Le théorème du décalage de Nagpal (groupe de travail *Représentations génériques des groupes linéaires sur un corps fini en caractéristique croisée* dans le cadre de l'ANR ChroK)

Aurélien DJAMENT

Exposé du 19 mars 2019 ; dernière révision : 21/03/2019

Résumé

Dans cet exposé, on établit le théorème du décalage de Nagpal [Naga] et on en cite quelques conséquences. Ces notes ne coïncident pas fidèlement avec l'exposé oral correspondant et contiennent sans doute encore des coquilles, qui sont de la seule responsabilité de l'auteur.

Table des matières

Préambule : l'avenir des mathématiques françaises est menacé par la pénurie de postes permanents et les visées gouvernementales de destruction de la fonction publique, dont le statut garantit la protection des personnels de la recherche contre les pressions politiques et patronales pour l'obtention de résultats de court terme et orientés. Pour cette raison, votre serviteur soutient l'action de grève du 19 mars 2019.

Convention 1. Dans toute la suite, k désigne un corps fini de cardinal q et K un anneau commutatif noethérien dans lequel q est inversible (cas de la caractéristique croisée) — le cas fondamental étant celui où K est un *corps*.

1 Préliminaires

Rappels des notations et foncteurs utiles On note $\mathbf{M}(k)$ la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie *avec injections* de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k);K)$ — ou quelquefois simplement $\mathcal{F}$ — la catégorie des foncteurs de $\mathbf{M}(k)$ vers les K-modules. On note $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k);K)_{gen}$ la catégorie générique de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k);K)$, quotient de cette catégorie de Grothendieck par la sous-catégorie localisante des foncteurs *évanescents*. On rappelle qu'on dispose d'un sous-foncteur exact à gauche κ de l'identité de $\mathcal{F}$, involutif, dont l'image essentielle est constituée des foncteurs évanescents ; κ est la colimite filtrante sur $i \in \mathbb{N}$ des foncteurs $\kappa_i := \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\iota_i} \tau_i)$ où le décalage τ_i est la précomposition par $k^i \oplus$; le conoyau de cette même transformation naturelle ι_i est noté δ_i. Pour $i = 1$ on note simplement τ et δ (et ι). On dispose de réductions à la Harish-Chandra notées $\bar{\tau}_i$ et $\bar{\delta}_i$ (sans indice si $i = 1$) qui sont des quotients de τ_i et δ_i ; deux points fondamentaux (spécifiques à la caractéristique croisée) sont les suivants :

1. les $\bar{\tau}_i$ sont exacts (et les $\bar{\delta}_i$ induisent des endofoncteurs exacts de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k);K)_{gen}$, comme les δ_i) ;
2. κ_i est également le noyau de $\mathrm{Id}_{\mathcal{F}} \to \tau_i \twoheadrightarrow \bar{\tau}_i$ (transformation naturelle notée $\bar{\iota}_i$).

Un outil fondamental introduit par Nagpal [Naga, § 3] et étudié dans le deuxième exposé de ce groupe de travail est les foncteurs semi-induits, que nous appellerons *J-bons* par analogie avec le travail de Powell [Pow98].

Comme dans [Naga], on note $t_0(F)$, pour $F \in \mathcal{F}(\mathbf{M}(k);K)$, le sup dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ des entiers n tels que F soit un quotient d'une somme directe de projectifs à la Yoneda $P^i_{\mathbf{M}(k)} := K[\mathbf{M}(k)(k^i,-)]$ avec $i \leq n$. On dit que F est à support fini [1] si $t_0(F)$ est fini. C'est le cas par exemple si F est de type fini.

Rappels de résultats antérieurs L'un des outils fondamentaux est le suivant [Naga, théorème 4.32], dont nous essaierons d'esquisser la démonstration dans la section 2.

Théorème 2 (Nagpal)**.** *Soit F un foncteur à support fini de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k);K)$. Alors F est J-bon si et seulement si F est d-saturé (i.e. $(\mathbf{R}^\bullet\kappa)(F) = 0$).*

Nous ferons également usage (suivant Nagpal [Naga]) du profond résultat suivant [PS17, SS17].

