Introduction aux Γ-modules d'après Pirashvili (notes d'exposé au groupe de travail de topologie algébrique Nantes-Angers)

Aurélien DJAMENT

10 mars 2008

L'objectif de ce groupe de travail consiste à étudier les Γ-modules et leurs applications en algèbre et topologie d'après Pirashvili ; il s'agit notamment de comprendre son article [Pir00b].

Cet exposé introductif se propose de donner un panorama rapide des résultats de l'article et des motivations du sujet et de rappeler les bases de la théorie homologique des catégories de foncteurs utiles dans toute l'étude (cf. §1.1 à 1.5 de [Pir00b]).

Table des matières

1 La catégorie Γ et les catégories associées : motivations topologiques et algébriques

On désigne par Γ la catégorie des ensembles finis pointés. Il sera parfois commode d'assimiler Γ à son (petit) squelette constitué par les ensembles pointés

$$[n] := (\{0, \ldots, n\}, 0) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Remarque 1.1. On prendra garde que l'article originel [Seg74] note Γ une catégorie équivalente à la catégorie *opposée* de "notre" catégorie Γ, qui suit la convention de Pirashvili.

Précisément, Segal considère la catégorie, que nous noterons ici Γ', dont les objets sont les ensembles finis et les morphismes $S \to T$ les fonctions $\theta : S \to \mathcal{P}(T)$ (ensemble des parties) telles que $\theta(a) \cap \theta(b) = \varnothing$ pour $a \neq b$; la composée ψ de θ et d'un morphisme $\phi : T \to U$ est définie par $\psi(a) = \bigcup_{b \in \theta(a)} \phi(b)$.

On vérifie aussitôt que le foncteur $\Gamma' \to \Gamma^{op}$ associant à un ensemble fini E l'ensemble pointé $E_+ = (E \amalg \{*\}, *)$ et à un morphisme $\alpha : E \to F$ de Γ' le morphisme d'ensembles pointés $F_+ \to E_+$ envoyant $f \in F$ sur $e \in E$ si $f \in \alpha(e)$ (un tel e est unique par hypothèse), et sur $*$ si un tel e n'existe pas, est une équivalence de catégorie (écrire un quasi-inverse !).

L'intérêt de la description de Segal tient à ce qu'elle rend très naturel le foncteur fidèle et essentiellement surjectif $\iota : \mathbf{\Delta}^{op} \to \Gamma$ défini comme suit ($\mathbf{\Delta}$ désigne comme d'habitude la catégorie des ensembles finis non vides totalement ordonnés, ou plutôt son squelette constitué des objets $\mathbf{n} = \{0 < \cdots < n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$). Sur les objets, on pose $\iota(\mathbf{n}) = [n]$. Si $f : \mathbf{n} \to \mathbf{m}$ est une flèche de $\mathbf{\Delta}^{op}$, la fonction $\iota(f) : [m] \to [n]$ est donnée par $\iota(f)(j) = \min\{i \in \mathbf{n} \,|\, f(i) \geq j\}$ si cet ensemble est non vide, et $\iota(f)(j) = 0$ sinon.

Il importe de noter que le foncteur que nous venons de décrire n'est autre que l'ensemble simplicial pointé $\mathbb{S}^1$: il a seulement deux simplexes non dégénérés, un en degré 0 et un en degré 1.

Exemple 1.2. Notons $d^0, \ldots, d^n : \mathbf{n-1} \to \mathbf{n}$ les cofaces uselles, i.e. les morphismes de $\mathbf{\Delta}$ donnés par $d^i(j) = j$ si $j < i$ et $d^i(j) = j+1$ si $\geq i$. Les applications pointées $\iota(d^i) : [n] \to [n-1]$ vérifient $\iota(d^i)(j) = j$ lorsque $j < i$ et lorsque $j = i$ et $i < n$, $\iota(f)(d^i)(j) = j - 1$ pour $j > i$ et $\iota(d^n)(n) = 0$.

1.1 Γ-modules, Γ-ensembles et Γ-espaces

Soit k un anneau (commutatif pour simplifier) qui servira de base implicite — k sera très vite un corps.

Définition 1.3 ([Pir00b],[Pir00c]).
1. Un **Γ-module** à gauche (resp. à droite) est un foncteur de Γ (resp. Γ^{op}) vers la catégorie $\mathcal{E}_k$ des k-modules. On note $\Gamma - \mathbf{mod}$ (resp. $\mathbf{mod} - \Gamma$) la catégorie de ces foncteurs (les morphismes étant les transformations naturelles).
2. Un **Γ-ensemble** est un foncteur de Γ vers la catégorie $\mathbf{Ens}_*$ des ensembles pointés (finis ou non) tel que $F([0]) = [0]$. On note $\Gamma - \mathbf{ens}$ la catégorie des Γ-ensembles.
3. Un **Γ-espace** est un objet simplicial dans la catégorie $\Gamma - \mathbf{ens}$. Nous noterons $\Gamma - \mathbf{top}$ la catégorie des Γ-espaces.

