Représentations génériques des groupes linéaires sur un corps fini en caractéristique croisée, d'après Nagpal — présentation d'un groupe de travail dans le cadre de l'ANR ChroK

Aurélien DJAMENT

Janvier 2019, révision mars 2019

Résumé

Le sujet principal de ce groupe de travail est l'exposition des résultats de Nagpal [Nagb, Nagc]. Il s'agit d'établir des résultats de structure sur l'une des catégories de *représentations génériques* des groupes linéaires sur un corps fini de caractéristique p, ici à coefficients dans un corps de caractéristique différente de p (cas de la caractéristique croisée), plus facile à comprendre que le cas d'égale caractéristique. Des compléments naturels liés à des variantes de cette catégorie sont aussi abordés.

Table des matières

Soit $\Bbbk$ un corps [1] commutatif qui servira de base (pour les produits tensoriels, par exemple).

1 Pseudo-théories EI régulières

Appelons *pseudo-théorie* une catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{C}, +, 0)$ telle que :

1. l'ensemble des objets de $\mathcal{C}$ est $\mathbb{N}$;

1. Pour beaucoup de considérations, on peut travailler en fait sur une base plus générale.

2. l'unité de la structure monoïdale de $\mathcal{C}$ est 0 et l'effet sur les objets de celle-ci est l'addition des entiers naturels ;
3. 0 est objet initial de $\mathcal{C}$.

Nous nous intéresserons à de telles pseudo-théories qui sont de plus des catégories EI, c'est-à-dire des catégories dans lesquelles les endomorphismes sont des automorphismes. Nous supposerons également que $\mathcal{C}$ est *régulière* au sens où les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\mathcal{C}(i,j) = \varnothing$ si $i > j$ (noter que la réciproque est vraie puisque $\mathcal{C}(0,i)$ est toujours non vide et que $\mathcal{C}$ est monoïdale) ;
2. tous les morphismes de $\mathcal{C}$ sont des monomorphismes ;
3. les ensembles $\mathcal{C}(i,j)$ sont tous finis ;
4. la catégorie $\mathcal{C}$-**Mod** des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers les $\Bbbk$-espaces vectoriels est *localement noethérienne.*

(Nous introduisons ici de façon *ad hoc* cette notion, qui pourra être abandonnée ou retravaillée dans le groupe de travail.)

Voici quelques exemples fondamentaux de telles catégories.

1. La catégorie Θ (souvent notée FI) dont les objets sont les entiers naturels et dont les morphismes $i \to j$ sont les fonctions injectives $\mathbf{i} := \{1, \ldots, i\} \to \mathbf{j}$ est une pseudo-théorie régulière. La structure monoïdale provient de la réunion disjointe des ensembles.
2. Soit A un anneau. Notons $\mathbf{M}(A)$ la catégorie (souvent notée VI(A), voire VI si l'anneau A est fixé, comme dans [Nagb]) dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes $n \to m$ sont les applications A-linéaires *injectives* $A^n \to A^m$ possédant un scindement. On en fait une catégorie monoïdale symétrique via la somme directe des A-modules à gauche. Alors $\mathbf{M}(A)$ est une pseudo-théorie EI, qui est régulière si et seulement si l'anneau A est *fini.*
3. Soit A un anneau. Notons $\mathbf{S}(A)$ la catégorie (souvent notée VIC(A), voire VIC si l'anneau A est fixé) dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes $n \to m$ sont les applications A-linéaires *injectives* $A^n \to A^m$ *munies d'un scindement.* On en fait une catégorie monoïdale symétrique via la somme directe des A-modules à gauche. Alors $\mathbf{S}(A)$ est une pseudo-théorie EI, qui est régulière si et seulement si l'anneau A est *fini* (au moins si A est commutatif).

Toutes les propriétés d'une pseudo-théorie EI régulière sont évidentes dans les cas précédents, *excepté la noethérianité locale de leurs représentations sur* $\Bbbk$. Cette propriété a été établie dans [CEFN14] pour la catégorie Θ, dans [SS17] pour $\mathbf{M}(A)$ (A fini) et [PS17] pour $\mathbf{S}(A)$ (A fini, peut-être commutatif).

