# Homologie cyclique et $K$-théorie algébrique des extensions de carré nul, d'après Goowillie et Scorichenko (groupe de travail de topologie du Laboratoire Paul Painlevé)

Aurélien DJAMENT

Mars 2020

**Résumé**

On se propose de présenter (en laissant quelques détails calculaloires en exercice) la dernière partie de la démonstration du résultat principal de Goodwillie [Goo86], présenté dans la section IV de l'article, qui consiste à le démontrer pour un épimorphisme scindé d'anneaux (*non simpliciaux*) dont le noyau est de carré nul et libre comme bimodule. Pour une partie de la démonstration, on utilise une alternative à l'approche de Goodwillie (qui repose pour sa part sur des arguments d'algèbres de Lie) utilisant les résultats de Scorichenko [Sco00] sur la comparaison entre homologie des groupes linéaires à coefficients polynomiaux et homologie des foncteurs.

**Préambule :** *pour l'avenir de la recherche et de ses personnels, votre serviteur est en lutte contre les projets de lois inégalitaires du gouvernement sur le sujet (LPPR) et sa contre-réforme des retraites. Une science sûre et innovante ne peut se développer correctement à terme qu'avec des postes permanents et des crédits récurrents suffisants, à l'inverse de la politique gouvernementale de précarité, d'appels à projets et d'individualisation généralisée.*

## Table des matières

# 1 Les protagonistes de cet exposé

Soient **Ann** la catégorie des anneaux ; pour $A$ un anneau on note $A$-**Mod** la catégorie des $A$-modules à gauche et $\mathcal{B}(A)$ la catégorie $(A \otimes A^{op})$-**Mod** des $(A, A)$-bimodules. On note $A \ltimes - : \mathcal{B}(A) \to \mathbf{Ann}$ le foncteur décrivant les extensions scindées de carré nul. Ainsi, pour un $A$-bimodule $M$, $A \ltimes M$ a pour groupe abélien sous-jacent $A \oplus M$, avec la loi multiplicative $(a, m).(b, n) = (ab, an + mb)$.

Soient $r \in \mathbb{N}$ et $B_1, \dots, B_r \in \mathcal{B}(A)$. Le produit tensoriel extérieur $B_1 \boxtimes \cdots \boxtimes B_r$ est l'objet de $\mathcal{B}(A^{\otimes r})$ dont le groupe abélien sous-jacent est $B_1 \otimes \cdots \otimes B_r$, l'action à gauche (resp. à droite) de $A^{\otimes r}$ étant donnée par $(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r).(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) = (a_1.x_1) \otimes \cdots \otimes (a_r.x_r)$ (resp. $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r).(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) = (x_1.a_1) \otimes \cdots \otimes (x_r.a_r)$). On peut aussi considérer, si $\sigma \in \Sigma_r$ est une permutation, le bimodule $(B_1 \boxtimes \cdots \boxtimes B_r).\sigma$ ayant la même action à gauche mais dans l'action à droite est tordue par $\sigma$ : $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r).(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) = (x_1.a_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes (x_r.a_{\sigma(r)})$ (que Goodwillie note $D(\sigma; B_1, \dots, B_r)$). Suivant Goodwillie [Goo86, § IV.1], nous noterons $W_*(\sigma; B_1, \dots, B_r)$ l'homologie de Hochschild rationalisée de l'anneau $A^{\otimes r}$ à coefficients dans le bimodule $(B_1 \boxtimes \cdots \boxtimes B_r).\sigma$ et utiliserons deux structures supplémentaires sur ces objets :

**Produits externes.** pour $B_1, \dots, B_r$ et $C_1, \dots, C_s$ dans $\mathcal{B}(A)$, $\sigma \in \Sigma_r$ et $\tau \in \Sigma_s$, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\big((B_1 \boxtimes \cdots \boxtimes B_r).\sigma\big) \boxtimes \big((C_1 \boxtimes \cdots \boxtimes C_s).\tau\big) \simeq (B_1 \boxtimes \cdots \boxtimes B_r \boxtimes C_1 \boxtimes \cdots \boxtimes C_s).(\sigma \sqcup \tau)$$

où $\sigma \sqcup \tau$ est l'image de $(\sigma, \tau)$ par le monomorphisme de groupes usuel $\Sigma_r \times \Sigma_s \to \Sigma_{r+s}$. On en tire un isomorphisme naturel gradué de type Künneth (tout est sur $\mathbb{Q}$)

$$W_*(\sigma; B_1 \dots, B_r) \otimes W_*(\tau; C_1 \dots, C_s) \xrightarrow{\simeq} W_*(\sigma \sqcup \tau; B_1 \dots, B_r, C_1 \dots, C_s) \tag{1}$$

qu'on peut décrire concrètement à l'aide de produits externes.

