Introduction aux représentations génériques des groupes linéaires sur un corps fini en caractéristique croisée, d'après Nagpal (groupe de travail dans le cadre de l'ANR ChroK)

Aurélien DJAMENT

Exposé du 18 mars 2019 ; dernière révision : 21/03/2019

Résumé

Il s'agit de notes (qui ne coïncident pas avec l'exposé oral correspondant, et contiennent probablement de nombreuses coquilles, imputables à leur seul auteur) de l'exposé introductif d'un groupe de travail dont l'objet principal est l'exposition des résultats de Nagpal [Nagb]. On s'intéressera également à ceux des articles [GLX, Nagc]. Il s'agit d'établir des résultats de structure sur l'une des catégories de *représentations génériques* des groupes linéaires sur un corps fini de caractéristique p, ici à coefficients dans un corps de caractéristique différente de p (cas de la caractéristique croisée), plus facile à comprendre que le cas d'égale caractéristique.

Table des matières

1 Représentations génériques de familles de groupes

Le but général consiste à étudier *en famille* les représentations (et souvent la (co)homologie) de suites infinies de groupes reliés par des morphismes appropriés. La terminologie de *représentations génériques* a été introduite, pour les groupes linéaires, par Kuhn [Kuh94a, Kuh94b, Kuh95]. Il s'agit d'utiliser des catégories de foncteurs : si $\mathcal{C}$ est une (petite) catégorie et K un anneau (en général commutatif, et souvent un corps), notons $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers la catégorie K-**Mod** des K-modules à gauche. Par évaluation sur un objet t de $\mathcal{C}$, tout foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ procure une représentation $F(t)$ du groupe $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(t)$ d'automorphismes de t (et même de son monoïde d'endomorphismes) — qu'on a parfois envie ou besoin de restreindre à des sous-groupes. L'effet de F sur les morphismes de $\mathcal{C}$ permet d'obtenir des liens entre ces différentes représentations, mais sans de nombreuses hypothèses supplémentaires on ne peut pas dire grand chose. Notons tout d'abord qu'une flèche $t \xrightarrow{f} u$ de $\mathcal{C}$ n'induit en général pas de façon naturelle un morphisme de groupes $\mathrm{Aut}(t) \to \mathrm{Aut}(u)$. C'est toutefois le cas lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie *homogène* au sens de Randal-Williams et Wahl [RWW17], qui ont introduit cette notion à des fins d'étude unifiée de stabilité homologique. On note toutefois que toute transformation naturelle $\alpha : \Phi \to \Psi$ entre foncteurs $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induit, pour $t \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ et $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}(\mathcal{D};K)$, un morphisme K-linéaire naturel $(F \circ \Phi)(t) \to (F \circ \Psi)(t)$ qui est équivariant pour l'action de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(t)$; cette action s'obtient à la source (resp. au but) par restriction le long du morphisme de groupes $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(t) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}}(\Phi(t))$ (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(t) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}}(\Psi(t))$) de l'action canonique sur $F(\Phi(t))$ (resp. $F(\Psi(t))$). On rencontrera très couramment cette situation dans le cas où $\mathcal{C}$ est munie d'une structure monoïdale $+$, $\Phi = a + -$, $\Psi = b + - : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, α étant une transformation naturelle induite par un morphisme $a \to b$ de $\mathcal{C}$.

L'intérêt de ce formalisme (du point de vue de la théorie des représentations — il y a d'autres motivations à l'étude des catégories de foncteurs d'une petite catégorie vers une catégorie de modules, provenant notamment de la topologie algébrique ; cf. [EML54, chap. II] par exemple) vient de son efficacité pour coder des liens très utiles du point de vue représentationniste entre des familles de groupes classiques.

Par exemple, pour les groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$, la catégorie Θ (souvent notée FI — comme dans les travaux de Nagpal auxquels on s'intéresse) des ensembles finis *avec injections* permet d'étudier de nombreux aspects représentationnistes et (co)homologiques de la suite de monomorphismes de groupes usuelle

$$\cdots \to \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_{n+1} \to \cdots ;$$

ce qui nous intéresse ici davantage, si A est un anneau, est la suite d'inclusions usuelle

$$\cdots \to GL_n(A) \to GL_{n+1}(A) \to \cdots$$

pour laquelle plusieurs catégories sources de foncteurs sont naturelles.

Avant d'en dire davantage sur ce cas, revenons aux groupes symétriques, qui ont été de loin les plus étudiés de ce point de vue ces dernières années. La catégorie source qui peut de prime abord sembler la plus « naturelle » pour étudier les groupes symétriques est celle des ensembles finis. La catégorie Γ des ensembles finis *pointés*, qui possède les mêmes groupes d'automorphismes, a davantage été étudiée comme source des foncteurs. D'une part, c'est une catégorie pointée (elle possède un objet nul), ce qui la rend plus agréable sous de multiples aspects. Surtout, elle possède des liens étroits avec la théorie de l'homotopie *stable*, les Γ-espaces constituant un modèle des spectres connectifs. Les travaux de Pirashvili — notamment [Pir00] — ont mis en évidence que de nombreux calculs d'algèbre homologique peuvent être menés avec succès dans $\mathcal{F}(\Gamma; K)$ (notamment si K est un corps de caractéristique nulle), que la catégorie Γ est équivalente au sens de Morita à la catégorie Ω des ensembles finis avec *surjections*, et que l'algèbre homologique dans $\mathcal{F}(\Gamma; K)$ est liée à de nombreux aspects de la topologie algébrique (comme les foncteurs dérivés à la Dold-Puppe — voir aussi les travaux de Richter et de Johnson-McCarthy à ce sujet — ou des généralisations de l'homologie de Hochschild). D'un autre côté, de nombreux objets fondamentaux en topologie ou en algèbre font apparaître des familles de représentations des groupes symétriques qui donnent lieu à des structures fonctorielles plus faibles que les Γ-modules — par exemple, la cohomologie des espaces de configurations —, ce qui est à l'origine du développement récent rapide de l'étude des catégories $\mathcal{F}(\Theta; K)$ depuis 5 à 10 ans.