Remarque 1.4.
1. On peut prolonger un Γ-ensemble en un endofoncteur de $\mathbf{Ens}_*$ commutant aux colimites filtrantes ; on obtient même ainsi une équivalence entre $\Gamma - \mathbf{ens}$ et la catégorie des endofoncteurs de $\mathbf{Ens}_*$ commutant aux colimites filtrantes et préservant $[0]$. Cela permet notamment de *composer* deux Γ-ensembles.
2. Via l'isomorphisme canonique

$$\mathbf{Fonc}(\mathbf{\Delta}^{op}, \mathbf{Fonc}(\Gamma, \mathbf{Ens}_*)) \simeq \mathbf{Fonc}(\Gamma, \mathbf{Fonc}(\mathbf{\Delta}^{op}, \mathbf{Ens}_*)),$$

   la catégorie $\Gamma - \mathbf{top}$ s'identifie à la catégorie des foncteurs de Γ vers les ensembles simpliciaux pointés qui préservent l'objet nul.

Cela suggère une variante dans la définition des Γ-espaces, où l'on remplace les ensembles simpliciaux par des espaces topologiques suffisamment gentils (pour que le produit dans la catégorie pointée — i.e. le produit contracté $\wedge$ — se comporte raisonnablement). C'est ce qui est fait par Segal dans [Seg74], qui impose également une hypothèse supplémentaire (la flèche canonique $F([n]) \to F([1])^n$ induite par les n morphismes $i_k : [n] \to [1]$ — pour $1 \leq k \leq n$ — donnés par $k \mapsto 1$ et $j \mapsto 0$ pour $j \neq k$ doit être une équivalence d'homotopie).

Les Γ-espaces (avec les variantes indiquées ci-avant) ont été introduits par Segal ([Seg74]) au début des années 70. L'observation clef de son travail est que le foncteur nerf peut se "relever" en un sens convenable en un foncteur vers les Γ-espaces si l'on se restreint aux catégories munies d'une "loi de composition" avec des propriétés de cohérence raisonnables.

Remarque 1.5. L'une des applications principales de l'introduction des Γ-espaces par Segal est une démonstration conceptuelle et une généralisation du théorème de Barratt-Priddy-Quillen donnant une équivalence $\Omega^\infty\Sigma^\infty\mathbb{S}^0 \simeq \mathbb{Z} \times B\Sigma_\infty^+$.

Dans ce cas, c'est la catégorie des ensembles finis munie de la somme (catégorique) et son "nerf relevé" qui intervient.

L'intérêt purement algébrique porté à la catégorie Γ — i.e. l'étude de ses "représentations", les Γ-modules — semble remonter aux travaux de Loday [Lod89] sur le scindement des homologies de Hochschild et cyclique, que l'article de Pirashvili [Pir00b] retrouve par une méthode plus conceptuelle, nous y reviendrons au § 1.2.

Algèbre homotopique dans $\Gamma - \mathbf{top}$ ([Pir00c])

À la suite d'autres auteurs, notamment Lydakis (cf. [Lyd99]) et Schwede (cf. [Sch99]), Pirashvili introduit deux structures de catégorie de modèles sur $\Gamma - \mathbf{top}$, l'une dite *stricte* et l'autre *stable*.

Les fibrations (resp. équivalences faibles) strictes sont les morphismes $u : F \to G$ de $\Gamma - \mathbf{top}$ qui induisent pour tout $n \geq 0$ une fibration (resp. une équivalence faible) d'ensembles simpliciaux $u([n]) : F([n]) \to G([n])$ (on regarde ici F et G comme des foncteurs de Γ vers les ensembles simpliciaux).

Pour définir la seconde structure, on a besoin de la construction suivante.

Si F est un Γ-ensemble, pour tous ensembles pointés X et Y, on a une application naturelle $X \wedge F(Y) \to F(X \wedge Y)$ (où $\wedge$ désigne le produit contracté [1] : $A \wedge B = (A \times B)/(A \times * \cup * \times B)$) donnée ainsi : pour $x \in X$, la fonction $\hat{x} : Y \to X \wedge Y$ associant à y la classe de (x, y) induit une fonction $F(\hat{x}) : F(Y) \to F(X) \wedge F(Y)$ qui est triviale si x est le point de base, d'où une fonction $X \wedge F(Y) \to F(X \wedge Y) \quad (x, y) \mapsto F(\hat{x})(y)$ (cette construction revient à utiliser les foncteurs hom internes dans $\mathbf{Ens}_*$ et à jouer formellement avec eux).

Si maintenant F est un Γ-espace, on peut prolonger F en un endofoncteur (encore noté, par abus, de la même manière) de la catégorie $\mathcal{S}_*$ des ensembles simpliciaux pointés, en considérant la composée

$$\mathcal{S}_* = \mathbf{Fonc}(\mathbf{\Delta}^{op}, \mathbf{Ens}_*) \xrightarrow{\mathbf{Fonc}(\mathbf{\Delta}^{op}, F)} \mathbf{Fonc}(\mathbf{\Delta}^{op}, \mathcal{S}_*) = bi - \mathcal{S}_* \xrightarrow{diag} \mathcal{S}_*.$$

Bien sûr, si F est un Γ-ensemble (vu comme Γ-espace constant, ou discret), il est inutile d'utiliser la diagonale.

