La conjecture artinienne, d'après A. Putman, S. Sam et A. Snowden

Aurélien DJAMENT

20 mai 2014 (version légèrement révisée d'août 2014))

Résumé

Le but de cet exposé est de présenter la démonstration tout récemment donnée par Andrew Putman, Steven Sam et Andrew Snowden de la *conjecture artinienne* : si k est un corps fini, la catégorie $\mathcal{F}(k)$ des foncteurs des k-espaces vectoriels de dimension finie vers les k-espaces vectoriels est locallement noethérienne.

L'auteur remercie chaleureusement Steven Sam pour la communication privée d'une version préliminaire de son travail avec A. Putman et A. Snowden et de nombreux échanges fructueux à son sujet.

Table des matières

1 La conjecture artinienne : brefs rappels

Au début des années 1990, les travaux fondamentaux de Hans-Werner Henn, Jean Lannes et Lionel Schwartz (cf. [HLS93]) ont mis en évidence des liens profonds entre les modules instables sur l'algèbre de Steenrod et les catégories de foncteurs entre espaces vectoriels sur un corps fini, suscitant un regain d'intérêt pour ces catégories. Lannes et Schwartz ont alors proposé l'énoncé, connu depuis sous le nom de *conjecture artinienne* (en raison d'une formulation duale naturelle dans le contexte des modules instables), selon lequel la catégorie $\mathcal{F}(k)$ devrait être localement noethérienne lorsque k est un corps fini.

Précisons un peu les choses. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie (essentiellement) petite et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne (qu'on supposera en général de Grothendieck [1]),

1. On rappelle qu'une catégorie abélienne est dite de Grothendieck si elle possède des sommes directes arbitraires, un générateur et que les colimites filtrantes y sont exactes. Le lecteur qui manque d'intuition sur ces notions peut supposer qu'il s'agit d'une catégorie de modules.

la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne (l'exactitude se testant au but) ; si c est un objet de $\mathcal{C}$ et M un objet de $\mathcal{A}$, on dispose d'un isomorphisme naturel

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})(M[\mathcal{C}(c, -)], F) \simeq \mathcal{A}(M, F(c))$$

(c'est une variation sur le lemme de Yoneda). En particulier, les foncteurs $M[\mathcal{C}(c, -)]$ engendrent $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$, et ils sont de type fini lorsque M est un objet de type fini de $\mathcal{A}$. On en déduit que la conjecture artinienne équivaut à l'énoncé suivant :

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $P_n : V \mapsto k[V^n]$ de $\mathcal{F}(k)$ est noethérien.

Pour $n = 0$, cette assertion est triviale ; pour $n = 1$, elle est facile (mais déjà moins immédiate, lorsque k n'est pas un corps premier — voir par exemple la fin de [Kuh94]). Pour $n = 2$ et $k = \mathbb{F}_2$, il s'agit d'un résultat beaucoup plus difficile, établi par Geoffrey Powell dans [Pow98], qui a introduit plusieurs outils spécifiques aux catégories $\mathcal{F}(k)$ à cette fin. Le caractère nothérien de P_3, toujours dans le seul cas $k = \mathbb{F}_2$, a été établi par votre serviteur dans [Dja09] qui a raffiné pour cela les méthodes introduites par Powell. Dans tous ces cas, on montre en fait beaucoup plus que le caractère noethérien des foncteurs : on donne des renseignements sur leur structure qui impliquent en particulier la détermination de leur dimension de Krull. La conjecture artinienne a été renforcée en ce sens ; en particulier, on pense que P_n est toujours de dimension de Krull n (voir [Dja07], où l'on trouvera beaucoup plus de détails autour de cette conjecture).

Tout récemment (au printemps 2014), A. Putman, S. Sam et A. Snowden ont démontré (voir la prépublication [PS] de Putman et Sam ; elle dépend en partie du travail [SS] de Sam et Snowden, qui la recoupe sur plusieurs points) la conjecture artinienne par une méthode directe, beaucoup plus élémentaire que celles développées pour les cas particuliers susmentionnés (mais ne semblant donner aucun renseignement sur la filtration de Krull de la catégorie $\mathcal{F}(k)$). Elle consiste à transiter par plusieurs catégories de foncteurs intermédiaires (seules changent les sources : le but n'a pas tellement d'importance ; on peut d'ailleurs en première lecture se restreindre au cas où il s'agit d'une catégorie d'espaces vectoriels) pour se ramener à une situation combinatoire (qui fait disparaître les problèmes difficiles de théorie des représentations auxquels se heurtent les approches mentionnées plus haut dès que la taille des foncteurs croît).

Avant d'entrer dans les détails, rappelons quelques définitions. Un ensemble ordonné est dit *noethérien* si toute suite croissante d'éléments de celui-ci stationne. Un objet d'une catégorie (le plus souvent abélienne, mais pas nécessairement) est dit *noethérien* si l'ensemble [2] de ses sous-objets, ordonné par inclusion, est noethérien. Une catégorie (en général abélienne) est dite *localement noethérienne* si elle possède un ensemble de générateurs noethériens. Par exemple, si A est un anneau, la catégorie des A-modules à gauche est localement noethérienne si et seulement si A est un anneau noethérien. Un objet est dit de *type fini* si toute suite croissante de sous-objets dont la réunion [3] égale l'objet de

2. Si jamais cette classe n'est pas un ensemble (ce qui n'adviendra jamais dans les situations qu'on considère), la même définition vaut toutefois : toute suite croissante de sous-objets stationne.