Revenons aux groupes linéaires. La catégorie source la plus usuelle pour étudier les groupes linéaires sur A est la catégorie $\mathbf{P}(A)$ des A-modules à gauche libres (ou projectifs) de rang fini. Son étude a connu un regain d'intérêt à partir de la fin des années 1980 en raison de liens profonds des catégories $\mathcal{F}(\mathbf{P}(\mathbb{F}_p); \mathbb{F}_p)$ (où p est un nombre premier) avec les modules instables sur l'algèbre de Steenrod des opérations cohomologiques stables mod. p mis en évidence par Henn-Lannes-Schwartz [HLS93]. Il y a aussi des liens avec la (co)homologie de Mac Lane — voir Jibladze-Pirashvili [JP91]. Même si ce n'est pas la catégorie qui nous concerne le plus ici, signalons que l'étude de la structure de $\mathcal{F}(\mathbf{P}(k); K)$ est compliquée si k est un corps fini et K un corps *de la même caractéristique* . La situation est radicalement différente dans le cas de la *caractéristique croisée* :

Théorème 1 (Kuhn)**.** *Soient k un corps fini de cardinal q et K un anneau commutatif où q est inversible. Alors la catégorie $\mathcal{F}(\mathbf{P}(k); K)$ est équivalente à $\prod_{n \in \mathbb{N}} K[GL_n(k)]$-$\mathbf{Mod}$.*

L'équivalence, établie par Kuhn dans [Kuh15], repose lourdement sur des résultats antérieurs de Kovács [Kov92] sur les représentations des monoïdes multiplicatifs $\mathcal{M}_n(k)$. Elle est relativement explicite.

En particulier, dans la situation de la caractéristique croisée, on voit que $\mathcal{F}(\mathbf{P}(k); K)$ est une catégorie *localement finie*, et qu'elle est de plus semi-simple si K contient $\mathbb{Q}$.

Le but des travaux de Nagpal [Nagb, Nagc] est d'établir des résultats plus ou moins analogues au théorème 1 (et à des résultats sur les FI-modules que nous rappellerons brièvement dans la section 5) pour d'autres catégories de représentations génériques des groupes linéaires sur un corps fini en caractéristique croisée.

Une catégorie source autre que $\mathbf{P}(A)$ très naturelle pour l'étude générique des groupes linéaires sur un anneau A est la catégorie $\mathbf{S}(A)$ ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont donnés par

$$\mathbf{S}(A)(U, V) := \{(f, g) \in \mathbf{P}(A)(U, V) \times \mathbf{P}(A)(V, U) \,|\, g \circ f = \mathrm{Id}_U\}$$

qui est liée à la K-théorie algébrique (elle est sous-jacente aux travaux inauguraux de Quillen sur le sujet) et permet de faire de $M \mapsto \mathrm{Aut}_A(M)$ (où M est un A-module libre, ou projectif, de type fini) un *foncteur* $\mathbf{S}(A) \to \mathbf{Grp}$. La catégorie $\mathbf{S}(A)$ est d'ailleurs une catégorie homogène au sens de [RWW17] si l'anneau A est raisonnable, et elle l'est « presque », en toute généralité. Elle constitue un outil de choix pour relier l'homologie stable des groupes linéaires sur A à coefficients polynomiaux (en servant d'intermédiaire avec les foncteurs sur $\mathbf{P}(A)$) — cf. [Dja12].

Une troisième catégorie source, qui est celle considérée par Nagpal, et qu'on notera ici $\mathbf{M}(A)$, a toujours les mêmes objets, mais ses morphismes sont les *monomorphismes scindés* de $\mathbf{P}(A)$ (contrairement à la catégorie $\mathbf{S}(A)$, le scindement n'est pas donné dans la structure). Cette catégorie intervient dans les travaux (non publiés) de Scorichenko. On peut aussi la considérer comme un analogue de $\mathbf{S}(A)$ plus facile techniquement à étudier (cf. [DV19, § 7.1 et 7.2]). L'un des prolongements les plus naturels de ce groupe de travail pourrait être de trouver des variantes des résultats de Nagpal sur les catégories $\mathbf{S}(k)$ (pour un corps fini k).

2 Quelques propriétés générales

Revenons au cas général d'une catégorie du type $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$, où $\mathcal{C}$ est une catégorie (essentiellement) petite et K un anneau. Une telle catégorie possède des limites et colimites, qui se calculent au but (i.e. « point par point »). C'est en particulier une catégorie abélienne dont les colimites filtrantes sont *exactes*, comme K-**Mod**.

On dispose de plus d'un ensemble distingué de générateurs projectifs de type fini : pour $t \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $P^t_{\mathcal{C}} := K[\mathcal{C}(t,-)]$ (où $K[-]$ désigne la K-linéarisation) représente l'évaluation en t, d'après une forme du lemme de Yoneda. Cela montre en particulier que $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ est une *catégorie de Grothendieck* (i.e. catégorie abélienne cocomplète, avec un générateur, où les colimites filtrantes sont exactes). Une telle catégorie possède classiquement plein de propriétés agréables (cf. Gabriel [Gab62]), comme l'existence d'enveloppes injectives. Si K est un *corps*, on dispose d'ailleurs de cogénérateurs injectifs explicites, qui sont duaux des projectifs précédents en un sens approprié, et donnés par $I^t_{\mathcal{C}} := K^{\mathcal{C}(-,t)}$ pour $t \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

Tout foncteur $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre petites catégories induit un foncteur de *précomposition* noté $\Phi^* : \mathcal{F}(\mathcal{D};K) \to \mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ qui commute aux limites et colimites, et est en particulier exact.