[1] On prendra garde que ce n'est *pas* le produit dans la catégorie $\mathbf{Ens}_*$!

On a ensuite une application canonique $X \wedge F(Y) \to F(X \wedge Y)$ pour tous ensembles simpliciaux X et Y, obtenue en appliquant le foncteur $\mathbf{Fonc}(\mathbf{\Delta}^{op}, -)$ à la construction précédente. Ici $\wedge$ est le produit contracté d'ensembles simpliciaux pointés.

On en déduit notamment des morphismes naturels $\mathbb{S}^1 \wedge F(\mathbb{S}^n) \to F(\mathbb{S}^{n+1})$, grâce auxquels on obtient un foncteur

$$sp : \Gamma - \mathbf{top} \to \mathbf{Spectres} \qquad F \mapsto (F(\mathbb{S}^n))_n.$$

On prend ici pour modèle simplicial de la sphère $\mathbb{S}^n$ le produit contracté de n copies du modèle standard de $\mathbb{S}^1$, déjà apparu dans la remarque 1.1.

Les *groupes d'homotopie* (stable) d'un Γ-espace F sont définis par

$$\pi_i^{st}(F) := \pi_i^{st}(sp(F)) = \operatorname*{colim}_i \pi_{i+n}(F(\mathbb{S}^n)).$$

Remarque 1.6.
1. Si F est le foncteur identité (Γ-ensemble vu comme Γ-espace constant), $sp(F)$ est le spectre des sphères.
2. Si A est un groupe abélien, le Γ-module à gauche (pour $k = \mathbb{Z}$) $E \mapsto A \otimes (\mathbb{Z}[E]/\mathbb{Z}[*])$, vu comme un Γ-ensemble a pour spectre associé le spectre d'Eilenberg-MacLane HA.
3. Les deux exemples précédents montrent que même pour des Γ-*ensembles*, on obtient des objets topologiquement intéressants !
4. Si F est un Γ-module à gauche, les groupes d'homotopie stable $\pi_*^{st}(F)$ de F peuvent se calculer à l'aide du complexe de Moore associé. Cette description permet de donner une variation naturelle de la définition au cas des Γ-modules *à droite*, où l'on obtient alors des groupes dits de *cohomotopie* stable.

On peut maintenant définir la structure de modèles *stable* sur $\Gamma - \mathbf{top}$: ses cofibrations sont les cofibrations strictes, et ses équivalences faibles sont les morphismes u tels que $\pi_*^{st}(u)$ soit un isomorphisme.

On a déjà vu que des exemples significatifs de Γ-espaces sont en fait des Γ-ensembles (cf. remarques 1.6.3)). Le théorème suivant de Pirashvili (lequel indique que le résultat était aussi connu de Lydakis) précise nettement cette observation.

Théorème 1.7 ([Pir00a]). *Tout Γ-espace est stablement équivalent à un Γ-ensemble, plus précisément à un Γ-groupe — i.e. un foncteur de Γ vers les groupes (prenant la valeur $\{1\}$ en $[0]$).*

Cela est d'autant plus frappant que Pirashvili montre également dans [Pir00a] que plusieurs des "bonnes propriétés" des Γ-groupes abéliens se généralisent raisonnablement aux Γ-groupes.

L'un des principaux théorèmes sur les Γ-espaces (rappelé dans [Pir00c] (théorème 3.9), et dû à Schwede et sans doute Lydakis) est le suivant :

Théorème 1.8. *Le foncteur $sp : \Gamma - \mathbf{esp} \to \mathbf{Spectres}$ induit une équivalence entre la catégorie homotopique de $\Gamma - \mathbf{esp}$ pour la structure stable et la sous-catégorie pleine de la catégorie homotopique des spectres constituée des spectres connexes.*

De surcroît, on peut retrouver le produit contracté des spectres via cette équivalence, et résoudre de façon satisfaisante le problème délicat de la construction d'un produit contracté *monoïdal symétrique* grâce aux Γ-espaces — cf. [Lyd99] et [Pir00c].

1.2 Le foncteur $\mathcal{L}$ de Loday et l'interprétation de théories (co)homologiques en termes de Γ-modules

L'utilisation algébrique des Γ-modules repose souvent sur l'exemple simple mais fondamental suivant, introduit par Loday dans [Lod89].