3. qui se définit de manière générale comme une colimite.

départ est stationnaire. Si la catégorie ambiante possède des colimites et que les colimites filtrantes y sont exactes, un objet est noethérien si et seulement si tous ses sous-objets sont de type fini. Dans une catégorie localement noethérienne, tout objet de type fini est noethérien.

Putman, Sam et Snowden montrent en fait plus que la conjecture artinienne : le fait de travailler sur un corps n'importe pas, seule la finitude compte. Introduisons quelques notations pour nous montrer plus précis (toutes les catégories qu'on définit maintenant interviennent de façon récurrente comme catégories sources dans l'étude des catégories de foncteurs).

Si A est un anneau, on note $\mathbf{P}(A)$ la catégorie des A-modules à gauche libres de rang fini, ou plutôt son squelette constitué des A^n pour $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbf{M}(A)$ la sous-catégorie de $\mathbf{P}(A)$ ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont les monomorphismes scindables. On note $\mathbf{S}(A)$ la catégorie ayant les mêmes objets et dont les morphismes $L \to M$ sont les couples (f,g) formés d'applications A-linéaires $f : L \to M$ et $g : M \to L$ telles que $gf = \mathrm{Id}_L$.

Le travail [PS] établit la généralisation suivante de la conjecture artinienne ; le but de cet exposé est d'en présenter entièrement la démonstration.

Théorème 1.1 (Putman-Sam-Snowden)**.** *Soient A un anneau fini et $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck localement noethérienne. Alors les catégories $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A), \mathcal{A})$, $\mathbf{Fct}(\mathbf{M}(A), \mathcal{A})$ et $\mathbf{Fct}(\mathbf{S}(A), \mathcal{A})$ sont localement noethériennes.*

Nous tairons la démonstration de l'assertion relative à $\mathbf{S}(A)$, bien qu'elle soit grandement similaire : elle ne semble en effet pas pouvoir se déduire d'un énoncé purement combinatoire (i.e. provenant d'une autre catégorie de foncteurs dont la source est de nature ensembliste) ; Putman et Sam l'obtiennent en appliquant leur méthode à une catégorie qui joue pour les A-modules libres de rang fini un rôle analogue à Ω_{sh} (introduite plus loin dans ces notes) pour les ensembles finis. La démonstration que nous présenterons des deux premières assertions suit celle de [SS] (très analogue à celle de [PS], mais un peu plus simple).

2 Quelques réductions simples (changement de catégorie source)

On note, suivant Pirashvili, Γ la catégorie des ensembles finis pointés — ou plutôt son squelette constitué des $[n] := \{0, \dots, n\}$ (pointés par 0) — et Ω la catégorie des ensembles finis avec surjections — ou plutôt son squelette constitué des $\mathbf{n} := \{1, \dots, n\}$. Le théorème de Pirashvili à la Dold-Kan (voir [Pir00]) nous apprend que, pour toute catégorie abélienne $\mathcal{A}$, les catégories $\mathbf{Fct}(\Gamma, \mathcal{A})$ et $\mathbf{Fct}(\Omega, \mathcal{A})$ sont équivalentes[4].

Nous démontrerons d'abord, dans ces notes, en suivant Sam et Snowden, le résultat suivant.

Théorème 2.1 (Sam-Snowden)**.** *Si $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck localement noethérienne, la catégorie $\mathbf{Fct}(\Gamma^{op}, \mathcal{A}) \simeq \mathbf{Fct}(\Omega^{op}, \mathcal{A})$ est localement noethérienne.*

4. Bien sûr, on n'est pas obligé d'utiliser ce théorème : on peut aussi utiliser la proposition 2.4 ci-après pour passer des propriétés de finitude des Ω-modules à droite à celles des Γ-modules à droite.

Remarque 2.2. La catégorie $\mathbf{Fct}(\Gamma, \mathcal{A}) \simeq \mathbf{Fct}(\Omega, \mathcal{A})$ est localement noethérienne (resp. localement finie) si $\mathcal{A}$ l'est, de façon évidente (regarder les projectifs standard, dont seul un nombre fini de valeurs sont non nulles).

Il n'est pas très difficile non plus (quoique moins immédiat) de voir que $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathcal{A})$ est localement noethérienne lorsque $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck localement noethérienne, où Θ est la catégorie des ensembles finis avec injections. Cela est lié au fait que cette catégorie de foncteurs est engendrée par des foncteurs polynomiaux en un sens approprié (ce qui est le cas aussi pour $\mathbf{Fct}(\Gamma, \mathcal{A}) \simeq \mathbf{Fct}(\Omega, \mathcal{A})$).

Dans ce qui suit, ι^* désigne la précomposition par ι.

Proposition 2.3. *Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Si $\mathcal{A}$ est localement noethérienne et que $M[\mathcal{C}(c, -)]$ est un objet noethérien de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ pour tout objet noethérien M de $\mathcal{A}$ et tout objet c de $\mathcal{C}$, alors $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est localement noethérienne. La réciproque est vraie si $\mathcal{C}$ est une catégorie non vide.*

Proposition 2.4. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des petites catégories et $\iota : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *ι est essentiellement surjectif;*
2. *pour tout objet t de $\mathcal{C}$, il existe une suite* finie *$c_1, \dots, c_n$ d'objets de $\mathcal{C}$ et un monomorphisme de foncteurs $\mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$*

$$\iota^*\mathcal{D}(\iota(t), -) \hookrightarrow \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}(c_i, -).$$

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne telle que $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ soit localement noethérienne, alors $\mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ est également localement noethérienne.