**Action du centralisateur.** Toute permutation $\rho \in \Sigma_r$ induit un isomorphisme naturel $W_*(\sigma; B_1, \dots, B_r) \simeq W_*(\rho^{-1}\sigma\rho; B_{\rho(1)}, \dots, B_{\rho(r)})$ par permutation des facteurs du produit tensoriel. En particulier, on obtient ainsi une action naturelle du centralisateur $C(\sigma)$ de $\sigma$ sur $W_*(\sigma; B)$ (où l'on note comme Goodwillie $W_*(\sigma; B)$ pour $W_*(\sigma; B, \dots, B)$). Les coïnvariants de $W_*(\sigma; B)$ sous cette action de $C(\sigma)$ *tordue par la signature* sont notés $\bar{W}_*(\sigma; B)$.

# 2 Homologie cyclique des extensions scindées de carré nul

Soient $A$ un anneau, $M$ un $A$-bimodule.

Le complexe de Hochschild $C_*(A \ltimes M)$ se scinde naturellement (c'est même vrai sur $\mathbb{Z}$) par le degré polynomial en $M$ ; explicitement, en développant les produits tensoriels $(A \oplus M)^{\otimes i}$, où obtient

$$C_*(A \ltimes M) \simeq \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} C_*^{(r)}(A; M) \quad \text{où}$$

$$C_n^{(r)}(A;M)=\bigoplus_{i_0+\cdots+i_r+r=n+1} A^{\otimes i_0}\otimes M\otimes A^{\otimes i_1}\otimes M\otimes A^{\otimes i_2}\otimes\cdots\otimes M\otimes A^{\otimes i_r}.$$

On dispose d'un isomorphisme naturel $HH_n(A\ltimes M\twoheadrightarrow A)\simeq\bigoplus_{r>0}H_{n-1}\big(C_*^{(r)}(A;M)\big)$ car l'existence d'un scindement à $A\ltimes M\twoheadrightarrow A$ montre que la suite exacte longue en homologie de Hochschild associée à ce morphisme d'anneaux se réduit à des suites exactes courtes scindées $0\to HH_n(A\ltimes M\twoheadrightarrow A)\to HH_{n-1}(A\ltimes M)\to HH_{n-1}(A)\to 0$.

Tout ce qui précède vaut encore, si l'on suppose que $A$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre (ou en rationalisant les homologies), pour l'homologie cyclique, en prenant les coïnvariants sous l'action des groupes cycliques appropriée en chaque degré homologique du complexe de Hochschild :

$$CC_*(A\ltimes M)\simeq\bigoplus_{r\in\mathbb{N}}CC_*^{(r)}(A;M)\quad\text{où}$$

$CC_n^{(r)}(A;M)=C_n^{(r)}(A;M)_{\mathbb{Z}/(n+1)}$, et

$$HC_n(A\ltimes M\twoheadrightarrow A)\simeq\bigoplus_{r>0}H_{n-1}\big(CC_*^{(r)}(A;M)\big)\ ;\tag{2}$$

on constate que, pour $r>0$, la composée

$$\bigoplus_{i_1+\cdots+i_r+r=n+1}M\otimes A^{\otimes i_1}\otimes M\otimes A^{\otimes i_2}\otimes\cdots\otimes M\otimes A^{\otimes i_r}\hookrightarrow C_n^{(r)}(A;M)\twoheadrightarrow CC_n^{(r)}(A;M)$$

est *surjective* (utiliser l'action de $\mathbb{Z}/(n+1)$ pour faire en sorte que le premier facteur apparaissant dans le tenseur soit $M$). Mieux, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$CC_n^{(r)}(A;M)\simeq\left(\bigoplus_{i_1+\cdots+i_r+r=n+1}M\otimes A^{\otimes i_1}\otimes M\otimes A^{\otimes i_2}\otimes\cdots\otimes M\otimes A^{\otimes i_r}\right)_{\mathbb{Z}/r}$$