Désignons par $\mathbf{Alg}_k$ la catégorie des k-algèbres unitaires, associatives et *commutatives*. Cette catégorie possède des sommes finies (et même des sommes quelconques), et la somme de deux algèbres A et B dans cette catégorie est donnée par le produit tensoriel $A \underset{k}{\otimes} B$ (on oubliera souvent l'anneau de base k). On en déduit formellement que pour tout objet A de $\mathbf{Alg}_k$ (que nous appellerons simplement k-algèbre par la suite), on a un *foncteur* $\mathcal{C}(A)$ de la catégorie $\mathbf{E}$ des ensembles finis non vides vers $\mathbf{Alg}_k$ donné par $E \mapsto A^{\otimes E}$. Explicitement, l'action d'une fonction $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ est le morphisme d'algèbres $A^{\otimes n} \to A^{\otimes m}$ donné

$$f_*(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = b_1 \otimes \cdots \otimes b_m, \qquad \text{où} \qquad b_j = \prod_{f(i)=j} a_i.$$

Maintenant, la composée de ce foncteur avec le foncteur d'oubli du point de base $\Gamma \to \mathbf{E}$ se relève canoniquement en un foncteur $\Gamma \to \mathbf{Alg}_A$, puisqu'un point de base $* \to E$ induit un morphisme d'algèbres $A \to A^{\otimes E}$. Si M est un A-module on peut donc définir un Γ-module $\mathcal{L}(A, M)(E)$ par

$$\mathcal{L}(A, M)(E) = M \underset{A}{\otimes} A^{\otimes E}.$$

Autrement dit, sur les objets, on a $\mathcal{L}(A, M)([n]) = M \underset{k}{\otimes} A^{\otimes n}$, et si $f : [n] \to [m]$ est une application pointée, $\mathcal{L}(A, M)(f)$ est l'application (k-)linéaire

$$a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto b_0 \otimes \cdots \otimes b_m, \qquad \text{où} \qquad b_j = \prod_{f(i)=j} a_i.$$

(Ici a_0 et b_0 sont dans m tandis que les autres a_i et b_j sont dans A ; on a commis un abus de notation sur le produit profitant de la commutativité de A.)

Remarque 1.9. Il existe des variantes naturelles de cette construction dans le cas d'algèbres graduées, commutatives au sens gradué. Elles interviendront dans les applications des résultats algébriques de Pirashvili.

L'homologie de Hochschild de A à coefficients dans M s'identifie canoniquement à $\pi_*(\mathcal{L}(A, M)(\mathbb{S}^1))$, groupes qui s'interprèteront à l'aide d'algèbre homologique usuel dans la catégorie $\Gamma - \mathbf{mod}$ ou $\mathbf{mod} - \Gamma$. En effet, l'exemple 1.2 permet d'identifier la différentielle du complexe de Moore de cet ensemble simplicial avec la différentielle de Hochschild. Pour la cohomologie de Hochschild, il faut considérer le Γ-module à *droite* $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}(A), M)$ et remplacer l'homotopie par la cohomotopie.

De façon analogue, la (co)homologie cyclique de A est reliée au foncteur $\mathcal{C}(A)$ via l'algèbre homologique dans la catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{E}}$. Nous y reviendrons en détails dans des exposés ultérieurs.

Dans le cas d'algèbres non nécessairement commutatives, et d'un bimodule non nécessairement symétrique pour la (co)homologie de Hochschild, on peut donner une description en termes de (co)homologie des foncteurs, mais avec des catégories plus compliquées — les catégories d'"ensembles non commutatifs" (finis non vides), éventuellement pointés — cf. [PR02], [Lod98] et [Con83].

Dans son article [Pir00b], Pirashvili montre notamment comment retrouver des résultats de décomposition connus (cf. [Lod98]) sur les homologie de Hochschild et cyclique à l'aide de considérations très générales sur les Γ-modules.

Dans [Pir03], Pirashvili explique comment retrouver l'homologie d'André-Quillen à l'aide des Γ-modules.

2 Généralités sur les catégories de foncteurs ; exemples dans le cas des Γ-modules

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie (essentiellement) petite, notons $\mathcal{F}_{\mathcal{C}} = \mathbf{Fonc}(\mathcal{C}, \mathcal{E}_k)$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers les k-modules. Nous présentons la plupart des rappels du début de la section 1 de [Pir00b] dans ce cadre général, illustré du cas des Γ-modules qui nous intéresse, puisque la plupart s'énoncent sans changement dans ce contexte.

2.1 Structure de base, exemples

La catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ est une *catégorie de Grothendieck* : c'est une catégorie abélienne avec des colimites filtrantes exactes et un générateur. Rappelons qu'une telle catégorie possède toujours des enveloppes injectives, de sorte qu'on peut y faire de l'algèbre homologique. Précisons : dans une catégorie de foncteurs, les limites et colimites se calculent au but (lorsqu'elles y existent), de sorte que l'on hérite de tous les bonnes propriétés de la catégorie de modules $\mathcal{E}_k$, notamment l'exactitude (axiome **(AB5)** selon certaines références) des colimites filtrantes.