Si l'anneau K est *commutatif*, le produit tensoriel au-dessus de K fait de $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ une catégorie monoïdale symétrique.

Comme $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ possède assez de projectifs et d'injectifs, on peut dériver sans crainte à gauche ou à droite des foncteurs additifs (ou même non additifs, mais nous n'en aurons pas besoin) depuis cette catégorie vers une catégorie abélienne. En particulier, on dispose de *groupes d'extensions* qui définissent un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)^{op} \times \mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ vers les groupes abéliens (et même les K-modules si K est commutatif) $\mathbb{N}$-gradués, qui est cohomologique par rapport à chacune des deux variables. La *cohomologie* de la catégorie $\mathcal{C}$ à coefficient dans un foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ peut être définie par

$$H^*(\mathcal{C};K) := \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{C};K)}(K,F)$$

(où K désigne le foncteur constant). On notera que $H^0(\mathcal{C};F)$ n'est autre que la *limite* du foncteur F.

Dualement, on peut définir l'*homologie* de la catégorie $\mathcal{C}$ comme le foncteur gradué dérivé à gauche du foncteur exact à droite $\operatorname*{colim}_{\mathcal{C}} : \mathcal{F}(\mathcal{C};K) \to K$-**Mod**.

L'homologie de $\mathcal{C}$ à coefficients dans $\mathcal{F}$ est notée $H_*(\mathcal{C}; F)$. Cette (co)homologie possède des propriétés de fonctorialité non seulement vis-à-vis de F, mais aussi de $\mathcal{C}$, qu'on n'écrira pas ici. Si le foncteur F est *constant*, la (co)homologie de $\mathcal{C}$ à coefficients dans F peut aussi s'interpréter en termes topologiques comme la (co)homologie (singulière, simpliciale...) du classifiant ou nerf de la catégorie $\mathcal{C}$ à coefficients dans F. (L'étude systématique de ces notions remonte sans doute à Quillen, à des fins de K-théorie algébrique.)

De même que la cohomologie de $\mathcal{C}$ constitue un cas particulier des groupes d'extensions dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$, l'homologie de $\mathcal{C}$ s'étend en un bifoncteur homologique relativement à chaque variable

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{C}} : \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}; K) \times \mathcal{F}(\mathcal{C}; K) \to K\text{-}\mathbf{Mod}_{gr}$$

(où l'on suppose K commutatif ; l'indice gr est mis pour *gradué*) qui s'obtient en dérivé (par rapport à l'une ou l'autre des variables) le bifoncteur de *produit tensoriel au-dessus de* $\mathcal{C}$

$$\underset{\mathcal{C}}{\otimes} = \mathrm{Tor}_0^{\mathcal{C}} : \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}; K) \times \mathcal{F}(\mathcal{C}; K) \to K\text{-}\mathbf{Mod}$$

qu'on peut par exemple définir par $F \underset{\mathcal{C}}{\otimes} G := \mathrm{Cofin}(F \boxtimes G)$ (où $\boxtimes$ désigne le produit tensoriel extérieur : $(F \boxtimes G)(c, d) := F(c) \otimes G(d)$; les produits tensoriels de base non spécifiée sont pris sur K). Concrètement, $F \underset{\mathcal{C}}{\otimes} G$ est le coégalisateur des flèches

$$\bigoplus_{(u \to t) \in \mathcal{C}} F(t) \otimes G(u) \to \bigoplus_{x \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}} F(x) \otimes G(x)$$

obtenues en utilisant soit la fonctorialité contravariante de F ($F(t) \otimes G(u) \to F(u) \otimes G(u)$ induit par $u \to t$), soit la fonctorialité covariante de G ($F(t) \otimes G(u) \to F(t) \otimes G(t)$ induit par $u \to t$)

Une catégorie à un seul objet n'est autre qu'un *monoïde* ; dans ce cas, les notions de (co)homologie précédemment rappelées coïncident avec les notions usuelles. C'est ainsi que la (co)homologie des groupes est un cas particulier de la (co)homologie des catégories.

Dans toute la suite, K désigne un anneau commutatif.

3 La catégorie générique associée à une pseudo-théorie EI

Appelons *pseudo-théorie* une catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{C}, +, 0)$ telle que :

1. l'ensemble des objets de $\mathcal{C}$ est $\mathbb{N}$;
2. l'unité de la structure monoïdale de $\mathcal{C}$ est 0 et l'effet sur les objets de celle-ci est l'addition des entiers naturels ;
3. 0 est objet initial de $\mathcal{C}$.

Nous nous intéresserons à de telles pseudo-théories qui sont de plus des catégories EI, c'est-à-dire des catégories dans lesquelles les endomorphismes sont des automorphismes. Nous supposerons également que $\mathcal{C}$ est *régulière* au sens où les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\mathcal{C}(i,j)=\varnothing$ si $i>j$ (noter que la réciproque est vraie puisque $\mathcal{C}(0,i)$ est toujours non vide et que $\mathcal{C}$ est monoïdale) ;
2. tous les morphismes de $\mathcal{C}$ sont des monomorphismes ;
3. les ensembles $\mathcal{C}(i,j)$ sont tous finis ;
4. la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ est *localement noethérienne* (ce qui revient à dire que les projectifs $P^t_{\mathcal{C}}$ sont tous noethériens) lorsque K est un anneau noethérien.