On rappelle que $\mathcal{C}$-**Mod** est toujours une catégorie abélienne avec de bonnes propriétés : c'est une catégorie de Grothendieck avec assez de projectifs (et d'injectifs), des produits exacts...

Dans toute la suite, $\mathcal{C}$ désigne une pseudo-théorie EI régulière.

Les articles de Nagpal [Nagb, Nagc] étudient les catégories $\mathbf{M}(A)$-**Mod** lorsque A est un corps fini de caractéristique différente de celle de $\Bbbk$ (quelques propriétés sont toutefois valables dans le cas d'égale caractéristique, beaucoup plus délicat). Gan, Li et Xi [GLX] résolvent par l'affirmative une conjecture de

[Nagb] portant sur le cas où $\Bbbk$ est de caractéristique nulle. La catégorie Θ-**Mod** est plus facile à étudier et a déjà fait l'objet d'une littérature abondante.

2 Représentations génériques et cohomologies associées

Un élément de $F(n)$, pour F dans $\mathcal{C}$-**Mod**, est dit *stablement nul* (terminologie de [DV19]) ou *de torsion* (terminologie de [Nagb]) s'il est tué par la flèche $F(n) \to F(n+m)$ induite par $n+(0 \to m)$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Les éléments stablement nuls dans les valeurs de F forment un sous-foncteur de F, noté $\kappa(F)$ selon [DV19] et $\Gamma(F)$ dans [Nagb]. Les foncteurs stablement nuls de $\mathcal{C}$-**Mod** (c'est-à-dire les F tels que l'inclusion $\kappa(F) \subset F$ est une égalité) forment une sous-catégorie *localisante* de $\mathcal{C}$-**Mod** notée $\mathcal{C}$-$\mathbf{Mod}_{\mathrm{tor}}$, de sorte qu'on peut former la catégorie quotient [2] $(\mathcal{C}\text{-}\mathbf{Mod})/(\mathcal{C}\text{-}\mathbf{Mod}_{\mathrm{tor}})$, qui est une catégorie de Grothendieck, qu'on appelle catégorie *générique* de $\mathcal{C}$-**Mod** et qu'on note $\mathcal{C}$-$\mathbf{Mod}_{\mathrm{gen}}$. On dispose d'un foncteur canonique $\pi : \mathcal{C}\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathcal{C}\text{-}\mathbf{Mod}_{\mathrm{gen}}$ qui est exact, essentiellement surjectif, et commute aux colimites ; il possède un adjoint à droite (le foncteur *section*) noté s (S dans [Nagb]). On note $l := s \circ \pi : \mathcal{C}\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathcal{C}\text{-}\mathbf{Mod}$ le foncteur de *localisation* (**S** dans [Nagb]). Les endofoncteurs κ et l de $\mathcal{C}$-**Mod** sont exacts à gauche ; il n'est pas très difficile de voir que leurs foncteurs dérivés à droite coïncident essentiellement à un décalage près [Nagb, Proposition 2.6]. L'étude de ces foncteurs dérivés joue un rôle important dans la théorie. Dans [DV19, Dja16], des propriétés des foncteurs dérivés de s (auxquels ceux de l se ramènent) sont examinées ; dans la littérature de l'école FI-moduliste, en particulier dans [Nagb], ce sont plutôt ceux de κ qui le sont, sous le nom de *cohomologie locale*. Cette terminologie (et certaines des méthodes employées) est inspirée de la géométrie algébrique.

La catégorie $\mathcal{C}$-$\mathbf{Mod}_{\mathrm{tor}}$ n'est pas mystérieuse : c'est une catégorie *localement finie* (engendrée par un ensemble d'objets de longueur finie) ; ses objets simples (qui sont les mêmes que ceux de $\mathcal{C}$-**Mod**) sont des foncteurs *atomiques*, c'est-à-dire que leur *support* [3] (l'ensemble des entiers sur lesquels leur évaluation est non nulle) est un singleton (c'est un fait général sur les catégories EI). Ce qui nous intéresse le plus est la catégorie générique $\mathcal{C}$-$\mathbf{Mod}_{\mathrm{gen}}$.

Du fait de l'hypothèse de noethérianité qu'on a faite, si F est un foncteur de type fini dans $\mathcal{C}$-**Mod**, alors $\kappa(F)$ est à support fini.