Pour les générateurs, on peut être beaucoup plus précis : pour tout objet C de $\mathcal{C}$, notons $P_C^{\mathcal{C}}$ le foncteur $k[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)]$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ (notons qu'on définit même ainsi un foncteur $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{F}_{\mathcal{C}} \quad C \mapsto P_C^{\mathcal{C}}$). Le lemme de Yoneda fournit un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{C}}}(P_C^{\mathcal{C}}, F) \simeq F(C) \qquad (C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C},\ \mathcal{F} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}_{\mathcal{C}}).$$

Cela montre d'une part que les foncteurs $P_C^{\mathcal{C}}$ sont projectifs — et même projectifs *de type fini* : le foncteur $\mathrm{Hom}\,(P_C^{\mathcal{C}}, -)$ commute aux colimites, d'autre part que l'ensemble des $P_C^{\mathcal{C}}$, lorsque C parcourt un squelette de $\mathcal{C}$, *engendre* la catégorie abélienne $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$. Les foncteurs $P_C^{\mathcal{C}}$ sont souvent appelés *projectifs standard* de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ [2].

En fait, l'existence d'un ensemble de générateurs projectifs de type fini caractérise presque les catégories de foncteurs. Plus précisément, on a le résultat élémentaire et fondamental suivant [3].

[2]ce qui constitue un léger abus puisque ces objets de $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ ne dépendent pas que de $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$, mais aussi de $\mathcal{C}$.

[3]lequel semble, sous la forme donnée, dû à Freyd, mais auquel il convient de penser avant

Théorème 2.1 (Morita-Freyd). *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck k-linéaire (i.e. enrichie sur les k-modules : les ensembles de morphismes sont naturellement munis d'une structure de k-modules) et $\mathcal{G}$ une sous-catégorie pleine petite de $\mathcal{A}$ dont les objets sont projectifs de type fini et engendrent $\mathcal{A}$.*

Alors $\mathcal{A}$ est équivalente à la catégorie des foncteurs k-linéaires de $\mathcal{G}^{op}$ dans $\mathcal{E}_k$.

Explicitement, le foncteur $\iota : \mathcal{A} \to \mathbf{Fonc}_{k-\text{lin}}(\mathcal{G}^{op}, \mathcal{E}_k)$ donné par $\iota(A)(G) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, A)$ est une équivalence (c'est toujours une variation sur le lemme de Yoneda).

Les catégories de type $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ sont un cas particulier de catégories de foncteurs k-linéaires d'une catégorie k-linéaire vers $\mathcal{E}_k$ — la catégorie k-linéaire à considérer est la linéarisée $k[\mathcal{C}]$ définie par $\text{Ob}\, k[\mathcal{C}] = \text{Ob}\, \mathcal{C}$ et $\text{Hom}_{k[\mathcal{C}]}(A, B) = k[\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)]$ (composition étendue par linéarité à partir de celle de $\mathcal{C}$).

L'une des différences notables entre $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ et une catégorie de foncteurs k-linéaires générale de but $\mathcal{E}_k$ est que $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ possède un *produit tensoriel* (sur k), calculé au but, et noté $\underset{k}{\otimes}$ ou simplement $\otimes$. Il définit une structure monoïdale symétrique sur $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$, qui est exacte à droite en chaque variable, et exacte si k est un corps. (Cette observation est une généralisation de la remarque suivante : si A est l'algèbre (sur k) d'un groupe (ou d'un monoïde), alors le produit tensoriel sur k de deux A-modules à gauche possède une structure naturelle de A-module à gauche, ce qui correspond au fait que A est en fait une bigèbre.)

Notation 2.2. Dans le cas des Γ-modules, Pirashvili note

$$\Gamma^n = P^{\Gamma}_{[n]} \in \text{Ob}\, \Gamma - \mathbf{mod} \quad \text{et} \quad \Gamma_n = P^{\Gamma^{op}}_{[n]} \in \text{Ob}\, \mathbf{mod} - \Gamma.$$

Exemple 2.3.
- Comme $[0]$ est objet nul (initial et final) de Γ, les foncteurs Γ^0 et Γ_0 sont constants en k — nous les noterons encore k par abus.
- Le fait que $[0]$ est objet nul de Γ permet également de scinder les Γ-modules projectifs standard : on a une composée (unique) $\Gamma^0 = k \to \Gamma^n \to k$ égale à l'identité. Le cas le plus important est celui où $n = 1$; Pirashvili note t^* (pour des raisons qui apparaîtront bientôt), dans [Pir00b], le foncteur $Coker(k \to \Gamma^1)$, de sorte que $\Gamma^1 \simeq k \oplus t^*$. Le foncteur t^* est *indécomposable*.

  Cet exemple simple suggère qu'il existe de nombreux autres choix de générateurs projectifs de type fini que les standard ; cela sera largement précisé dans l'exposé relatif au théorème de Dold-Kan-Pirashvili.
- Si la catégorie $\mathcal{C}$ admet des sommes finies, on a des isomorphismes canoniques $P^{\mathcal{C}}_A \otimes P^{\mathcal{C}}_B \simeq P^{\mathcal{C}}_{A \amalg B}$; la classe des foncteurs projectifs de $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ est alors stable par produit tensoriel.