Théorème 3 (Putman-Sam-Snowden)**.** *La catégorie $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k);K)$ est localement noethérienne.*

Remarque 4. Cet énoncé ne nécessite pas l'hypothèse de caractéristique croisée : seule la noethérianité de K et la finitude de k importent. Votre serviteur soupçonne que, au prix de quelques précautions et complications, on peut établir les résultats de Nagpal [Naga] sans utiliser ce théorème.

Corollaire 5. *Si F est un foncteur de type fini de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k);K)$, alors $\kappa(F)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs non nulles.*

1. On prendra garde que cette notion ne coïncide pas avec celle employée par Nagpal (et par Geoffrey Powell dans le deuxième exposé de ce groupe de travail) sous ce nom, qui signifie que F ne prend qu'un nombre fini de valeurs non nulles. Un foncteur qui vérifie cette dernière propriété est à support fini (en notre sens) *et évanescent* ; un foncteur évanescent de type fini vérifie cette propriété.

Démonstration. Un foncteur évanescent et de type fini ne prend qu'un nombre fini de valeurs non nulles. Le théorème 3 montre que F est noethérien, donc $\kappa(F) \subset F$ également, d'où le résultat. $\square$

Proposition 6. *Il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^\bullet(\kappa) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathbf{R}^\bullet(\kappa) \circ \bar{\tau} \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathbf{R}^\bullet(\kappa) \arrow[r] & \bar{\tau} \circ \mathbf{R}^\bullet(\kappa) \end{tikzcd}$$

dont les flèches horizontales sont induites par la transformation naturelle $\mathrm{Id} \to \bar{\tau}$*. Le même énoncé vaut en remplaçant* κ *par* κ_1*.*

Démonstration. Comme le foncteur $\bar{\tau}$ est exact et que le noyau de la transformation naturelle $\mathrm{Id} \to \bar{\tau}$ est κ_1, comme pour la transformation naturelle $\mathrm{Id} \to \tau$, un raisonnement formel tout à fait analogue à celui de [Dja16, proposition A.3] montre qu'il suffit d'établir l'assertion en degré cohomologique nul.

Comme $\bar{\tau}\kappa$ (resp. $\bar{\tau}\kappa_1$), qui est un quotient de $\tau\kappa$ (resp. $\tau\kappa_1$), prend des valeurs évanescentes (resp. qui annulent la transformation naturelle $\mathrm{Id} \to \tau$), on voit que ce sous-foncteur de $\bar{\tau}$ est inclus dans $\kappa\bar{\tau}$ (resp. $\kappa_1\bar{\tau}$). L'égalité se déduit (pour le cas de κ_1 ; celui de κ est tout à fait analogue) du lemme 7 ci-dessous, en écrivant explicitement les morphismes et en utilisant l'automorphisme de $V \oplus k \oplus k$ échangeant les deux facteurs k (automorphisme dont la seule considération fournit directement la propriété analogue avec τ au lieu de $\bar{\tau}$). $\square$

Dans le lemme suivant, il est important que le cardinal de k soit inversible dans K !

Lemme 7. *Soient* $G := GL_2(k)$*,* H *(resp.* T*) le sous-groupe de* G *constitué des matrices de la forme* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ *(resp.* $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$*) et* M *un* $K[G]$*-module à gauche. Alors l'application* K*-linéaire*

$$M^T \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M_H$$

est injective.

Démonstration. Comme l'ordre de H est inversible dans K, il s'agit de montrer que la composée

$$M^T \hookrightarrow M \xrightarrow{\sum\limits_{h \in H} h} M$$

est injective. Il suffit pour le voir d'établir que l'idéal à gauche I de $K[G]$ engendré par les éléments de la forme $\sum\limits_{h \in H} h.t(h)$, où $t : H \to T$ est une fonction quelconque, est $K[G]$ tout entier.