(Nous introduisons ici de façon *ad hoc* cette notion, qui permet d'englober la plupart des catégories sources des catégories de foncteurs qui apparaîtront dans le groupe de travail.)

Voici quelques exemples fondamentaux de telles catégories — ou, pour éviter les abus, de catégories *équivalentes* à des pseudo-théories régulières.

1. La catégorie Θ des ensembles finis avec injections est une pseudo-théorie régulière. La structure monoïdale provient de la réunion disjointe des ensembles.
2. Soit A un anneau *fini*. la catégorie $\mathbf{M}(A)$ (notée $\mathrm{VI}(A)$ par Nagpal [Nagb]), munie de la structure monoïdale symétrique induite par la somme directe des A-modules à gauche, est une pseudo-théorie régulière (si A est infini, elle reste une pseudo-théorie).
3. Ce qui précède s'applique sans changement à $\mathbf{S}(A)$ (souvent notée $\mathrm{VIC}(A)$), au moins si A est commutatif.

Toutes les propriétés d'une pseudo-théorie EI régulière sont évidentes dans les cas précédents, *excepté la noethérianité locale*. Cette propriété profonde a été établie dans [CEFN14] pour la catégorie Θ, dans [SS17] pour $\mathbf{M}(A)$ (A fini) et [PS17] pour $\mathbf{S}(A)$ (A fini, peut-être commutatif). Beaucoup d'arguments de Nagpal [Nagb, Nagc] — mais pas tous — sur $\mathcal{F}(\mathbf{M}(A);K)$ ne nécessitent pas de connaître la noethérianité locale de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(A);K)$ (A fini, K noethérien).

Nous dirons qu'une pseudo-théorie est *transitive* si l'action des groupes $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(m)$ sur les ensembles $\mathcal{C}(n,m)$ est toujours transitive. Cette propriété est vérifiée dans tous les exemples précédents, au moins si l'anneau A est assez gentil (est un corps, par exemple) — en fait, $\mathbf{M}(A)$ et $\mathbf{S}(A)$ vérifient *toujours* une propriété de transitivité affaiblie qui suffirait pour les considérations ultérieures (dont beaucoup nécessitent d'ailleurs nettement moins d'hypothèses que toutes les précédentes), mais nous n'en aurons pas usage.

Dans toute la suite, $\mathcal{C}$ désigne une pseudo-théorie EI régulière transitive.

Le fait que $\mathcal{C}$ est une catégorie EI permet de définir des foncteurs *atomiques* : pour tout $n\in\mathbb{N}$, la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ des foncteurs F tels que $F(i)=0$ pour $i\neq n$ est une sous-catégorie bilocalisante (épaisse — i.e. pleine, stable par sous-quotient et par extensions — et stable par sommes directes et produits arbitraires) équivalente à $K[\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(n)]$-**Mod** (on parlera de foncteur n-atomique). Les foncteurs *simples* (c'est-à-dire non nuls mais ne possédant aucun sous-foncteur strict non nul) de $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ sont les foncteurs n-atomiques pour un $n\in\mathbb{N}$ tels que $F(n)$ soit un $K[\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(n)]$-module simple.

Ce phénomène de foncteurs atomatiques est contre-intuitif par rapport à ce qu'on attend d'une notion de *représentations génériques*, c'est-à-dire qui crée un « vrai » lien (non trivial) entre les différentes catégories $K[\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(n)]$-**Mod**.

En effet, en considérant des sommes directes de foncteurs atomiques, on voit que $(F(n))_n$ peut être une suite de $K[\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(n)]$-modules *quelconque*. Pour y remédier, on travaille dans une catégorie quotient, introduite dans [DV19, § 2.2], qui consiste justement à « tuer les phénomènes instables », et dans laquelle les foncteurs atomiques deviendront *nuls*.

Catégories abéliennes quotients (voir Gabriel [Gab62, chapitre III]). Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne et $\mathcal{B}$ une sous-catégorie *épaisse*, on peut définir la catégorie abélienne quotient $\mathcal{A}/\mathcal{B}$, qui a les mêmes objets que $\mathcal{A}$, est munie d'un foncteur exact canonique $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$ qui est l'identité sur les objets et dont le noyau (c'est-à-dire les objets envoyés sur un objet isomorphe à 0) est exactement $\mathcal{B}$. Cette catégorie peut s'obtenir par la théorie générale du calcul des fractions (on inverse les morphismes dont noyau et conoyau appartiennent à $\mathcal{B}$) ou, de manière plus concrète, à l'aide de la formule

$$(\mathcal{A}/\mathcal{B})(x,y) := \operatorname*{colim}_{\substack{x' \subset x, x/x' \in \mathcal{B} \\ y' \subset y, y \in \mathcal{B}}} \mathcal{A}(x', y/y').$$

($\mathcal{A}/\mathcal{B}$ vérifie la propriété universelle que tout foncteur exact de $\mathcal{A}$ vers une catégorie abélienne qui est nul sur $\mathcal{B}$ se factorise de manière unique à travers le foncteur exact canonique $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$.) Si $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck et que $\mathcal{B}$ est *localisante*, alors $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est une catégorie de Grothendieck, le foncteur canonique $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$ commute aux colimites et possède un adjoint à droite appelé *foncteur section* $s : \mathcal{A}/\mathcal{B} \to \mathcal{A}$. La coünité $\pi s \to \mathrm{Id}$ est un isomorphisme ; le foncteur composé $s\pi$ est appelé *foncteur localisation*. Le foncteur s peut être caractérisé par le fait que, pour tout objet x de $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ (i.e. de $\mathcal{A}$), $\pi(sx)$ est isomorphe à x et que $\mathcal{A}(b, sx) = 0$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(b, sx) = 0$ pour tout $b \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$.

