d'autres propriétés (toujours élémentaires mais assez longues ou peu intuitives) de topologie générale de ces espaces.

2.2 Type d'homotopie des espaces de graphes et automorphismes des groupes libres

La seconde étape consiste à relier le type d'homotopie de ces espaces de graphes à celui du classifiant des groupes d'automorphismes des groupes libres — et plus généralement, de groupes d'automorphismes de graphes (entendus ici en un sens combinatoire).

Comme on a un faisceau Φ sur $\mathbb{R}^N$, on peut définir $\Phi(A)$ pour toute partie A (pas nécessairement ouverte) de $\mathbb{R}^N$: c'est la colimite des $\Phi(U)$ pour U voisinage ouvert de A. Galatius considère ces objets uniquement comme des ensembles puis définit des espaces topologiques $\Phi^S(M)$ comme suit.

On considère des ensembles $M \subset U \subset \mathbb{R}^N$, avec M compact et U ouvert. On se donne $S \in \Phi(U \setminus \mathrm{int} M)$; $\Phi^S(M)$ est l'image réciproque de S par l'application de restriction $\Phi(U) \to \Phi(U \setminus \mathrm{int} M)$. On munit cet ensemble de la topologie induite par celle de $\Phi(U)$ (via la restriction).

Galatius introduit également une catégorie $\mathcal{G}_S$ dont l'ensemble des objets est $\Phi^S(M)$ et les morphismes sont les épimorphismes de graphes en un sens approprié.

Théorème 2.1 (Théorème 3.2 de [Gal])**.** *Si* $\mathrm{int} M$ *est* $(N-3)$*-connexe, alors il existe une application continue* $(N-3)$*-connexe* $\Phi^S(M) \to B\mathcal{G}_S$.

La démonstration repose sur des considérations de hocolim (et les propriétés de topologie générale du faisceau Φ). Elle fait l'objet des §3.1 et 3.2 de l'article.

Ensuite, Galatius examine le type d'homotopie des $B\mathcal{G}_S$ en le reliant à celui du classifiant de catégories de graphes abstraits (i.e. non plongés — ce sont des données combinatoires). Il parvient au résultat suivant :

Théorème 2.2 (Théorème 3.19 de [Gal])**.** *Si* $\mathrm{int} M$ *est* $(N-3)$*-connexe et que* S *est un germe avec* s *bouts*[1] *dans* $\mathrm{int} M$*, alors il existe une application continue* $(N-3)$*-connexe*

$$\Phi^S(M) \to \coprod_G B\mathrm{Aut}(G)$$

où la réunion disjointe est prise sur les graphes G *à* s *feuilles (à homotopie près).*

Les groupes d'automorphismes des produits libres sont des cas particuliers des groupes d'automorphismes qui apparaissent dans cet énoncé. En fait :

1. On ne précisera pas ici la signification de cette hypothèse.

Corollaire 2.3 (Proposition 3.21 de [Gal]). *Posons*

$$B_N := \Phi^{[\varnothing]}([0,1]^N)$$

puis

$$B_\infty := \operatorname{colim}_N B_N.$$

Alors le sous-espace des graphes de B_∞ ayant le type d'homotopie d'un bouquet de n cercles a le type d'homotopie de $B\mathrm{Out}(\mathbb{Z}^{*n})$.

2.3 Spectre et catégories de cobordisme associés aux graphes

Une observation fondamentale est que la suite d'espaces topologiques $(\Phi(\mathbb{R}^N))_N$, qu'on pointe par le graphe vide, est munie d'applications continues

$$\varepsilon_N : \Sigma\Phi(\mathbb{R}^N) \to \Phi(\mathbb{R}^{N+1})$$

induites par $\mathbb{R} \times \Phi(\mathbb{R}^N) \to \Phi(\mathbb{R}^{N+1}) \quad (t, G) \mapsto \{t\} \times G$. Ici la suspension Σ est vue comme le produit contracté avec le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}$. Cela définit une structure de spectre $\mathbf{\Phi}$ sur cette suite (on n'a besoin d'aucune théorie sur les spectres, en fait). Par adjonction, on en déduit des applications continues (pointées) $\Phi(\mathbb{R}^N) \to \Omega\Phi(\mathbb{R}^{N+1})$, puis $\Omega^N\Phi(\mathbb{R}^N) \to \Omega^{N+1}\Phi(\mathbb{R}^{N+1})$. On pose ensuite

$$\Omega^\infty\mathbf{\Phi} := \operatorname*{colim}_N \Omega^N\Phi(\mathbb{R}^N)$$

(c'est l'espace de lacets infinis associé au spectre).

Remarque 2.4. Cette construction est présentée comme un analogue de celle de Thom ; elle s'inscrit plus généralement dans les techniques de *balayage* pour étudier l'homologie stable de suites de groupes intervenant comme groupes d'automorphismes d'objets géométriques convenables. Voir [Hat10] à ce sujet.