L'égalité matricielle $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$ fournit

$$\sum_{(x,a) \in k^\times \times k} \begin{bmatrix} a & 1 \\ x & 0 \end{bmatrix} \in I \tag{1}$$

(les crochets, mis plutôt que des parenthèses, signifiant que la somme est prise dans l'algèbre de groupe $K[G]$ et non dans l'anneau $\mathcal{M}_2(k)$).

Utilisant maintenant l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ra & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

avec $a \in k^\times$ et $r \in k$, on voit que

$$\forall r \in k \qquad [1_G] + \sum_{a \in k^\times} \begin{bmatrix} 1+ra & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} \in I$$

donc

$$q[1_G] + \sum_{(r,a)\in k\times k^\times} \begin{bmatrix} 1+ra & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} = q[1_G] + \sum_{(t,a)\in k\times k^\times} \begin{bmatrix} t & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} \in I.$$

Retranchant (1) on en tire $q[1_G] \in I$, donc $[1_G] \in I$, d'où $I = K[G]$ comme souhaité. □

On utilisera aussi la proposition, très simple et générale, suivante :

Lemme 8. *Si F est un foncteur évanescent de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k); K)$ tel que $\kappa_1(F) = 0$, alors $F = 0$.*

Démonstration. La nullité de $\kappa_1(F)$ signifie que le morphisme canonique $F \to \tau(F)$ est injectif. On en déduit aussitôt que tous les morphismes $F \to \tau^n(F)$ (qui s'obtiennent en composant différentes applications du foncteur exact τ à celui-ci) sont tous injectifs, donc que F ne contient aucun élément évanescent, d'où la nullité de F. □

2 Caractérisations (co)homologiques des foncteurs J-bons

Pour établir la caractérisation cohomologique des foncteurs J-bons, on commence par en rappeler une caractérisation homologique [Naga, proposition 3.10], que nous avons déjà vue dans le deuxième exposé.

Pour cela, on rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'un foncteur $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k); K) \to K[GL_n(k)]$-**Mod** associant à F le quotient de $F(n)$ par le sous-module engendré par les images des morphismes $F(n-1) \to F(n)$ induits par toutes les flèches $n-1 \to n$ de $\mathbf{M}(k)$. On note $H_0 : \mathcal{F}(\mathbf{M}(k); K) \to \prod_{n\in\mathbb{N}} K[GL_n(k)]$-**Mod** le foncteur exact à droite dont les composantes sont données ainsi. En le dérivant à gauche, on obtient un foncteur homologique noté H_* comme dans [Naga].

Proposition 9 (Nagpal)**.** *Soit F un foncteur à support fini de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k); K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *F est J-bon ;*
2. *$H_1(F) = 0$;*
3. *$H_i(F) = 0$ pour tout entier $i > 0$.*

Plan de la démonstration du théorème 2. Le fait qu'un foncteur J-bon annule $\mathbf{R}^\bullet(\kappa)$ a été vu dans le deuxième exposé.

Pour la réciproque, Nagpal [Naga, corollaire 4.23] commence par démontrer directement [2] le corollaire 10 ci-dessous — au vu de la proposition précédente, seule la stabilité par conoyaux n'est pas claire. Nagpal fournit un argument explicite à partir d'arguments de stratification.

Une autre étape clef [Naga, lemme 4.30] consiste à montrer que si F est un sous-foncteur d-saturé d'un foncteur J-bon X, alors $t_0(F) \leq t_0(X)$. La démonstration procède par récurrence sur $t_0(X)$, utilise la stabilité par $\bar{\delta}$ des foncteurs d-saturés (qui se déduit de la proposition 6) et des arguments concrets de groupes triangulaires.