où le groupe cyclique $\mathbb{Z}/r$ opère de la façon suivante (à un signe près qu'on n'explicite pas ici ; tous les détails sont donnés par Goodwillie dans [Goo86, § IV.2]) : son générateur canonique envoie le facteur étiqueté par $(i_1,\dots,i_r)$ sur celui indexé par $(i_2,\dots,i_r,i_1)$ en décalant de façon cyclique les blocs de tenseurs $(M\otimes A^{\otimes i_1})\otimes(M\otimes A^{\otimes i_2})\otimes\cdots\otimes(M\otimes A^{\otimes i_r})$.

Pour identifier l'homologie du complexe $CC_*^{(r)}(A;M)$, on utilise un argument multi-simplicial : il existe un groupe abélien $r$-simplicial $\mathrm{Hoch}^{(r)}(A;M)$ dont le groupe des $(i_1,\dots,i_r)$-multisimplexes est $(M\otimes A^{\otimes i_1})\otimes(M\otimes A^{\otimes i_2})\otimes\cdots\otimes(M\otimes A^{\otimes i_r})$ et tel que :

- le groupe abélien simplicial $\mathrm{Diag}(\mathrm{Hoch}^{(r)}(A;M))$ (obtenu en composant avec le foncteur de diagonale itée $\boldsymbol{\Delta}\to\boldsymbol{\Delta}^r$) est exactement le groupe abélien standard dont le complexe de Moore calcule l'homologie de Hochschild de $A^{\otimes r}$ à coefficients dans le bimodule $D(c_r;M)$, où $c_r\in\Sigma_r$ désigne la permutation circulaire $(1\ 2\ \cdots\ r)$ ;
- $CC_n^{(r)}(A;M)\simeq\mathrm{Tot}_{n+1-r}\big(\mathrm{Hoch}^{(r)}(A;M)\big)_{\mathbb{Z}/r}$, et cet isomorphisme est compatible aux différentielles (en prenant à droite la différentielle induite par celle du complexe de Moore du groupe abélien simplicial $\mathrm{Tot}\big(\mathrm{Hoch}^{(r)}(A;M)\big)$).

(Il est un peu pénible, mais pas difficile, d'écrire les formules explicites pour les multi-faces et multi-dégénérescences de $\mathrm{Hoch}^{(r)}(A;M)$ ; on renvoie à Goodwillie [Goo86, § IV.2] pour cela.)

Par conséquent, l'isomorphisme naturel (2) fournit :

**Proposition 1** (Goodwillie)**.** *Il existe (rationnellement) un isomorphisme naturel en l'anneau $A$ et le $A$-bimodule $M$*

$$HC_n(A \ltimes M \twoheadrightarrow A) \simeq \bigoplus_{r>0} \bar{W}_{n-r}(c_r; M).$$

*En particulier, si $M$ est un bimodule libre, $HC_n(A \ltimes M \twoheadrightarrow A) \simeq \bar{W}_0(c_n; M)$ pour $n > 0$ (et $0$ pour $n = 0$).*

De plus, on peut décrire explicitement de manière très simple (voir la fin de [Goo86, § IV.2]) le dernier isomorphisme, ce qui sera important à la fin de la démonstration du résultat principal de [Goo86] (il faut être capable de montrer que les isomorphismes construits dans le cas particulier auquel le début de l'article se réduit coïncident avec les morphismes naturels issus de la trace de Dennis relevée à l'homologie cyclique négative).