  Comme la catégorie Γ admet des sommes et produits finis, donnés par

  $$[n] \vee [m] = [n+m] \qquad \text{et} \qquad [n] \times [m] = [nm + n + m],$$

  on a des isomorphismes

  $$\Gamma^n \otimes \Gamma^m \simeq \Gamma^{n+m} \qquad \text{et} \qquad \Gamma_n \otimes \Gamma_m \simeq \Gamma_{n+m+nm}.$$

tout comme une forme générale — "à plusieurs objets" — du théorème classique de Morita sur l'équivalence des catégories de modules.

Lorsque k est un *corps* (commutatif), le foncteur exact et fidèle de dualité $(-)^* = \mathrm{Hom}\,(-,k) : \mathcal{E}_k^{op} \to \mathcal{E}_k$ fournit par post-composition un foncteur, encore noté $(-)^*$ et appelé dualité,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{op} \simeq \mathbf{Fonc}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{E}_k^{op}) \to \mathbf{Fonc}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{E}_k) = \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{op}}.$$

Ce foncteur induit une involution sur les sous-catégories pleines des foncteurs prenant des valeurs de dimension finie.

Par auto-adjonction et exactitude du foncteur de dualité, on voit que ce foncteur transforme un foncteur projectif en un foncteur injectif. Ainsi, les duaux des générateurs projectifs standard de $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ constituent une famille de cogénérateurs injectifs (dits parfois standard) de $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$.

Exemple 2.4. Le Γ-module *à droite* $(t^*)^*$ est donné sur les objets par $E \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}_*}(E,k)$ (où k est pointé par 0). Ce foncteur est noté t (il est introduit dans [Pir00b] avant son dual t^*, d'où la notation) ; il est injectif.

Nous avons déjà signalé que la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ généralise les catégories de modules sur l'algèbre d'un groupe (cas où $\mathcal{C}$ est la catégorie à un objet associé à un groupe). Cependant, de nombreux phénomènes (co)homologiques nouveaux apparaissent par rapport au cas des représentations des groupes finis. Ainsi, même lorsque k est un corps de caractéristique 0, la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ n'est généralement pas semi-simple, même si les ensembles de morphismes sont finis dans $\mathcal{C}$ (et même si les objets de $\mathcal{C}$ n'ont pour endomorphismes que des automorphismes [4]).

Ainsi, on dispose dans $\Gamma-\mathbf{mod}$ d'un monomorphisme $t^* \to (t^*)^2$, donné par $k[X\setminus *] \to k[X\setminus *]^{\otimes 2} \quad [x] \mapsto [x]\otimes[x]$. Cependant, on a $\mathrm{Hom}_{\Gamma-\mathbf{mod}}((t^*)^2, t^*) = 0$. En effet, le scindement $\Gamma^1 \simeq k \oplus t^*$ implique $\Gamma^2 \simeq k \oplus (t^*)^{\oplus 2} \oplus (t^*)^{\otimes 2}$; $\mathrm{Hom}\,(\Gamma^2, t^*) \simeq t^*([2])$ est de dimension 2, et $\mathrm{End}\,(t^*)$ est non nul, d'où notre assertion.

Terminons ce paragraphe général en introduisant des Γ-modules importants dans le travail de Pirashvili.

Si n est un entier naturel, notons par_n le Γ-module à gauche associant à un ensemble pointé E l'espace vectoriel $k[\mathcal{P}_n(E\setminus\{*\})]$, où $\mathcal{P}_n(E\setminus\{*\})$ désigne l'ensemble des parties à n éléments de $E\setminus\{*\}$. La fonctorialité s'obtient en considérant le foncteur $\mathcal{P}_{\leq n} : \Gamma \to \mathbf{Ens}$ associant à un ensemble pointé $(E,*)$ l'ensemble de ses parties à au plus n éléments et son sous-foncteur $\mathcal{P}'_n$ associant à $(E,*)$ l'ensemble des parties (à au plus n éléments) qui soit contiennent $*$, soit ont un cardinal au plus $n-1$. De fait, $par_n = k[\mathcal{P}_{\leq n}]/k[\mathcal{P}'_n]$. (Autrement dit, si $f : E \to F$ est un morphisme de Γ, $par_n(f)$ associe $[f(P)]$ à $[P]$ si $f(P)$ a exactement n éléments et ne contient pas le point de base, et 0 sinon.)

Pirashvili note θ^n le Γ-module à droite dual de par_n. On remarque que $\Lambda^n \circ t$ (où Λ^n est l'endofoncteur n-ième puissance extérieure de $\mathcal{E}_k$) et θ^n prennent toujours des valeurs de même dimension, et sont isomorphes pour $n \leq 1$ ou k de caractéristique 2, mais cela n'est pas vrai dans les autres cas.

Ces foncteurs apparaissent dans la description de la variante graduée du foncteur $\mathcal{L}(k[x]/(x^2), k)$ (où un degré $d > 0$ est attribué à x) ; nous y reviendrons dans un exposé ultérieur.