Ensuite, Nagpal [Naga, proposition 4.31] montre qu'un foncteur F à support fini et d-saturé possède une résolution (de type projectif) de longueur finie (bornée par $t_0(F)+1$) par des foncteurs J-bons, ce qui se déduit facilement, par récurrence sur $t_0(F)$, de l'étape précédente. Le corollaire 10 permet ensuite de conclure. □

Corollaire 10. *Soit* $0 \to F_1 \to F_2 \to F_3 \to 0$ *une suite exacte courte de* $\mathcal{F}$. *Si deux des trois foncteurs* F_1, F_2, F_3 *sont* J*-bons, il en est de même pour le troisième.*

Remarque 11. La même démonstration que [Dja16, corollaire A.4] montre qu'on a $(\mathbf{R}^i\kappa)(F) = 0$ pour $i < d$ si et seulement si $\kappa\bar{\delta}_{a_1} \dots \bar{\delta}_{a_r}(F) = 0$ pour tout $r \leq d$ et tous entiers $a_1, \dots, a_r$. En particulier, on voit que, si F est à support fini, alors $(\mathbf{R}^i\kappa)(F) = 0$ pour $i > t_0(F)$. Ce résultat est également un corollaire du théorème de décalage de Nagpal (théorème 14 ci-dessous, dans ces notes).

3 Premier théorème de décalage

L'énoncé suivant est une partie du théorème 4.34 de [Naga]. Ce n'est peut-être pas sa partie la plus spectaculaire, mais comme nous le verrons elle a déjà des implications tout à fait non triviales et permet même peut-être d'aborder toute la structure de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k); K)_{gen}$ d'une façon plus rapide que ce que fait Nagpal dans [Nagb].

Théorème 12 (Nagpal)**.** *Soit F un foncteur de type fini de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k); K)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, le foncteur $\bar{\tau}^n(F)$ est J-bon.*

Démonstration. On montre la propriété par récurrence sur $t_0(F)$.

Si F est non nul, on a $t_0(\bar{\delta}(F)) < F$, donc $\bar{\tau}^n\bar{\delta}(F)$ est J-bon pour n assez grand, par l'hypothèse de récurrence.

Par ailleurs, le corollaire 5 (et le fait que le noyau du morphisme naturel $F \to \bar{\tau}(F)$ soit le même que celui de $F \to \tau(F)$, donc un sous-foncteur de $\kappa(F)$) implique que la suite

$$0 \to \bar{\tau}^n(F) \xrightarrow{\bar{\tau}^n(\bar{\iota}(F))} \bar{\tau}^n(\bar{\tau}(F)) \to \bar{\tau}^n(\bar{\delta}(F)) \to 0$$

2. Votre serviteur ne comprend pas bien la démonstration de Nagpal. Il pressent qu'une approche différente permettrait d'établir autrement le théorème de la dérivation saturée mais ne sait pas encore la mettre en œuvre.

est exacte pour n assez grand. Comme $\mathbf{R}^\bullet(\kappa)$ est nul sur un foncteur J-bon (partie facile du théorème 2), on en déduit que le morphisme canonique $\mathbf{R}^i(\kappa)\big(\bar\tau^n(F)\big) \to \mathbf{R}^i(\kappa)\big(\bar\tau^{n+1}(F)\big)$ est, pour n assez grand, un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{N}$. Son noyau est isomorphe à $\bar\tau^n\big(\kappa_1\big(\mathbf{R}^i(\kappa)(F)\big)\big)$, donc à $\kappa_1\big(\mathbf{R}^\bullet(\kappa)\big(\bar\tau^n(F)\big)\big)$, d'après la proposition 6. Par conséquent, le lemme 8 montre que $\mathbf{R}^\bullet(\kappa)\big(\bar\tau^n(F)\big)$ est nul pour n assez grand. On conclut donc en utilisant cette fois la partie difficile du théorème 2. $\square$

Remarque 13. Noter la petite subtilité suivante dans la démonstration précédente (qui est liée spécifiquement à $\bar\tau$ — cela n'arriverait pas avec τ) : la commutation de $\bar\tau$ à κ_1, à κ et à ses dérivés intervient de manière cruciale. Mais on ne peut a priori *pas* trouver d'isomorphisme rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \bar\tau^n(F) \arrow[r, "\bar\iota_{\bar\tau^n(F)}"] \arrow[dr, "\bar\tau^n(\bar\iota_F)"'] & \bar\tau^{n+1}(F) \arrow[d, dashed, "\simeq"] \\ & \bar\tau^{n+1}(F) \end{tikzcd}$$

(l'isomorphisme qui fait commuter le diagramme analogue avec τ au lieu de $\bar\tau$ ne passe pas au quotient — mais cela n'empêche pas les noyaux des deux flèches de coïncider, ce qui est tout ce dont on a besoin ici). Ce phénomène est à rapprocher du fait que la proposition 6 est plus difficile à établir que son analogue pour τ (on a besoin du lemme 7 comme argument concret supplémentaire pour conclure).