Démonstration. Si $\mathcal{C}$ est vide, alors $\mathcal{D}$ également (puisque ι est essentiellement surjectif) et il n'y a rien à faire, on suppose donc que ce n'est pas le cas et l'on utilise la proposition 2.3. Si M est un objet noethérien de $\mathcal{A}$, alors on dispose pour tout objet x de $\mathcal{D}$ d'un monomorphisme

$$\iota^* M[\mathcal{D}(x, -)] \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M[\mathcal{C}(d_i, -)].$$

Chaque foncteur $M[\mathcal{C}(d_i, -)] : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ est noethérien par hypothèse sur $\mathcal{C}$, donc $\iota^* M[\mathcal{D}(x, -)$ est noethérien. Mais le foncteur *exact* $\iota^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{A}) \to \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est *fidèle*, puisque ι est essentiellement surjectif. Les foncteurs F tels que $\iota^*(F)$ soit noethérien sont donc noethériens (ι^* envoie une suite strictement croissante de sous-objets de F sur une suite strictement croissante de sous-objets de $\iota^*(F)$). □

Corollaire 2.5. *Soient A un anneau fini et $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck localement noethérienne. Le théorème 2.1 implique les résultats suivants :*

1. *la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A), \mathcal{A})$ est localement noethérienne;*
2. *la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathbf{M}(A), \mathcal{A})$ est localement noethérienne;*

Démonstration. Pour la première assertion, on utilise le foncteur $\iota : \Gamma^{op} \to \mathbf{P}(A)$ associant à un ensemble pointé E le A-module à gauche des fonctions $E \to A$ nulles sur le point de base. Ce foncteur est essentiellement surjectif et adjoint à droite au foncteur $\mathbf{P}(A) \to \Gamma^{op}$ composé de la dualité et de l'oubli (l'oubli associant à un A-module à droite l'ensemble sous-jacent pointé par 0 — on utilise ici la finitude de A !), ce qui permet d'appliquer la proposition 2.4.

Ce foncteur ι induit un foncteur $\gamma : \Omega^{op} \to \mathbf{M}(A)$ qui est également surjectif et vérifie :

$$\gamma^*\mathbf{M}(A)(A^n, -) \hookrightarrow \gamma^*\mathbf{P}(A)(A^n, -) \simeq \mathbf{P}(A^{op})(A[-], A^n) \simeq \bigsqcup_P \Omega(-, P)$$

où la somme est prise sur l'ensemble fini des sous-ensembles P de l'ensemble sous-jacent au A-module A^n. □

Remarque 2.6. Une autre conséquence de la proposition 2.4 est que le théorème 2.1 implique que $\mathbf{Fct}(\Psi^{op}, \mathcal{A})$ est localement noethérienne lorsque $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck localement noethérienne, où Ψ est la catégorie des ensembles finis. En effet, il suffit de voir que $\mathbf{Fct}(\Psi_0^{op}, \mathcal{A})$ est localement noethérienne si Ψ_0 est la sous-catégorie pleine des ensembles finis non vides (le foncteur $\mathbf{Fct}(\Psi^{op}, \mathcal{A}) \to \mathbf{Fct}(\Psi_0^{op}, \mathcal{A}) \times \mathcal{A}$ associant à un foncteur $F : \Psi^{op} \to \mathcal{A}$ sa restriction à Ψ_0^{op} et sa valeur sur l'ensemble vide est exact et fidèle, raisonner alors comme à la fin de la démonstration de la proposition 2.4). On utilise le foncteur d'oubli $\iota : \Gamma \to \Psi_0$ qui est essentiellement surjectif et vérifie

$$\iota^*\Psi_0(-, \mathbf{n}) \simeq \Gamma(-, [n])^n$$

(chaque facteur correspondant au choix d'un point de base dans $\mathbf{n}$).

3 La propriété noethérienne dans des catégories de foncteurs depuis une catégorie dirigée

On dit qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie EI si tous les endomorphismes de $\mathcal{C}$ sont des isomorphismes. Malheureusement, étudier les propriétés de finitude depuis une catégorie EI vers une catégorie abélienne raisonnable $\mathcal{A}$ ne s'avère guère plus simple en général que pour une catégorie source quelconque. Ainsi, la catégorie Γ^{op} est une catégorie EI, mais le théorème 2.1 est tout sauf facile à montrer directement ! Parmi les catégories EI $\mathcal{C}$, certaines se prêtent aisément à une étude des propriétés de finitude de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$. Un exemple classique est le cas où $\mathcal{C}$ est un ensemble ordonné, il n'est pas difficile de trouver des conditions suffisantes assez générales pour que $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ soit localement noethérienne si $\mathcal{A}$ l'est (on peut également trouver facilement des contre-exemples, en prenant des ensembles ordonnés n'ayant eux-mêmes pas de bonne propriété de finitude).