Foncteurs évanescents (ou de torsion, selon Nagpal [Nagb, Nagc]). Soit $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{eva}$ la sous-catégorie localisante de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ engendrée par les foncteurs atomiques. On vérifie facilement que $F \in \mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ appartient à $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{eva}$ (ou dira que F est *évanescent*, selon une terminologie due à Soulié) si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall \xi \in F(n) \quad \exists m \in \mathbb{N} \;\; \exists f \in \mathcal{C}(n,m) \qquad F(f)(x) = 0 \, (\in F(m)).$$

Chaque foncteur F possède un plus grand sous-foncteur évanescent noté $\kappa(F)$.

Du fait de l'hypothèse de transitivité qu'on a faite, les foncteurs évanescents sont également les foncteurs *stablement nuls* de [DV19].

Catégorie générique. C'est la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{gen} := \mathcal{F}(\mathcal{C}; K)/\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{eva}$. Si M est un objet de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{gen}$, on vérifie facilement que le foncteur $s(M)$ vérifie la propriété suivante : il envoie toute flèche de $\mathcal{C}$ sur un monomorphisme. Des structures importantes que $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{gen}$ hérite de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ proviennent de la structure monoïdale sur la catégorie source $\mathcal{C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'un endofoncteur de translation τ_n de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$, donné par la précomposition par $n + -$; τ_n est isomorphe à la n-ème itérée de $\tau := \tau_1$. Grâce à l'hypothèse de transitivité, les foncteurs τ_n préservent la sous-catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{eva}$; comme ils sont exacts, ils induisent donc des endofoncteurs exacts (encore notés τ_n, par abus) de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{gen}$, et ce de manière fonctorielle en $n \in \mathcal{C}$. De plus, toute transformation naturelle $\tau_n \to \tau_m$ induite par un morphisme $n \to m$ de $\mathcal{C}$ est un monomorphisme dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{gen}$. Comme $\tau_0 \simeq \mathrm{Id}$, on voit en particulier que le foncteur τ est fidèle sur $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{gen}$, contrairement à ce qui arrive sur $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$, ce qui correspond à l'une des propriétés intuitives qu'on peut attendre d'une catégorie de représentations « génériques » : on peut décaler pour « oublier les petites valeurs » (en apparence) sans perdre génériquement d'information.

4 Rappels culturels (a) : foncteurs polynomiaux

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, comme dans [DV19], δ_n (resp. κ_n) le conoyau (resp. noyau) de la transformation naturelle $\mathrm{Id} \simeq \tau_0 \to \tau_n$ induite par l'unique morphisme $0 \to n$; cela définit un endofoncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ ou de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{gen}$. Dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$, δ (resp. κ_n) est seulement exact à droite (resp. à gauche), en général. En revanche, dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{gen}$, κ_n est nul et δ_n définit donc un foncteur *exact*. On notera simplement $\delta := \delta_n$ (attention, en revanche, le foncteur κ n'est pas isomorphe à κ_1 !).

Définition 2. [DV19, § 2] Un objet X de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{gen}$ est dit *polynomial* de degré au plus $d \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ si $\delta^{d+1}(X) = 0$. Un foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ est dit *fortement polynomial* (resp. *faiblement polynomial*) de degré au plus d si $\delta^{d+1}(F) = 0$ (resp. si l'image de F par le foncteur canonique $\pi : \mathcal{F}(\mathcal{C}; K) \to \mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{gen}$ est polynomiale de degré au plus d, autrement dit, si $\delta^{d+1}(F)$ est évanescent).

On note $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C}; K)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{gen}$ constituée des objets polynomiaux de degré au plus d.

Remarque 3.
1. Dans la définition précédente, l'exposant i dans δ^i signifie la i-ème itération de l'endofoncteur δ ; elle n'est *pas* isomorphe à δ_i, contrairement à ce qui advient pour τ_i.
2. La notion de foncteur fortement polynomial se comporte beaucoup moins bien que celle de foncteur faiblement polynomial (cf. [DV19]), surtout du point de vue « générique ». Nous ne l'avons rappelée que pour mémoire.

Comme le foncteur δ est exact et commute aux colimites arbitraires, dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{gen}$, $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C}; K)$ en constitue une sous-catégorie localisante ; elle est même bilocalisante [DV19, proposition 2.25], mais c'est moins évident car les foncteurs évanescents ne sont pas stables par limites infinies.

La *filtration polynomiale* (c'est-à-dire par la suite croissante de sous-catégories bilocalisantes $(\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C}; K))_d$) de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{gen}$ constitue souvent un outil très efficace pour étudier cette catégorie, de même que les foncteurs polynomiaux au sens usuel, issu d'Eilenberg-Mac Lane [EML54], constituent un outil très important pour l'étude de catégories de foncteurs depuis une petite catégorie monoïdale symétrique dont l'unité est objet *nul* vers une catégorie abélienne, comme $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A); K)$. On montre ainsi, en combinant [DV19, corollaire 7.11] avec des résultats bien connus de Pirashvili :

Théorème 4 (Votre serviteur-Vespa)**.** *Pour tout anneau A et tout entier naturel d, la catégorie quotient $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{M}(A); K)/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathbf{M}(A); K)$ est équivalente à la catégorie des modules à droite sur l'algèbre de groupe tordue sur l'anneau $K \otimes A^{\otimes d}$ (où tous les produits tensoriels sont pris sur $\mathbb{Z}$) du groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ (opérant par permutation des facteurs du produit tensoriel $A^{\otimes d}$).*

(Le théorème analogue en remplaçant $\mathbf{M}(A)$ par $\mathbf{P}(A)$ est dû à Pirashvili ; l'étape final du théorème précédent consiste d'ailleurs à se ramener à ce dernier.)