# 3 $K$-théorie algébrique des extensions scindées de carré nul

$A$ désignant toujours un anneau (pas forcément une $\mathbb{Q}$-algèbre !), note $\mathbf{P}(A)$ (un squelette de) la sous-catégorie pleine de $A$-**Mod** des $A$-modules à gauche libres (ou projectifs) de type fini. On note $\mathcal{F}(A)$ la catégorie des foncteurs de $\mathbf{P}(A)$ vers les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, les morphismes étant les transformations naturelles. C'est une catégorie abélienne où les suites exactes se testent au but (i.e. en évaluant sur chaque objet), qui se comporte très bien pour l'algèbre homologique (assez d'injectifs et de projectifs). Pour un bifoncteur $B$ sur $\mathbf{P}(A)$, c'est-à-dire un foncteur $\mathbf{P}(A)^{op} \times \mathbf{P}(A) \to \mathbb{Q}\text{-}\mathbf{Mod}$ (noter qu'on dispose d'une équivalence canonique $\mathbf{P}(A)^{op} \times \mathbf{P}(A) \simeq \mathbf{P}(A^{op} \times A)$), on peut définir l'homologie de Hochschild de la catégorie $\mathbf{P}(A)$ à coefficients dans $B$, notée $HH_*(\mathbf{P}(A); B)$ : en degré 0, c'est la *cofin* de $B$, et en degré supérieur cela s'obtient en dérivant à gauche le foncteur exact à droite de cofin. Il y a un complexe de Hochschild explicite (analogue « à plusieurs objets » du complexe de Hochschild usuel) qui calcule explicitement cela. Si $M$ est $(A, A)$-bimodule rationel (i.e. qui est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel), on dispose d'un bifoncteur $B_M$ biadditif donné par $(U, V) \mapsto U^* \underset{A}{\otimes} M \underset{A}{\otimes} V$, où l'étoile indique la dualité naïve des $A$-modules (si $U$ est un $A$-module à gauche, $U^*$ est le $A$-module à droite $\mathrm{Hom}_A(U, A)$). Dans ce cas, l'homologie de Hochschild $HH_*(\mathbf{P}(A); B_M)$ est naturellement isomorphe à l'homologie de Hochschild usuelle $HH_*(A; M)$ (parce qu'on travaille *rationnellement* : contrairement aux définitions précédentes qui fonctionnent de la même façon sur $\mathbb{Z}$, travailler sur $\mathbb{Q}$ est crucial pour cette identification ; en général on a juste un morphisme naturel $HH_*(\mathbf{P}(A); B_M) \to HH_*(A; M)$ qui est iso pour $* < 2$ — peut-être même $* = 2$). Pour une introduction, succincte mais plus détaillée que ces quelques lignes, à ce sujet, on pourra consulter la fin de l'appendice C et le début du chapitre 13 du livre de Loday [Lod98].

Le théorème suivant, établi dans [Sco00], est pour sa part vrai aussi sur $\mathbb{Z}$, au changement mineur près dû au terme en $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$ supplémentaire dans la formule de Künneth.

**Théorème 2** (Scorichenko). *Soit $B : \mathbf{P}(A)^{op} \times \mathbf{P}(A) \to \mathbb{Q}$-$\mathbf{Mod}$ un bifoncteur* **polynomial**. *Il existe un isomorphisme naturel de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels gradués*

$$H_*(GL_\infty(A); \mathbb{Q}) \otimes HH_*(\mathbf{P}(A); B) \xrightarrow{\simeq} H_*(GL_\infty(A); B(A^\infty, A^\infty)).$$

Ce résultat va nous permettre d'éviter les arguments de comparaison d'homologie rationnelle de groupes et d'algèbres de Lie nilpotents, utilisés par Goodwillie, qui sont assez longs (mais présentent un intérêt intrinsèque) et utilisent une variante pour les algèbres de Lie de matrices de la construction de Volodin.

Quelques précisions sur l'énoncé précédent :

— la seule chose dont on a besoin ici sur les foncteurs polynomiaux est de savoir qu'un foncteur additif est polynomial et que la classe des foncteurs polynomiaux est stable par sommes directes finies, sous-quotients, extensions et produits tensoriels. La notion de foncteur polynomial dans ce contexte est ancienne, elle remonte à Eilenberg-MacLane [EML54].

— $B(A^\infty, A^\infty)$ désigne la colimite sur $n \in \mathbb{N}$ des $B(A^n, A^n)$, munis de l'action diagonale de $GL_n(A)$, qui induit par stabilisation une action natuelle de la colimite $GL_\infty(A)$ des $GL_n(A)$ (on peut aussi prendre la colimite *après* l'homologie, puisqu'homologie de groupes et colimites filtrantes commutent).