S. Sam s'est rendu compte qu'une notion intermédiaire entre celle de catégorie EI et de catégorie associée à un ensemble ordonnée se prête à une vérification efficace mais non triviale de noethérianité pour les foncteurs partant de cette catégorie. Il s'agit de la notion de *catégorie dirigée* (*directed category* en anglais), c'est-à-dire de catégorie $\mathcal{C}$ telle que tous les monoïdes d'endomorphismes soient réduits aux identités dans $\mathcal{C}$.

Hypothèse 3.1. Dans la suite de cette section, nous supposons que $\mathcal{C}$ est une petite catégorie dirigée. Nous supposons également, par commodité, que $\mathcal{C}$ est squelettique (deux objets isomorphes sont égaux).

Pour $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, notons $\mathcal{C}(x)$ l'ensemble

$$\mathcal{C}(x) := \bigsqcup_{t \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}} \mathcal{C}(x,t)$$

muni de la relation d'ordre $\leq_x$ (notée le plus souvent $\leq$, simplement) définie par $f \leq g$, où $f \in \mathcal{C}(x,t)$ et $g \in \mathcal{C}(x,u)$, s'il existe $\varphi \in \mathcal{C}(t,u)$ tel que $g = \varphi f$ (l'antisymétrie provient précisément de ce que $\mathcal{C}$ est une catégorie dirigée et squelettique).

Définition 3.2. Soit x un objet de $\mathcal{C}$. On appelle *renforcement admissible* (*admissible term ordering* en anglais) de $\leq_x$ toute relation d'ordre $\preceq_x$ (ou simplement $\preceq$) sur $\mathcal{C}(x)$ vérifiant les trois conditions suivantes :

1. cette relation renforce $\leq_x$, c'est-à-dire que $f \leq_x g$ implique $f \preceq_x g$;
2. $\preceq_x$ est un bon ordre (i.e. toute partie non vide de $\mathcal{C}(x)$ possède un plus petit élément) ;
3. la relation d'ordre strict $\prec_x$ (ou simplement $\prec$) associée à $\preceq_x$ est compatible à la composition à gauche : pour $f \prec_x f'$ avec $f, f' \in \mathcal{C}(x,t)$, pour tout $g \in \mathcal{C}(t,u)$, on a $gf \prec_x gf'$.

(Si un tel ordre existe pour tout objet x, les flèches de $\mathcal{C}$ sont nécessairement des monomorphismes, comme le montrent la dernière condition et le caractère total des ordres $\preceq_x$.)

Un tel renforcement admissible n'existe pas nécessairement (Sam en a donné un exemple très simple).

Supposons donné un renforcement admissible $\preceq_x$ de $\leq_x$. On va introduire la construction fondamentale de Sam. Tout d'abord, quelques notations. Si $\mathcal{T}$ est un ensemble ordonné, on note $\mathbf{Ens} \wr \mathcal{T}$ la catégorie dont les objets sont les couples $(E, (t_e)_{e \in E})$ formés d'un ensemble E et d'une famille d'éléments (t_e) de $\mathcal{T}$ indexée par E et les morphismes $(E, (t_e)) \to (E', (t'_{e'}))$ les fonctions $f : E \to E'$ telles que $t_e \leq t'_{f(e)}$ pour tout $e \in E$, $\leq$ désignant la relation d'ordre sur $\mathcal{T}$ (c'est un cas particulier de construction de Grothendieck). La composition est induite par celle de fonctions.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck (en particulier, les sommes directes arbitraires y existent et les sous-objets d'un objet donné forment un ensemble). On note $Sob(M)$ l'ensemble ordonné (par inclusion) des sous-objets de M.

Soit maintenant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ un sous-foncteur de $M[\mathcal{C}(x,-)]$. On définit un foncteur $\tilde{F} : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens} \wr Sob(M)$ comme suit. À un objet t de $\mathcal{C}$ on associe

$$\Big(\mathcal{C}(x,t), \big(pr_f(M[\preceq_x (-,f)] \cap F(t))\big)_{f \in \mathcal{C}(x,t)}\Big).$$

Ici $\preceq_x (-,f)$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{C}(x,t)$ constitué des f' tels que $f' \preceq_x f$ et $pr_f : M[\preceq_x (-,f)] \to M$ désigne la projection sur le facteur correspondant à l'élément f de $\preceq_x (-,f)$. À un morphisme $\varphi : t \to u$ de $\mathcal{C}$ on associe la postcomposition $\mathcal{C}(x,t) \to \mathcal{C}(x,u)$ par φ. Il faut vérifier l'inclusion

$$pr_f(M[\preceq_x (-,f)] \cap F(t)) \subset pr_{\varphi f}(M[\preceq_x (-,\varphi f)] \cap F(u))$$

pour tout $f \in \mathcal{C}(x,t)$; celle-ci résulte de l'hypothèse de compatibilité de $\prec_x$ à la composition (l'inclusion est induite par φ, qui envoie $\preceq_x (-,f)$ dans $\preceq_x (-,\varphi f)$; la fonction induite envoie f et seulement f sur φf).