[4] Cette hypothèse est destinée à écarter le cas des représentations des monoïdes (cas général d'une catégorie à un objet), où le phénomène de non-semi-simplicité advient déjà couramment. La catégorie Γ n'a pas cette propriété, mais nous verrons dans l'exposé sur Dold-Kan-Pirashvili que les catégories de Γ-modules sont équivalentes à des catégories du type $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ où $\mathcal{C}$ a des ensembles de morphismes finis *et n'a pas d'endomorphismes qui ne soient pas des automorphismes.*

2.2 Foncteurs Tor

(Outre les § 1.5 et 1.6 de [Pir00b], on pourra consulter l'efficace appendice C de [Lod98] pour ces rappels.)

À côté du produit tensoriel interne de $\mathcal{F}_\mathcal{C}$, on dispose d'un produit tensoriel au-dessus de $\mathcal{C}$ (rappelons que k est fixé et supposé commutatif) $-\underset{\mathcal{C}}{\otimes}- : \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{op}} \times \mathcal{F}_\mathcal{C} \to k$ que l'on peut définir comme suit.

Le k-module $X \underset{\mathcal{C}}{\otimes} Y$ est le quotient de $\bigoplus_{C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} X(C) \otimes Y(C)$ par le sous-module engendré par les éléments du type $X(f)(x') \otimes y - x' \otimes Y(f)(y)$ pour $C \xrightarrow{f} C'$ flèche de $\mathcal{C}$, $y \in Y(C)$ et $x' \in X(C')$.

Le bifoncteur $\underset{\mathcal{C}}{\otimes}$ est commute aux colimites en chaque variable. Il possède des propriétés de commutativité et d'associativité qu'on n'écrira pas. De plus, on a des isomorphismes naturels

$$P_C^{\mathcal{C}^{op}} \underset{\mathcal{C}}{\otimes} F \simeq F(C) \qquad \text{et} \qquad G \underset{\mathcal{C}}{\otimes} P_C^{\mathcal{C}} \simeq G(C) \;;$$

une autre manière de caractériser le produit tensoriel est l'adjonction suivante :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_k}(X \underset{\mathcal{C}}{\otimes} Y, V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_\mathcal{C}}(Y, \mathcal{H}om_k(X, V))\,,$$

où, pour $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_k$ et $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{op}}$, $\mathcal{H}om_k(X, V)$ désigne l'objet de $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ donné par $C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_k}(X(C), V)$.

Pour des raisons standard d'algèbre homologique, dériver à gauche le bifoncteur $\underset{\mathcal{C}}{\otimes}$ relativement à l'une ou l'autre des variables donne des résultats canoniquement isomorphes, notés $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{C}}$. (En effet, le produit tensoriel sur $\mathcal{C}$ par un foncteur projectif est un foncteur exact, et il suffit de considérer le bicomplexe produit tensoriel sur $\mathcal{C}$ de deux résolutions projectives d'objets de $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{op}}$ et $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ pour conclure — le raisonnement ne diffère en rien du cas des foncteurs Tor dans des catégories de modules.)

Comme d'habitude, les foncteurs Tor s'insèrent dans moult suites spectrales. Pirashvili a besoin du résultat général suivant pour sa "décomposition de Hodge" en termes de Γ-modules.

Théorème 2.5 (Proposition 1.6 de [Pir00b]). *Soient F un objet de $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ et C_* un complexe de chaînes $\mathbb{N}$-gradué d'objets projectifs de $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{op}}$.*

1. *Il existe une suite spectrale du premier quadrant d'aboutissement $H_*(C_* \underset{\mathcal{C}}{\otimes} F)$ dont le terme E^2 est donné par*

$$E^2_{i,j} = \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{C}}(H_j(C_*), F).$$

2. *Supposons que l'on a*

$$\mathrm{Ext}^{m-n+1}_{\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{op}}}(H_n(C_*), H_m(C_*)) = 0 \quad \textit{pour } n < m. \tag{1}$$

Alors la suite spectrale s'effondre au terme E^2 ; de plus il existe une décomposition

$$H_n(C_* \underset{\mathcal{C}}{\otimes} F) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{C}}(H_j(C_*), F) \tag{2}$$

naturelle en F.

3. Supposons que la condition (1) *est vérifiée et que*

$$\mathrm{Ext}^{m-n}_{\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{op}}}(H_n(C_*), H_m(C_*)) = 0 \quad \textit{pour } n < m.$$

Alors l'isomorphisme (2) *est* $\mathrm{End}\,(C_*)$*-linéaire.*

Pour la démonstration, nous renvoyons à l'article de Pirashvili. Notons simplement que le premier point est une suite spectrale de complexe double usuelle ; les autres s'établissent en utilisant la théorie de l'obstruction pour les complexes de chaînes introduite par Dold dans [Dol60].