— L'isomorphisme du théorème est explicite, et permet notamment de comprendre la compatibilité aux structures (co)multiplicatives qui arrivent naturellement. Commençons par la structure *co*multiplicative, la plus simple : si $B'$ est un autre bifoncteur, on dispose d'un produit externe

$$HH_*(\mathbf{P}(A); B \otimes B') \to HH_*(\mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(A); B \boxtimes B') \simeq HH_*(\mathbf{P}(A); B) \otimes HH_*(\mathbf{P}(A); B')$$

où la première flèche est induite par le foncteur diagonale $\mathbf{P}(A) \to \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(A)$ et la seconde est un isomorphisme de Künneth.

Le coproduit externe en homologie des groupes

$$H_*(GL_\infty(A); (B \otimes B')(A^\infty, A^\infty)) \to H_*(GL_\infty(A); B(A^\infty, A^\infty)) \otimes H_*(GL_\infty(A); B'(A^\infty, A^\infty))$$

(qui est défini de manière entièrement similaire au précédent) est décrit, via le théorème de Scorichenko, comme produit tensoriel du coproduit (interne) sur $H_*(GL_\infty(A); \mathbb{Q})$ et du coproduit externe en homologie de Hochschild des petites catégories.

Pour la structure multiplicative, on procède de même, en utilisant le foncteur de somme directe $\mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(A) \to \mathbf{P}(A)$.

Considérons maintenant l'homologie rationnelle de $GL_\infty(A \ltimes M)$, où $M$ est un $A$-bimodule. La suite exacte (scindée) de groupes

$$1 \to \mathcal{M}_\infty(M) \to GL_\infty(A \ltimes M) \to GL_\infty(A) \to 1$$

(où $\mathcal{M}_\infty(M)$ désigne le groupe **additif** des matrices infinies presque nulles à coefficients dans $M$) donne lieu à une suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E^2_{p,q}(M) = H_p(GL_\infty(A); H_q(\mathcal{M}_\infty(M); \mathbb{Q})) \Rightarrow H_{p+q}(GL_\infty(A \ltimes M); \mathbb{Q}) \quad (3)$$

naturelle en $M \in \mathcal{B}(A)$. Comme $\mathcal{M}_\infty(M)$ est un groupe abélien, on dispose d'un isomorphisme naturel $H_q(\mathcal{M}_\infty(M);\mathbb{Q})) \simeq \Lambda^q(\mathcal{M}_\infty(M)\otimes\mathbb{Q})$, où $\Lambda^q$ désigne la $q$-ème puissance extérieure. De plus, comme représentation de $GL_\infty(A)$, $H_q(\mathcal{M}_\infty(M);\mathbb{Q})$ est isomorphe à $\Lambda^q(B_M)(A^\infty, A^\infty)$, avec les notations précédentes. Comme $M \mapsto B_M$ définit un foncteur additif $\mathcal{B}(A) \to \mathcal{F}(A)$, on voit que $E_{p,q} : \mathcal{B}(A) \to \mathbb{Q}\text{-}\mathbf{Mod}$ est un foncteur polynomial homogène de degré $q$. Utilisant le scindement naturel par le degré des foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}(A)$ (valable car nous travaillons sur $\mathbb{Q}$ ; le lecteur qui n'est pas familier avec les foncteurs peut noter qu'un argument de centre suffit : considérer le poids avec lequel les scalaires de $\mathbb{Q}^*$ opèrent sur un foncteur polynomial permet d'obtenir le scindement souhaité), puis le théorème de Scorichenko, on en déduit un isomorphisme

$$H_n(GL_\infty(A\ltimes M);\mathbb{Q}) \simeq \bigoplus_{i+j+q=n} H_i(GL_\infty(A);\mathbb{Q})\otimes HH_j(\mathbf{P}(A);\Lambda^q(B_M)) \quad (4)$$

naturel en $M$. De plus, cet isomorphisme décrit la structure d'algèbre de Hopf graduée de $H_*(GL_\infty(A\ltimes M);\mathbb{Q})$ comme produit tensoriel de celle de $H_*(GL_\infty(A);\mathbb{Q})$ et de celle de $HH_*(\mathbf{P}(A);\Lambda^*(B_M))$, qui est induite par les (co)produits externes en homologie de Hochschild des petites catégories et la structure d'algèbre de Hopf graduée sur l'algèbre extérieure. Cela découle de la compatibilité de la suite spectrale de Serre et de l'isomorphisme de Scorichenko aux structures (co)multiplicatives.