Dans le cas de la caractéristique croisée, on a $K \otimes A = 0$, ce qui montre que les objets polynomiaux de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{gen}$ se réduisent aux (images par π des) foncteurs constants : la théorie des foncteurs polynomiaux n'est alors pas le bon outil pour étudier $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)_{gen}$!

Toutefois, comme une modification des foncteurs τ et δ introduite par Nagpal constitue son principal outil pour établir les résultats de [Nagb], il nous paraît utile de signaler sommairement certains aspects des méthodes utilisées pour démontrer le théorème 4, qui pourraient, convenablement adaptés, s'appliquer à la situation de la caractéristique croisée.

Dans [DV19, § 4], on étudie la construction catégorique générale suivante (inspirée d'une construction classique de Quillen utile en K-théorie algébrique), qui suppose seulement que $\mathcal{C}$ soit une catégorie monoïdale symétrique. On note $\tilde{\mathcal{C}}$ la catégorie ayant les mêmes objets que $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont donnés par

$$\tilde{\mathcal{C}}(a, b) := \operatorname*{colim}_{\mathcal{C}} \tau_b \mathcal{C}(a, -)$$

(on renvoie à [DV19, § 4] pour la description de la composition, qui n'est pas mystérieuse). Cette catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ hérite d'une structure monoïdale symétrique induite par celle de $\mathcal{C}$, et l'on dispose d'un foncteur monoïdal au sens strict $\mathcal{C} \to \tilde{\mathcal{C}}$ qui est l'identité sur les objets. De plus, le fait que 0 est objet initial de $\mathcal{C}$ entraîne qu'il devient un objet *nul* dans $\tilde{\mathcal{C}}$ (qui vérifie d'ailleurs une propriété universelle liée à ce phénomène). De ce fait, on dispose d'emblée d'une bonne notion de foncteur polynomial dans $\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{C}}; K)$, sans avoir à considérer une catégorie quotient. L'une des étapes de la démonstration du théorème 4 consiste à établir [DV19, théorème 4.8] (en toute généralité : cela n'a rien à voir avec les catégories particulières $\mathbf{M}(A)$) que le foncteur canonique $\mathcal{C} \to \tilde{\mathcal{C}}$ induit pour tout $d \in \mathbb{N}$ une équivalence de catégories

$$\mathcal{P}ol_d(\tilde{\mathcal{C}}; K)/\mathcal{P}ol_{d-1}(\tilde{\mathcal{C}}; K) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{P}ol_d(\mathcal{C}; K)/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{C}; K).$$

5 Rappels culturels (b) : représentations génériques des groupes symétriques

Restons encore dans une situation où l'étude de la polynomialité au sens précédent permet d'obtenir de nombreux résultats de structure : c'est celui de la catégorie source $\mathcal{C} = \Theta$. Il s'avère particulièrement favorable car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le projectif à la Yoneda P^n_Θ est fortement polynomial de degré n.

Le résultat suivant peut s'établir à l'aide de la même méthode que celle indiquée ci-dessus pour les catégories sources $\mathbf{M}(A)$, mais de façon plus simple, car il n'est pas difficile de voir (c'est une variante du théorème de Pirashvili à la Dold-Kan) que la catégorie $\tilde{\Theta}$ est équivalente au sens de Morita au groupoïde sous-jacent aux ensembles finis. On peut ainsi obtenir [DV19, proposition 5.9] :

Proposition 5. *Pour tout $d \in \mathbb{N}$, la catégorie $\mathcal{P}ol_d(\Theta; K)/\mathcal{P}ol_{d-1}(\Theta; K)$ est équivalente à $K[\mathfrak{S}_d]$-***Mod***.*

On en tire en particulier (grâce à la théorie générale des recollements de catégories abéliennes) une bijection explicite entre l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples de $\mathcal{F}(\Theta;K)_{gen}$ et l'ensemble somme sur $d \in \mathbb{N}$ des classes d'isomorphisme de $K[\mathfrak{S}_d]$-modules simples.

Il n'est pas difficile d'en déduire aussi de la proposition 5 (cf. par exemple [Dja16, corollaire 8.14]) :

Corollaire 6. *Si K est un corps, alors $\mathcal{F}(\Theta;K)_{gen}$ est localement finie (et $\mathcal{F}(\Theta;K)$ est localement noethérienne de dimension de Krull 1).*

On peut entrer encore davantage dans le détail de la structure de la catégorie $\mathcal{F}(\Theta;K)$ et de ses liens avec $\mathcal{F}(\tilde{\Theta};K) \simeq \prod_{d\in\mathbb{N}} K[\mathfrak{S}_d]$-**Mod** en utilisant des résultats complémentaires, dus notamment à Nagpal [Naga, théorème A] et à votre serviteur [Dja16, théorème A.9] (dont les méthodes s'inspirent fortement de Powell [Pow98]). Commençons par une définition (où la terminologie est tirée de [Pow98]) :

Définition 7. Un foncteur de $\mathcal{F}(\Theta;K)$ est dit ***J*-bon** s'il admet une filtration finie dont les sous-quotients appartiennent à l'image essentielle du foncteur $\mathcal{F}(\tilde{\Theta};K) \to \mathcal{F}(\Theta;K)$ de précomposition par le foncteur canonique $\Theta \to \tilde{\Theta}$.