4 Théorème de décalage (version complète)

Théorème 14 (Nagpal)**.** *Soit F un foncteur de type fini de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k);K)$.*

1. *Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, le foncteur $\tau^n(F)$ est J-bon.*
2. *Il existe un complexe fini de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k);K)$*

$$0 \to F \to J^0 \to J^1 \to \cdots \to J^m \to 0$$

tel que :

(a) chaque foncteur J^i est J-bon ;

(b) son homologie est évanescente, et même nulle hors d'un nombre fini de valeurs ;

(c) $m \leq t_0(F)$ et $t_0(J^i) \leq t_0(F) - i$ pour tout i (et même $t_0(J^i) < t_0(J^{i-1})$ pour $i > 0$).

Démonstration. On commence par montrer la deuxième assertion. On procède, comme pour la démonstration du théorème 12, par récurrence sur $t_0(F)$. Choisissons un N tel que $\bar\tau^N(F)$ soit J-bon (cf. théorème 12) et posons $J^0 := \bar\tau^N(F)$. Alors $t_0(J_0) \leq t_0(F)$, le morphisme canonique $F \to J^0$ a un noyau évanescent, et son conoyau Q vérifie $t_0(Q) < t_0(F)$ (sauf si $F = 0$, cas trivial). On en déduit donc l'assertion souhaitée en utilisant l'hypothèse de récurrence et le corollaire 5.

La première assertion découle de la première : si n est assez grand pour que l'homologie du complexe soit nulle évaluée sur les entiers $< n$, alors on obtient un complexe *exact*

$$0 \to \tau^n(F) \to \tau^n(J^0) \to \tau^n(J^1) \to \cdots \to \tau^n(J^m) \to 0$$

et chaque $\tau^n(J^i)$ est J-bon. En appliquant le corollaire 10, on en déduit que $\tau^n(F)$ est alors J-bon. □

5 Applications

Théorème 15 (Nagpal)**.** *Supposons que K est un corps. Soit F un foncteur de type fini de $\mathcal{F}$. Il existe une fonction polynomiale $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que* $\dim_K F(k^n) = f(q^n)$ *pour tout entier n assez grand.*

(On peut facilement donner une version plus précise de ce résultat en termes du groupe de Grothendieck des objets noethériens de $\mathcal{F}(\mathbf{M}(k); K)_{gen}$.)

Théorème 16 (Nagpal)**.** *Soit F un foncteur de type fini de $\mathcal{F}$. Alors $(\mathbf{R}^i\kappa)(F)$ est nul pour $i > t_0(F)$, et $(\mathbf{R}^\bullet\kappa)(F)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs non nulles.*

Références

[Dja16] A. Djament – « Des propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux », *Fund. Math.* **233** (2016), no. 3, p. 197–256.

[Naga] R. Nagpal – « VI-modules in non-describing characteristic, part I », https ://arxiv.org/pdf/1709.07591.pdf.

[Nagb] — , « VI-modules in non-describing characteristic, part II », https ://arxiv.org/pdf/1810.04592.pdf.

[Pow98] G. M. L. Powell – « The structure of indecomposable injectives in generic representation theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 10, p. 4167–4193.

[PS17] A. Putman & S. V. Sam – « Representation stability and finite linear groups », *Duke Math. J.* **166** (2017), no. 13, p. 2521–2598.

[SS17] S. V. Sam & A. Snowden – « Gröbner methods for representations of combinatorial categories », *J. Amer. Math. Soc.* **30** (2017), no. 1, p. 159–203.