Pour les mêmes raisons formelles qu'en homologie de Hochschild ou cyclique, on a des suites exactes courtes scindées $0 \to K_n(A\ltimes M \twoheadrightarrow A) \to K_{n-1}(A\ltimes M) \to K_{n-1}(A) \to 0$, de sorte que, en combinant ce qui précède et l'identification de l'homotopie rationnelle d'un $H$-espace connexe (en l'occurrence, $BGL_\infty(A)^+$ et $BGL_\infty(A\ltimes M)^+$) à la partie primitive de son homologie, on obtient :

**Proposition 3.** *La $K$-théorie algébrique relative de degré $n$ $K_n(A\ltimes M \twoheadrightarrow A)$ est isomorphe, naturellement en $M \in \mathcal{B}(M)$, à la partie primitive de l'algèbre de Hopf graduée $HH_*(\mathbf{P}(A);\Lambda^*(B_M))$ en degré $n-1$.*

Pour déterminer $HH_*(\mathbf{P}(A);\Lambda^*(B_M))$, on commence par remplacer les puissances extérieures par des puissances tensorielles.

**Proposition 4.** *Il existe un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels gradués*

$$HH_*(\mathbf{P}(A);B_{M_1}\otimes\cdots\otimes B_{M_d}) \simeq \bigoplus_{\sigma\in\Sigma_d} W_*(\sigma;M_1,\dots,M_d)$$

*naturel en les bimodules $M_1,\dots,M_d$. De plus, l'action canonique du groupe symétrique sur*

$$HH_*(\mathbf{P}(A);B_M^{\otimes d}) \simeq \bigoplus_{\sigma\in\Sigma_d} W_*(\sigma;M)$$

*correspond à droite à la conjugaison sur les permutations $\sigma$ indexant la somme, et l'action du centralisateur $C(\sigma)$ sur le facteur d'indice $\sigma$ est l'action canonique.*

*Démonstration.* Il s'agit d'un argument classique d'adjonction somme/diagonale. □

**Corollaire 5.** *Il existe un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels gradués*

$$HH_*(\mathbf{P}(A);\Lambda^d(B_M)) \simeq \bigoplus_{\bar{\sigma}\in \mathrm{Conj}(\Sigma_d)} \bar{W}_*(\sigma;M)$$

*naturel en le bimodule $M$, où $\mathrm{Conj}(\Sigma_d)$ désigne l'ensemble des classes de conjugaison du groupe $\Sigma_d$ et $\bar{\sigma}$ l'image dans $\mathrm{Conj}(\Sigma_d)$ de $\sigma \in \Sigma_d$.*

Il nous reste à comprendre la comultiplication de l'algèbre de Hopf graduée $HH_*(\mathbf{P}(A);\Lambda^*(B_M))$, afin d'en comprendre la partie primitive (ce que fait Goodwillie) ou, la multiplication, afin d'en comprendre les indécomposables, ce qui est analogue, mais encore plus facile. En effet, via l'isomorphisme de la proposition et du corollaire précédents, le produit $HH_*(\mathbf{P}(A);B_M^{\otimes i}) \otimes HH_*(\mathbf{P}(A);B_M^{\otimes j}) \to HH_*(\mathbf{P}(A);B_M^{\otimes i+j})$ correspond à la réunion disjointe des permutations sur les ensembles d'indexation des sommes directes des membres de droite de l'isomorphisme, et aux isomorphismes naturels $W_*(\alpha;M)\otimes W_*(\beta;M) \xrightarrow{\simeq} W_*(\alpha\sqcup\beta;M)$ sur le facteur correspondant à $\alpha \in \Sigma_i$ et $\beta \in \Sigma_j$ ; par passage au quotient, le produit sur $HH_*(\mathbf{P}(A);\Lambda^*(B_M))$ est induit par la réunion disjointe des classes de conjugaison de permutations et les surjections canoniques $\bar{W}_*(\alpha;M)\otimes \bar{W}_*(\beta;M) \xrightarrow{\simeq} \bar{W}_*(\alpha\sqcup\beta;M)$ induites par les isomorphismes précédents. Il s'ensuit que la partie indécomposable de

$$HH_*(\mathbf{P}(A);\Lambda^d(B_M)) \simeq \bigoplus_{\bar{\sigma}\in \mathrm{Conj}(\Sigma_d)} \bar{W}_*(\sigma;M)$$

s'identifie aux facteurs indexés par les $\bar{\sigma}$, où $\sigma$ parcourt les permutations qui ne peuvent pas s'écrire comme réunion disjointe de permutations non triviales. Mais il n'y a qu'une seule telle permutation dans $\Sigma_r$ (pour $r > 0$ — il n'y en a aucune dans $\Sigma_0$), à conjugaison près, circulaire, d'où :