Théorème 8 (Nagpal, votre serviteur)**.** *Soit F un foncteur de type fini (ou plus généralement à support fini) de $\mathcal{F}(\Theta;K)$.*

1. *Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\tau_n(F)$ soit J-bon.*
2. *Il existe un complexe fini*

$$0 \to F \to J^0 \to \cdots \to J^n \to 0$$

   dont l'homologie est évanescente en chaque degré et dans lequel chaque foncteur J^i est J-bon.
3. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
   - *(a) F est J-bon ;*
   - *(b) les dérivés du foncteur d'évanescence sont nuls sur F : $(\mathbf{R}^i\kappa)(F) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$;*
   - *(c) l'unité $F \to s\pi(F)$ est un isomorphisme et $(\mathbf{R}^i s)(\pi F) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$;*
   - *(d) $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\Theta;K)}(X,F) = 0$ pour tout foncteur évanescent X ;*
   - *(e) F possède une résolution projective à support uniformément borné, c'est-à-dire qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que chaque terme de la résolution projective soit une somme directe de foncteurs du type P^i_Θ avec $i \leq d$.*

Remarque 9.
1. On peut préciser cet énoncé, notamment la deuxième assertion.
2. L'équivalence entre 3c et 3d est un phénomène formel général dans les catégories quotients d'une catégorie de Grothendieck par une sous-catégorie localisante. L'équivalence entre 3b et 3c est elle aussi en grande partie formelle (elle dépend sans doute seulement du fait que le foncteur d'inclusion $\mathcal{F}(\Theta;K)_{eva} \to \mathcal{F}(\Theta;K)$ préserve les objets injectifs).

6 Aperçu du contenu du groupe de travail

Le but principal des travaux de Nagpal [Nagb, Nagc], et d'éventuels prolongements que ce groupe de travail pourrait suggérer, est d'établir des analogues des résultats de la section précédente pour $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k);K)$, où k est un corps fini dont le cardinal est inversible dans K (souvent, K sera un corps). Toutefois, la démarche est plutôt inverse : Nagpal commence par établir un analogue dans ce cadre du théorème 8, puis il l'utilise pour démontrer des analogues de la proposition 5 et du corollaire 6, essentiellement dans [Nagc].

Notons toutefois que des arguments généraux et assez élémentaires de dualité (certainement liés de près à ceux de Ksouri [Kso16]), dus à Gan-Li-Xi [GLX], permettent d'obtenir, sans utiliser l'analogue du théorème 8 établi dans [Nagb], une équivalence de catégories $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k);K)_{gen} \simeq \mathcal{F}(\mathbf{M}(k);K)_{eva}$ lorsque K est un corps de caractéristique nulle (un résultat similaire pour la catégorie source Θ est dû à Sam-Snowden), conduisant à une démonstration particulièrement rapide et élémentaire d'analogues de la proposition 5 et du corollaire 6 sur $\mathbf{M}(k)$, lorsque K est de caractéristique nulle. Il paraît toutefois illusoire d'adapter cette stratégie au cas général (où K est de caractéristique différente de celle de k).

L'un des résultats concrets les plus frappants des résultats de structure de [Nagb] est le suivant :

Théorème 10 (Nagpal)**.** *Soit F un foncteur de type fini de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k);K)$, où k est un corps de cardinal fini q et K un corps d'une autre caractéristique. Alors il existe une fonction polynomiale f et un entier $N \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\forall n \geq N \qquad \dim_K F(k^n) = f(q^n).$$

L'idée fondamentale introduite par Nagpal dans [Nagb] (qui utilise également du matériel inspiré de travaux antérieurs sur les FI-modules, par exemple) est l'introduction d'un *quotient* τ^{HC} du foncteur de décalage τ (quotient qu'on peut définir sur $\mathbf{M}(A)$, mais aussi sur $\mathbf{P}(A)$ ou $\mathbf{S}(A)$; A peut être un anneau quelconque et aucune restriction de caractéristique sur K n'est nécessaire, pour la seule définition) lié à la restriction à la Harish-Chandra, et qui possède des propriétés particulièrement agréables lorsqu'on travaille sur un corps fini en caractéristique croisée. (Toutefois, comme le note Nagpal, certaines propriétés valent dans un cadre plus général, et l'utilisation de ce foncteur à la Harish-Chandra au-delà de la situation examinée dans [Nagb, Nagc] constitue une piste de recherche particulièrement naturelle à différentes aunes.) Toutefois, son étude est un peu plus délicate que le foncteur de décalage usuel τ et nécessite des préliminaires spécifiques. Contrairement au cas usuel, il n'est pas si facile de déterminer directement les objets de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(A);K)_{gen}$ génériques annulés par le foncteur différence modifié à la Harish-Chandra, et il y en a beaucoup plus que les seuls objets constants.

7 Un aperçu de la structure de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(A);K)_{gen}$ pour $\mathrm{car}(K) = 0$ et A fini, d'après Ksouri [Kso16] et Gan-Li-Xi [GLX]

(Ce qui suit constitue une esquisse dont les détails mériteraient d'être vérifiés !)

Pour l'instant, $\mathcal{C}$ est une petite catégorie vérifiant pour seule condition que les ensembles $\mathcal{C}(a,b)$ sont *finis* pour tous $a,b \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

On dispose alors d'endofoncteurs Φ et Ψ de $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)$ tels que

$$\Phi(F)(t) = K^{\mathcal{C}(t,-)} \underset{\mathcal{C}}{\otimes} F \qquad \text{et} \qquad \Psi(F)(t) = \mathcal{F}(\mathcal{C};K)(K^{\mathcal{C}(-,t)}, F)\ ;$$

Φ est adjoint à gauche à Ψ, l'unité $\Phi\Psi \to \mathrm{Id}$ est un isomorphisme sur les foncteurs $K^{\mathcal{C}(-,t)}$ (qui sont injectifs si K est un corps) et la coünité $\mathrm{Id} \to \Psi\Phi$ est un isomorphisme sur les projectifs $P^t_{\mathcal{C}}$.