On peut définir aussi des morphismes $\Sigma^N B_N \to \Phi(\mathbb{R}^N$ (en translatant les graphes), puis par adjonction $B_N \to \Omega^N\Phi(\mathbb{R}^N)$; ils sont compatibles aux morphismes structuraux du spectre $\mathbf{\Phi}$ et fournisse donc une application continue (pointée) $B_\infty \to \Omega^\infty\mathbf{\Phi}$. On en déduit ensuite, grâce au corollaire 2.3, une application (dans la catégorie homotopique) $B\mathrm{Out}(\mathbb{Z}^{*n}) \to \Omega^\infty\mathbf{\Phi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.5 (Théorème 4.1 de [Gal]). *Le morphisme*

$$\coprod_n B\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}) \to \Omega^\infty\mathbf{\Phi}$$

obtenu en composant les flèches évidentes $B\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}) \to B\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n+1}) \to B\mathrm{Out}(\mathbb{Z}^{*n+1})$ avec les précédentes induit une équivalence d'homologie

$$\mathbb{Z} \times B\mathrm{Aut}_\infty \to \Omega^\infty\mathbf{\Phi}.$$

De fait, le théorème de la complétion en groupe assure que la complétion en groupes du monoïde topologique source de la première flèche du théorème est homotopiquement équivalent à $\mathbb{Z} \times B\mathrm{Aut}_\infty^+$ (construction plus de Quillen, qui ne change pas l'homologie). Comme la flèche est un morphisme de H-espaces, elle induit par ce théorème un morphisme $\mathbb{Z} \times B\mathrm{Aut}_\infty^+ \to \Omega^\infty\mathbf{\Phi}$.

La démonstration du théorème 2.5, longue et difficile, occupe le §4 de [Gal]. Elle repose sur plusieurs constructions et étapes intermédiaires, notamment l'introduction de «catégories de cobordisme»associées aux graphes. Ces catégories (dont de nombreuses variantes sont nécessaires) ont pour objets certaines parties finies de $\mathbb{R}^N$ décorées de réels convenables et les morphismes sont définis (de façon compliquée et peu intuitive) à partir des graphes (au sens : éléments de $\Phi(U)$ pour U ouvert convenable).

2.4 Type d'homotopie du spectre des graphes

Théorème 2.6 (Théorème 5.1 de [Gal]). *Le spectre* $\mathbf{\Phi}$ *est homotopiquement équivalent au spectre des sphères.*

Par le théorème de Barratt-Priddy-Quillen, cela conclut le travail de [Gal].

La démonstration du théorème 2.6 est encore longue et difficile. Elle repose lourdement sur des considérations de hocolim et fait intervenir les classifiants de nombreuses catégories topologiques.

3 Propositions concrètes pour la suite du groupe de travail

Le §2.1 (on se réfère ici à la notation des précédentes notes, pas aux sections de [Gal]) relève de la topologie générale, sans outillage particulier, mais il est très technique et difficile à comprendre intuitivement. Il doit faire l'objet d'un exposé (si on ne donne aucune démonstration) ou deux.

En vue des étapes suivantes, quelques (2 ou 3 ?) séances de rappels sur les hocolim, les classifiants de catégories (éventuellement topologiques), le théorème de la complétion en groupe, les techniques simpliciales correspondantes seront probablement nécessaires (y compris dans un but de culture générale).

Même avec ces préliminaires et sans tout traiter en détail, il faut compter un minimum de deux séances pour couvrir le §2.2.

Couvrir la totalité du §2.3 n'est probablement pas très réaliste. Pour bien expliquer les constructions et les étapes, même en n'en sélectionnant que quelques-unes à démontrer vraiment, on peut prévoir trois séances.

La même remarque vaut pour le §2.4.

Au total, un minimum de douze séances paraît nécessaire, et la plupart des exposés seront exigeants pour l'orateur comme l'auditoire.

Références

[CV86] M. Culler & K. Vogtmann – « Moduli of graphs and automorphisms of free groups », *Invent. Math.* **84** (1986), no. 1, p. 91–119.

[Gal] S. Galatius – « Stable homology of automorphism groups of free groups », à paraître dans *Annals of Math.*

[Hat95] A. Hatcher – « Homological stability for automorphism groups of free groups », *Comment. Math. Helv.* **70** (1995), no. 1, p. 39–62.

[Hat10] — , « Stable homology by scanning : Variations on a theorem of Galatius », Notes d'exposé disponibles en ligne sur la page de l'auteur, 2010.

[HV98] A. Hatcher & K. Vogtmann – « Cerf theory for graphs », *J. London Math. Soc. (2)* **58** (1998), no. 3, p. 633–655.

[HV04] — , « Homology stability for outer automorphism groups of free groups », *Algebr. Geom. Topol.* **4** (2004), p. 1253–1272.

[HVW06] A. Hatcher, K. Vogtmann & N. Wahl – « Erratum to : "Homology stability for outer automorphism groups of free groups [Algebr. Geom. Topol. **4** (2004), 1253–1272 (electronic)] by Hatcher and Vogtmann », *Algebr. Geom. Topol.* **6** (2006), p. 573–579 (electronic).

[MKS04] W. Magnus, A. Karrass & D. Solitar – *Combinatorial group theory*, second éd., Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2004, Presentations of groups in terms of generators and relations.

[Nak60] M. Nakaoka – « Decomposition theorem for homology groups of symmetric groups », *Ann. of Math. (2)* **71** (1960), p. 16–42.

[Vog06] K. Vogtmann – « The cohomology of automorphism groups of free groups », in *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, p. 1101–1117.