**Proposition 6** (Goodwillie)**.** *Il existe un isomorphisme naturel en l'anneau $A$ et le $A$-bimodule $M$*

$$K_{n+1}(A\ltimes M \twoheadrightarrow A)\otimes\mathbb{Q} \simeq \bigoplus_{r>0} \bar{W}_{n-r}(c_r;M).$$

*En particulier, si $M$ est un bimodule libre, $K_{n+1}(A\ltimes M \twoheadrightarrow A) \simeq \bar{W}_0(c_n;M)$ pour $n > 0$ (et $0$ pour $n = 0$).*

# 4 Le théorème de Goodwillie

Pour conclure, compte-tenu des réductions présentées dans les exposés antérieurs du groupe de travail, il suffit de montrer que la partie supérieure du diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \bar{W}_0(c_n;M) \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dr, "\simeq"] & \\
K_{n+1}(A\ltimes M \twoheadrightarrow A)\otimes\mathbb{Q} \arrow[r, "\alpha\otimes\mathbb{Q}"] \arrow[dr, "\tau\otimes\mathbb{Q}"'] & HC^-_{n+1}(A\ltimes M \twoheadrightarrow A)\otimes\mathbb{Q} \arrow[d, "\pi\otimes\mathbb{Q}"] & HC_n(A\ltimes M \twoheadrightarrow A)\otimes\mathbb{Q} \arrow[l, "\beta\otimes\mathbb{Q}"', "\simeq"] \arrow[dl, "B\otimes\mathbb{Q}"] \\
 & HH_{n+1}(A\ltimes M \twoheadrightarrow A)\otimes\mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

commute, où $A$ est un anneau et $M$ un $(A, A)$-bimodule libre et :

— les isomorphismes supérieurs sont ceux donnés par les propositions 1 et 6 ;
— $\tau$ est la trace de Dennis et $\alpha$ son relèvement à l'homologie cyclique négative ;
— $\beta$ est le morphisme de liaison de la suite exacte longue reliant les homologies cyclique, cylique négative et cyclique périodique (Goodwillie [Goo86, lemme I.3.3] montre, en s'appuyant sur son travail [Goo85], que $\beta \otimes \mathbb{Q}$ est un isomorphisme dans le contexte nilpotent relatif considéré) ;
— $B$ est le bord de Connes.

La partie inférieure du diagramme commute (par définition), et Goodwillie montre que $\tau \otimes \mathbb{Q}$ est *injective* (ce qui est équivalent à dire que $B \otimes \mathbb{Q}$ est injective, ce que Goodwillie déduit rapidement d'un résultat assez facile de [Goo85]). Il suffit donc de montrer que le quadrilatère externe du diagramme commute, ce que Goodwillie fait de façon directe, à l'aide de descriptions explicites. Pour la partie droite du diagramme, on a une description explicite du morphisme ; c'est également le cas pour la partie gauche, car la trace de Dennis se factorise par le morphisme de Hurewitz $K_* \otimes \mathbb{Q} \to H_*(BGL; \mathbb{Q})$, et les isomorphismes en homologie de la section précédente sont explicites.

## Références


[EML54] S. Eilenberg & S. Mac Lane – « On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation », *Ann. of Math. (2)* **60** (1954), p. 49–139.

[Goo85] T. G. Goodwillie – « Cyclic homology, derivations, and the free loopspace », *Topology* **24** (1985), no. 2, p. 187–215.

[Goo86] — , « Relative algebraic $K$-theory and cyclic homology », *Ann. of Math. (2)* **124** (1986), no. 2, p. 347–402.

[Lod98] J.-L. Loday – *Cyclic homology*, second éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 301, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Appendix E by María O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili.

[Sco00] A. Scorichenko – « Stable K-theory and functor homology over a ring », Thèse, Evanston, 2000.