Lemme 3.3. *Soient $F \subset G$ des sous-foncteurs de $M[\mathcal{C}(x,-)]$. On a $\tilde{F} \subset \tilde{G}$. Si de plus $\tilde{F} = \tilde{G}$, alors $F = G$.*

Démonstration. La première partie est évidente. Supposons $F \neq G$. Alors il existe $f \in \mathcal{C}(x)$ (disons $f \in \mathcal{C}(x,t)$) tel que l'inclusion

$$M[\preceq_x (-,f)] \cap F(t) \subset M[\preceq_x (-,f)] \cap G(t)$$

soit stricte (du fait que $\mathcal{A}$ est une catégorie avec colimites filtrantes exactes, $F(t)$ est la colimite sur f des $M[\preceq_x (-,f)] \cap F(t)$). Comme $\preceq_x$ est un bon ordre, il existe un plus petit f (pour cet ordre) ayant cette propriété. Comme le noyau de la restriction à $M[\preceq_x (-,f)] \cap F(t)$ de pr_f égale la colimite (filtrante) sur $f' \prec_x f$ de $M[\preceq_x (-,f')] \cap F(t)$, qui coïncide avec $M[\preceq_x (-,f')] \cap G(t)$ par minimalité de f, on en déduit que pr_f envoie cette inclusion stricte sur une inclusion stricte, ce qui contredit l'égalité $\tilde{F} = \tilde{G}$ et achève la démonstration. □

En conséquence, on obtient la proposition élémentaire mais fondamentale suivante :

Proposition 3.4. *Si le foncteur*

$$\mathcal{C}(x,-) \wr M : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens} \wr Sob(M)$$

(associant à t le couple $(\mathcal{C}(x,t),(M)_{f\in\mathcal{C}(x,t)})$) est noethérien, alors le foncteur

$$M[\mathcal{C}(x,-)] : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$$

est noethérien.

Définition 3.5. On dit qu'un ensemble ordonné $(E,\leq)$ est *pseudo-artinien* si pour toute suite infinie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, il existe des entiers naturels $i < j$ tels que $x_i \leq x_j$.

Si $\leq$ est un ordre total, cette condition équivaut à l'inexistence de suites infinies strictement décroissantes, c'est-à-dire au caractère artinien de $(E,\leq)$, d'où le choix de la terminologie.

Lemme 3.6. *Soient $(E,\leq)$ un ensemble ordonné pseudo-artinien et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie d'éléments de E. Il existe une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\phi(n)})_n$ soit une suite croissante de $(E,\leq)$.*

Démonstration. Considérons l'ensemble I des $i \in \mathbb{N}$ tels que $x_i \leq x_j$ implique $j \leq i$. Si I est infini, on peut trouver $i < i'$ dans I avec $x_i \leq x_{i'}$ puisque E est pseudo-artinien, ce qui est absurde. On choisit pour $\phi(0)$ n'importe quel entier strictement supérieur à tous les éléments de I, ce qui permet de trouver $\phi(1) > \phi(0)$ tel que $x_{\phi(0)} \leq x_{\phi(1)}$. Comme $\phi(1)$ est encore hors de I, on peut continuer et définir par récurrence notre extraction ϕ. □

Proposition 3.7. *Supposons que M est un objet noethérien de $\mathcal{A}$ et que l'ensemble ordonné $\mathcal{C}(x)$ est pseudo-artinien. Alors le foncteur*

$$\mathcal{C}(x,-) \wr M : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens} \wr Sob(M)$$

est noethérien.

(Dans cet énoncé, on n'a pas besoin que $\leq_x$ possède un renforcement admissible.)

Démonstration. On note d'abord que l'hypothèse sur $\mathcal{C}(x)$ implique que $\mathcal{C}(x,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ est un foncteur noethérien (il y a en fait équivalence entre les deux conditions). En effet, si l'on suppose le contraire, soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de sous-foncteurs de $\mathcal{C}(x,t)$: on peut trouver une suite $(t_n)_{n>0}$ d'objets de $\mathcal{C}$ et des éléments $\xi_n \in F_n(t_n) \setminus F_{n-1}(t_n)$. Comme $\mathcal{C}(x)$ est pseudo-artinien, on peut trouver des entiers $0 < n < m$ avec $\xi_n \leq_x \xi_m$. Par conséquent, il existe une flèche $\varphi : t_n \to t_m$ telle que $\xi_m = \varphi\xi_n$. Comme $\xi_n \in F_n(t_n)$, cela entraîne $\xi_m \in F_n(t_m)$, ce qui contredit notre hypothèse, comme souhaité.

Passons au cas général : supposons qu'il existe une suite strictement croissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-objets du foncteur $\mathcal{C}(x,-) \wr M$ de l'énoncé. Écrivant $F_n = (G_n, \alpha_n)$ où pour tout $t \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\alpha_n(t)$ est une fonction $G_n(t) \to Sob(M)$, comme la suite (G_n) stationne par ce qui précède, on peut la supposer constante, disons en G, et l'on peut trouver une suite (t_n) d'objets de $\mathcal{C}$ et des éléments $\xi_n \in G(t_n) \subset \mathcal{C}(x)$ tels que les inclusions $\alpha_{n-1}(\xi_n) \subset \alpha_n(\xi_n)$ soient strictes. Par le lemme 3.3, il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\psi := \xi \circ \phi$ soit une suite croissante pour $\leq_x$. Cela implique que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $(\alpha_i(\psi_n))_n$ de $Sob(M)$ est croissante, $(\alpha_{\phi(n)}(\psi_n))_n$ l'est donc également. Puisque M est noethérien, cette suite stationne. La suite d'inclusions

$$\alpha_{\phi(n-1)}(\psi_{n-1}) \subset \alpha_{\phi(n-1)}(\psi_n) \subset \alpha_{\phi(n)-1}(\psi_n) \subset \alpha_{\phi(n)}(\psi_n)$$

dont la dernière est stricte par hypothèse fournit donc la contradiction cherchée. □