Si $\mathcal{C}$ est une pseudo-théorie régulière (peut-être avec une petite hypothèse supplémentaire, en tous cas cela fonctionne sans souci pour $\mathcal{C} = \Theta$, $\mathcal{C} = \mathbf{M}(A)$ ou $\mathbf{S}(A)$ avec A fini), on vérifie que Φ prend ses valeurs dans $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)_{eva}$ et se factorise (de manière unique à isomorphisme près) par le foncteur canonique $\mathcal{F}(\mathcal{C};K) \to \mathcal{F}(\mathcal{C};K)_{gen}$; on notera $\bar{\Phi} : \mathcal{F}(\mathcal{C};K)_{gen} \to \mathcal{F}(\mathcal{C};K)_{eva}$ le foncteur induit et $\bar{\Psi} : \mathcal{F}(\mathcal{C};K)_{eva} \to \mathcal{F}(\mathcal{C};K)_{gen}$ la composée $\mathcal{F}(\mathcal{C};K)_{eva} \to \mathcal{F}(\mathcal{C};K) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{F}(\mathcal{C};K) \to \mathcal{F}(\mathcal{C};K)_{gen}$ (où les premier et dernier foncteurs sont les foncteurs canoniques). Alors $\bar{\Phi}$ est adjoint à gauche à $\bar{\Psi}$.

En utilisant que l'action de $\operatorname{Aut}(y)$ sur $\mathcal{C}(x,y)$, pour $\mathcal{C} = \Theta$, $\mathbf{M}(A)$ ou $\mathbf{S}(A)$ (A fini) est *transitive* (si A est un corps ; sinon on dispose d'une forme faible de cette transitivité qui permet d'obtenir quand même ce qu'on veut), on en déduit que, pour ces catégories sources, si K est un corps de caractéristique nulle (ou plus généralement une $\mathbb{Q}$-algèbre), alors Φ est un foncteur *exact*. On peut normalement en déduire sans trop de peine que $\bar{\Phi}$ et $\bar{\Psi}$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Références

[CEFN14] T. Church, J. S. Ellenberg, B. Farb & R. Nagpal – « FI-modules over Noetherian rings », *Geom. Topol.* **18** (2014), no. 5, p. 2951–2984.

[Dja07] A. Djament – « Foncteurs en grassmanniennes, filtration de Krull et cohomologie des foncteurs », *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* (2007), no. 111, p. xx+213.

[Dja12] A. Djament – « Sur l'homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux », *J. K-Theory* **10** (2012), no. 1, p. 87–139.

[Dja16] A. Djament – « Des propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux », *Fund. Math.* **233** (2016), no. 3, p. 197–256.

[DV19] A. Djament & C. Vespa – « Foncteurs Faiblement Polynomiaux », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2019), no. 2, p. 321–391.

[EML54] S. Eilenberg & S. Mac Lane – « On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation », *Ann. of Math. (2)* **60** (1954), p. 49–139.

[Gab62] P. Gabriel – « Des catégories abéliennes », *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), p. 323–448.

[GLX] W. L. Gan, L. Li & C. Xi – « An application of Nakayama functor in representation stability theory », https ://arxiv.org/pdf/1710.05493.

[HLS93] H.-W. Henn, J. Lannes & L. Schwartz – « The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects », *Amer. J. Math.* **115** (1993), no. 5, p. 1053–1106.

[JP91] M. Jibladze & T. Pirashvili – « Cohomology of algebraic theories », *J. Algebra* **137** (1991), no. 2, p. 253–296.

[Kov92] L. G. Kovács – « Semigroup algebras of the full matrix semigroup over a finite field », *Proc. Amer. Math. Soc.* **116** (1992), no. 4, p. 911–919.

[Kso16] R. Ksouri – « Duality categories », *Appl. Categ. Structures* **24** (2016), no. 3, p. 283–314.

[Kuh94a] N. J. Kuhn – « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I », *Amer. J. Math.* **116** (1994), no. 2, p. 327–360.

[Kuh94b] — , « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II », *K-Theory* **8** (1994), no. 4, p. 395–428.

[Kuh95] — , « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. III », *K-Theory* **9** (1995), no. 3, p. 273–303.

[Kuh15] — , « Generic representation theory of finite fields in nondescribing characteristic », *Adv. Math.* **272** (2015), p. 598–610.

[Naga] R. Nagpal – « FI-modules and the cohomology of modular representations of the symmetric groups », https ://arxiv.org/pdf/1505.04294.pdf.

[Nagb] — , « VI-modules in non-describing characteristic, part I », https ://arxiv.org/pdf/1709.07591.pdf.

[Nagc] — , « VI-modules in non-describing characteristic, part II », https ://arxiv.org/pdf/1810.04592.pdf.

[Pir00] T. Pirashvili – « Hodge decomposition for higher order Hochschild homology », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **33** (2000), no. 2, p. 151–179.

[Pow98] G. M. L. Powell – « The structure of indecomposable injectives in generic representation theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 10, p. 4167–4193.

[PS17] A. Putman & S. V. Sam – « Representation stability and finite linear groups », *Duke Math. J.* **166** (2017), no. 13, p. 2521–2598.

[RWW17] O. Randal-Williams & N. Wahl – « Homological stability for automorphism groups », *Adv. Math.* **318** (2017), p. 534–626.

[SS16] S. V. Sam & A. Snowden – « GL-equivariant modules over polynomial rings in infinitely many variables », *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), no. 2, p. 1097–1158.

[SS17] — , « Gröbner methods for representations of combinatorial categories », *J. Amer. Math. Soc.* **30** (2017), no. 1, p. 159–203.