3 Aperçu du contenu de l'article [Pir00b]

La première section de l'article est constituée des résultats algébriques sur les Γ-modules. Outre les rappels qu'on a présentés ci-avant, Pirashvili introduit les Ω-modules (objets d'une catégorie de foncteurs analogue définie à partir de surjections ensemblistes) et exhibe une équivalence de catégories avec les Γ-modules, dont il indique l'analogie avec le théorème de Dold-Kan (§ 1.9 et 1.10). Ensuite, il introduit la notion de Γ-module *polynomial* et donne des exemples (§ 1.11 et 1.12). Il procède en transitant par les Ω-modules, qui rendent particulièrement claire la notion, mais on peut aborder la notion directement, comme le fait Pirashvili dans d'autres articles (voir aussi le § 2.3 de [Pir00a]). Les derniers résultats de la section 1 sont des calculs (co)homologiques (essentiellement, des cas d'annulation lorsque k est un corps de caractéristique nulle) sur les Γ-modules (1.14 et 1.15), établis à partir de l'examen d'un complexe explicite analogue au complexe de Koszul.

La section 2 s'attache à l'étude des groupes $\pi_*(F(\mathbb{S}^n))$ et $\pi_*^{st}(F)$, où F est un Γ-module à gauche. Pirashvili observe qu'on peut les interpréter en terme d'algèbre homologique dans la catégorie $\Gamma - \mathbf{mod}$ — par exemple, on a un isomorphisme naturel $\mathrm{Tor}_*^{\Gamma}(t, F) \simeq \pi_*^{st}(F)$. Les groupes $\pi_*(F(\mathbb{S}^n))$ sont l'aboutissement de suites spectrales mettant en œuvre des groupes de torsion sur Γ ; dans le cas où k est un corps de caractéristique nulle, les résultats de la section 1 permettent en fait d'exprimer $\pi_*(F(\mathbb{S}^n))$ comme somme directe de Tor^{Γ} explicites (cf. corollaire 2.5). Dans le cas $n = 1$, ces résultats englobent la décomposition de Hodge de l'homologie de Hochschild (cf. [Lod98], § 4.5, pour une présentation classique) : en effet, le complexe de Moore du groupe abélien simplicial $\mathcal{L}(A, M)(\mathbb{S}^1)$, où A est une k-algèbre et M un A-module, s'identifie au complexe de Hochschild (cf. théorème 2.7). Pirashvili termine la section 2 en donnant quelques autres interprétations homologiques de groupes d'homotopie construits à partir de Γ-modules.

Dans la section 3, Pirashvili montre comment retrouver par des méthodes analogues la décomposition de Hodge pour l'homologie *cyclique*. Cela nécessite d'utiliser d'autres catégories de foncteurs analogues à $\Gamma - \mathbf{mod}$.

Rappelons que le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg (cf. [Lod98], § 3.4) donne un isomorphisme entre l'homologie de Hochschild et l'algèbre des formes différentielles sur une k-algèbre *lisse*. Dans la section 4 de [Pir00b], Pirashvili une notion de lissité pour les Γ-modules et démontre un théorème analogue, qui généralise partiellement le théorème classique de Hochschild-Kostant-Rosenberg.

Dans la dernière section de son article, Pirashvili introduit les groupes d'homologie de Hochschild "supérieurs" d'une k-algèbre A comme $\mathcal{L}(A, M)(\mathbb{S}^d)$, avec

$d \geq 1$. Il explique comment ils interviennent pour calculer la cohomologie d'un espace fonctionnel (au sens topologique ou simplicial) $\mathbf{Hom}(\mathbb{S}^d, X)$.

Références

[Con83] A. Connes – « Cohomologie cyclique et foncteurs Ext^n », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **296** (1983), no. 23, p. 953–958.

[Dol60] A. Dold – « Zur Homotopietheorie der Kettenkomplexe », *Math. Ann.* **140** (1960), p. 278–298.

[Lod89] J.-L. Loday – « Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives », *Invent. Math.* **96** (1989), no. 1, p. 205–230.

[Lod98] — , *Cyclic homology*, second éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 301, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Appendix E by María O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili.

[Lyd99] M. Lydakis – « Smash products and Γ-spaces », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **126** (1999), no. 2, p. 311–328.

[Pir00a] T. Pirashvili – « Dold-Kan type theorem for Γ-groups », *Math. Ann.* **318** (2000), no. 2, p. 277–298.

[Pir00b] — , « Hodge decomposition for higher order Hochschild homology », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **33** (2000), no. 2, p. 151–179.

[Pir00c] — , « Topological hochschild homology : approach via Γ-spaces », disponible sur http ://www.math.univ-paris13.fr/prepub/pp2000/pp2000-06.ps.gz, 2000.

[Pir03] — , « André-Quillen homology via functor homology », *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), no. 6, p. 1687–1694 (electronic).

[PR02] T. Pirashvili & B. Richter – « Hochschild and cyclic homology via functor homology », *K-Theory* **25** (2002), no. 1, p. 39–49.

[Sch99] S. Schwede – « Stable homotopical algebra and Γ-spaces », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **126** (1999), no. 2, p. 329–356.

[Seg74] G. Segal – « Categories and cohomology theories », *Topology* **13** (1974), p. 293–312.