En combinant les propositions 3.4 et 3.7, on obtient :

Proposition 3.8. *Supposons que les trois hypothèses suivantes sont vérifiées :*

1. *M est un objet noethérien de la catégorie de Grothendieck $\mathcal{A}$;*
2. *l'ensemble ordonné $\mathcal{C}(x)$ est pseudo-artinien ;*
3. *l'ordre $\leq_x$ possède un renforcement admissible.*

Alors le foncteur $M[\mathcal{C}(x,-)] : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ est noethérien.

Corollaire 3.9. *Supposons que les trois hypothèses suivantes sont vérifiées :*

1. *$\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck localement noethérienne ;*
2. *pour tout $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, l'ensemble ordonné $\mathcal{C}(x)$ est pseudo-artinien ;*
3. *pour tout $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, l'ordre $\leq_x$ possède un renforcement admissible.*

Alors la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est localement noethérienne.

4 La catégorie Ω_{sh} ; conclusion

On note Ω_{sh} la sous-catégorie de Ω ayant les mêmes objets et dont les morphismes $f : \mathbf{n} \to \mathbf{m}$ sont les fonctions surjectives telles que la suite $(\min f^{-1}(i))_{1\leq i\leq m}$ soit croissante. Cette condition est équivalente à :

$$f(i) \geq r \text{ entraîne } i \geq \min f^{-1}(r),$$

ce dont on déduit aussitôt la compatibilité à la composition. (Cette catégorie est introduite par Hoffbeck et Vespa dans [HV14] à d'autres fins ; ils la notent Γ_{sh}^{surj}.)

On note $f^!(r) := \min f^{-1}(r)$. Ainsi $f \circ f^! = \mathrm{Id}$ pour toute flèche f dans Ω ; pour f dans Ω_{sh}, $f^!$ est strictement croissante, et

$$(g \circ f)^! = f^! \circ g^!$$

si f et g sont dans Ω_{sh} (ce qui n'est pas toujours le cas dans Ω).

Notons f_+, pour une fonction $f : \mathbf{i} \to \mathbf{n}$, la fonction croissante $\mathbf{i} \to \mathbf{n}$ définie par $f_+(t) := \max\limits_{i \leq t} f(i)$. On remarque que f appartient à Ω_{sh} si et seulement si f_+ est une surjection. Dans ce cas, on a $f_+ \circ f^! = \mathrm{Id}$.

Lemme 4.1. *1. La catégorie Ω_{sh}^{op} est une petite catégorie squelettique dirigée ;*

2. pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble ordonné $\Omega_{sh}^{op}(\mathbf{n})$ est pseudo-artinien ;

3. pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'ordre $\leq_{\mathbf{n}}$ sur $\Omega_{sh}^{op}(\mathbf{n})$ possède un renforcement admissible.

Démonstration. Le premier point est évident.

Pour le second, introduisons quelques notations. Si f est un élément de

$$\Omega_{sh}^{op}(\mathbf{n}) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_{sh}(\mathbf{i}, \mathbf{n})$$

on note $l(f)$ le cardinal de la source de f. Si $l(f) > n$, f n'est pas injective, de sorte qu'on peut définir

$$m(f) := \min\{i \in \{0, \dots, l(f) - 1\} \,|\, \exists i < j < l(f) \quad f\big(l(f) - j\big) = f\big(l(f) - i\big)\},$$

$$p(f) := f\big(l(f) - m(f)\big)$$

et $\tilde{f} \in \Omega(\mathbf{l(f)} - \mathbf{1}, \mathbf{n})$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x < l(f) - m(f)$, $\tilde{f}(x) = f(x+1)$ sinon.

On va vérifier les propriétés suivantes :

1. $f(l(f) - i) = n - i$ pour $i < m(f)$; en particulier, $m(f) < n$;
2. $\tilde{f} \in \Omega_{sh}^{op}(\mathbf{n})$; de plus, $\tilde{f} \leq_{\mathbf{n}} f$;
3. si f et g sont deux éléments de $\Omega_{sh}^{op}(\mathbf{n})$ avec $l(f), l(g) > n$, $m(f) = m(g)$, $p(f) = p(g)$ et $\tilde{f} \leq \tilde{g}$, alors $f \leq g$.

Supposons le premier point inexact et considérons le plus petit entier $i < m(f)$ tel que $f(l - i) \neq n - i$ (on note l au lieu de $l(f)$ pour alléger). Si $i > 0$, on a $f_+(l - i + 1) = n - i + 1$ et $f_+(l - i) \leq n - i$, car f ne prend aucune valeur strictement supérieure à $n - i$ avant $l - i + 1$ (en effet, par définition de $m(f)$, ces valeurs sont prises une fois seulement par f, et la minimalité de i montre qu'elles le sont strictement après $l - i$) et $f(l - i + 1) = n - i + 1$ (encore par minimalité de i). Comme f_+ est une fonction croissante surjective, on en déduit $f_+(l - i) = n - i$ donc $f(l - i) \leq n - i$ (ce qui est évidemment aussi vrai si $i = 0$). Si l'inégalité était stricte, on en tirerait $l - i = f^! f(l - i) < f^!(n - i)$ (la première égalité provenant de ce que f ne prend qu'une fois la valeur $f(l - i)$, vu que $i < m(f)$), soit $f^!(n - i) = l - j$ avec $j < i$, donc $n - i = f f^!(n - i) = f(l - j) = n - j$, ce qui est absurde et montre le premier point.

Pour le deuxième point, on note d'abord que $f_+(l-m) = f_+(l-m-1)$ (on note m pour $m(f)$) puisque f prend la valeur $f(l-m)$ strictement avant $l-m$. On en déduit aisément que $\tilde{f}_+$ vérifie $\tilde{f}_+(x) = f_+(x)$ pour $x \le l-m$ et $\tilde{f}_+(x) = f_+(x+1)$ pour $x > l-m$, ce qui montre que $\tilde{f}_+$ est surjective et que $\tilde{f}$ appartient à Ω_{sh}. Choisissons maintenant un entier i tel que $m < i < l$ et $f(l-i) = f(l-m)$. Soit $h : \mathbf{l} \to \mathbf{l-1}$ la fonction donnée par $h(x) = x$ si $x < l-m$, $h(l-m) = l-i$ et $h(x) = x-1$ pour $x > l-m$. Alors h appartient à Ω_{sh} (car $h_+(x) = x$ pour $x < l-m$, $x-1$ sinon : h_+ est surjective). De plus on a $f = \tilde{f} \circ h$, ce qui montre que $\tilde{f} \le f$.

Sous les hypothèses du troisième point, notons pour alléger $i = l(f)$, $j = l(g)$, $m = m(f) = m(g)$ et $k > m$ un entier tel que $f(i-k) = f(i-m)$. Il existe par hypothèse $\phi \in \Omega_{sh}(\mathbf{j-1}, \mathbf{i-1})$ tel que $\tilde{g} = \tilde{f}\phi$. On note que $\phi(x) < i-m$ pour $x < j-m$ et $\phi(x) = x+i-j$ pour $x \ge j-m$ (ce qui implique en particulier $\phi_+(j-m-1) = i-m-1$ puisque ϕ_+ est une surjection croissante). Cela provient de ce que $\tilde{f}(\phi(x)) = \tilde{g}(x) = g(x+1) = x+n+1-j$ pour $x \ge j-m$ et de ce que $\tilde{f}$ prend (quand $x \ge j-m$) la valeur $x+n+1-j$ en $x+i-j$ et seulement en $x+i-j$, tandis que $\tilde{g}$ ne prend cette valeur qu'en x.

On définit $\alpha : \mathbf{j} \to \mathbf{i}$ par $\alpha(x) = \phi(x)$ si $x < j-m$, $i-k$ si $x = j-m$ et $x+i-j$ si $x > j-m$. On vérifie aussitôt que α est un morphisme de Ω_{sh} (α_+ est surjective comme ϕ_+ car donnée par $\alpha_+(x) = \phi_+(x)$ pour $x < j-m$, $\alpha_+(j-m) = \phi_+(j-m-1) = i-m-1$, $\alpha_+(x) = x+i-j$ pour $x > j-m$) et que $g = f\alpha$ (l'hypothèse $p(f) = p(g)$ montre que cette égalité est vraie en $j-m$, elle résulte ailleurs de l'égalité $\tilde{g} = \tilde{f}\phi$).

Ceci établi, nous sommes prêts pour démontrer que $\Omega_{sh}^{op}(\mathbf{n})$ est pseudo-artinien. Supposons que ce ne soit pas le cas : il existe alors une *mauvaise suite* $(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$ dans cet ensemble, c'est-à-dire une suite telle qu'on n'ait jamais $f_i \le_{\mathbf{n}} f_j$ si $i < j$. Parmi ces mauvaises suites, on peut en trouver une telle que $l(f_0)$ soit minimal et plus généralement que, pour tout entier r, $l(f_r)$ soit minimal parmi les mauvaises suites g telles que $g_i = f_i$ pour $i < r$. Pour $r > 0$ on a $l(f_r) > n$ (dans $\Omega_{sh}^{op}(\mathbf{n})$, seul $\mathrm{Id}_{\mathbf{n}}$ a une longueur au plus n), de sorte que $m(f_r)$ et $p(f_r)$ sont définis. Comme ils prennent leurs valeurs dans un ensemble fini (d'après le premier point démontré ci-dessus), on peut trouver $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $m(f\circ\phi)$ et $p(f\circ\phi)$ soient constantes. Définissons une suite g de $\Omega_{sh}^{op}(\mathbf{n})$ par $g_r = f_r$ si $r < \phi(0)$ et $g_{\phi(0)+i} = \tilde{f}_{\phi(i)}$. L'hypothèse de minimalité de f montre que g n'est pas une mauvaise suite, donc il existe des entiers $i < j$ tels que $g_i \le g_j$. L'hypothèse $j < \phi(0)$ est absurde car alors $f_i \le f_j$ contredisant le fait que f est mauvaise, donc $g_j = \tilde{f}_{\phi(j-\phi(0))}$. Si $i < \phi(0)$, on a

$$g_i = f_i \le g_j = \tilde{f}_{\phi(j-\phi(0))} \le f_{\phi(j-\phi(0))}$$

(par le deuxième point démontré ci-avant), ce qui est également absurde puisque $i < \phi(0) \le \phi(j-\phi(0))$. Donc $i \ge \phi(0)$ et $g_i = \tilde{f}_{\phi(i-\phi(0))}$. Mais le troisième point établi plus haut fournit une nouvelle contradiction puisqu'il implique $f_{\phi(i-\phi(0))} \le f_{\phi(j-\phi(0))}$. Il s'ensuit que $\Omega_{sh}^{op}(\mathbf{n})$ est pseudo-artinien.

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, on construit un renforcement admissible $\preceq_{\mathbf{n}}$ de $\le_{\mathbf{n}}$ de la façon suivante.

1. Pour $i < j$, on convient que $f \preceq g$ pour tous $f \in \Omega_{sh}(\mathbf{i}, \mathbf{n})$ et $g \in \Omega_{sh}(\mathbf{j}, \mathbf{n})$;
2. la restriction à $\Omega_{sh}(\mathbf{i}, \mathbf{n})$ de $\preceq$ coïncide avec celle de l'ordre lexicographique sur $\mathbf{n}^i$ (on regarde $\Omega_{sh}(\mathbf{i}, \mathbf{n})$ comme sous-ensemble de $\mathbf{Ens}(\mathbf{i}, \mathbf{n}) = \mathbf{n}^i$).

Il est clair que $\preceq_{\mathbf{n}}$ est un bon ordre. Il étend $\leq_{\mathbf{n}}$ car $f \leq_{\mathbf{n}} g$, pour $f : \mathbf{i} \to \mathbf{n}$ et $g : \mathbf{j} \to \mathbf{n}$, entraîne $i < j$ ou $f = g$. Vérifions que $f \prec_{\mathbf{n}} g$ implique $fh \prec_{\mathbf{n}} gh$, où $f, g \in \Omega_{sh}(\mathbf{i}, \mathbf{n})$ et $h \in \Omega_{sh}(\mathbf{j}, \mathbf{i})$. L'hypothèse $f \prec_{\mathbf{n}} g$ signifie qu'existe r tel que $f(s) = g(s)$ pour $s < r$ et que $f(f) < g(r)$. On a alors $fh(t) = gh(t)$ pour $t < h^!(r)$, car cette inégalité entraîne $h(t) < r$ puisque h appartient à Ω_{sh}, et $fh(h^!(r)) = gh(h^!(r))$ puisque $hh^! = \mathrm{Id}$. Cela termine la démonstration. □

En combinant ce lemme au corollaire 3.9, on obtient :

Proposition 4.2. *Si $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck localement noethérienne, alors $\mathbf{Fct}(\Omega_{sh}^{op}, \mathcal{A})$ est localement noethérienne.*

On peut maintenant parvenir promptement à la conclusion.

Démonstration du théorème 2.1. Le foncteur d'inclusion $\iota : \Omega_{sh} \to \Omega$ est essentiellement surjectif. On dispose de surcroît, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un isomorphisme de foncteurs

$$\iota^*\Omega(-, \mathbf{n}) \simeq \Omega_{sh}(-, \mathbf{n}) \times \Sigma_n$$

obtenu comme suit. Si $f : \mathbf{i} \to \mathbf{n}$ est une surjection, on dispose d'une fonction injective $f^! : \mathbf{n} \to \mathbf{i}$. Il existe une et une seule permutation $\sigma \in \Sigma_n$ telle que $f^!\sigma$ soit croissante. L'isomorphisme est donné par $f \mapsto (\sigma^{-1}f, \sigma)$ (du fait que σ est bijective, on a $(\sigma^{-1}f)^! = f^!\sigma$, cette fonction est croissante donc $\sigma^{-1}f$ appartient à Ω_{sh}). La conclusion résulte donc des propositions 4.2 et 2.4. □

Références

[Dja07] A. Djament – « Foncteurs en grassmanniennes, filtration de Krull et cohomologie des foncteurs », *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* (2007), no. 111, p. xx+213.

[Dja09] — , « Le foncteur $V \mapsto \mathbb{F}_2[V]^{\otimes 3}$ entre $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels est noethérien », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **59** (2009), no. 2, p. 459–490.

[HLS93] H.-W. Henn, J. Lannes & L. Schwartz – « The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects », *Amer. J. Math.* **115** (1993), no. 5, p. 1053–1106.

[HV14] E. Hoffbeck & C. Vespa – « Leibniz homology of Lie algebras as functor homology », disponible sur http ://de.arxiv.org/pdf/1401.6139.pdf, 2014.

[Kuh94] N. J. Kuhn – « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II », *K-Theory* **8** (1994), no. 4, p. 395–428.

[Pir00] T. Pirashvili – « Dold-Kan type theorem for Γ-groups », *Math. Ann.* **318** (2000), no. 2, p. 277–298.

[Pow98] G. M. L. Powell – « The Artinian conjecture for $I^{\otimes 2}$ », *J. Pure Appl. Algebra* **128** (1998), no. 3, p. 291–310, With an appendix by Lionel Schwartz.

[PS] A. Putman & S. Sam – « Representation stability and finite linear groups », arXiv :1408.3694.

[SS] S. Sam & A. Snowden – « Gröbner methods for representations of combinatorial categories », disponible sur http ://arxiv.org/abs/1408.3694.