3 Foncteurs J-bons

S'inspirant ici de la terminologie de Powell [Pow98] (travaillant dans un contexte de foncteurs entre espaces vectoriels sur un corps fini), si n est un entier naturel et M un $\Bbbk[\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(n)]$-module, on définit un foncteur J_M de $\mathcal{C}$-**Mod** par

$$J_M := \Bbbk[\mathcal{C}(n,-)] \underset{\Bbbk[\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(n)]}{\otimes} M \ ;$$

2. La référence inaugurale pour les catégories quotients de ce type est Gabriel [Gab62].
3. Prendre garde qu'il existe une autre notion de support, qui n'apparaîtra pas dans ces notes.

du fait qu'on a supposé que toutes les flèches de $\mathcal{C}$ sont des *monomorphismes*, le foncteur

$$\Bbbk[\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(n)]\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathcal{C}\text{-}\mathbf{Mod} \qquad M \mapsto J_M$$

(qui n'est autre que l'adjoint à gauche de l'évaluation en n) est *exact*.

Les foncteurs du type J_M sont dits *foncteurs co-Weyl* (*foncteurs induits* dans [Nagb]) ; les foncteurs de $\mathcal{C}$-**Mod** possédant une filtration finie dont les sous-quotients sont isomorphes à des foncteurs co-Weyl sont dits *J-bons* (*semi-induits* pour Nagpal). Pour $\mathcal{C} = \Theta$, ces foncteurs possèdent de nombreuses propriétés remarquables que Nagpal a étudiées dans [Naga] (et que votre serviteur a examinées d'un autre point de vue, davantage inspiré de [Pow98], dans [Dja16, appendice]). Le cas d'une catégorie source comme $\mathbf{M}(A)$ est plus délicat.

Nagpal caractérise d'abord de manière homologique les foncteurs J-bons de la façon suivante (il le fait pour $\mathcal{C} = \mathbf{M}(A)$, mais le raisonnement, très formel, devrait valoir dans un cadre beaucoup plus général). Pour F dans $\mathcal{C}$-**Mod**, on définit un $\Bbbk$-espace vectoriel gradué $h_0(F)$ ($\mathrm{H}_0^{\mathrm{VI}}(F)$ dans [Nagb]) par

$$h_0(F)_n := \mathrm{Coker}\left(\bigoplus_{\mathcal{C}(i,n),i<n} F(i) \to F(n)\right).$$

En dérivant à gauche le foncteur exact à droite h_0 de $\mathcal{C}$-**Mod** vers les $\Bbbk$-espaces vectoriels gradués, on obtient des foncteurs h_*. Nagpal [Nagb, Proposition 3.10] montre qu'un foncteur F de type fini de $\mathcal{C}$-**Mod** est J-bon si seulement si $h_i(F) = 0$ pour tout entier $i > 0$.

Plus subtil et moins formel est le résultat suivant [Nagb, Théorème 4.32], qui caractérise les foncteurs J-bons en termes de cohomologie locale.

Théorème 1 (Nagpal)**.** *Soient A un corps fini de caractéristique différente de celle de $\Bbbk$ et F un foncteur de type fini de $\mathbf{M}(A)$-$\mathbf{Mod}$. Alors F est J-bon si et seulement si $\mathbf{R}^*(\kappa)(F) = 0$.*

4 Décalage, différence et polynomialité

La précomposition par le foncteur $-+1 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un endofoncteur exact de $\mathcal{C}$-**Mod**, appelé *foncteur de décalage* et noté τ suivant [DV19] (Nagpal emploie le symbole Σ). Le morphisme $0 \to 1$ de $\mathcal{C}$ induit une transformation naturelle $\mathrm{Id} \to \tau$ dont le conoyau est noté δ (Δ chez Nagpal) ; son noyau est à valeurs dans les foncteurs stablement nuls. Ces endofoncteurs induisent des endofoncteurs, encore notés de la même façon, par abus, de la catégorie générique ; on dispose ainsi d'une suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Id} \to \tau \to \delta \to 0$$

d'endofoncteurs *exacts* de $\mathcal{C}$-$\mathbf{Mod}_{\mathrm{gen}}$ (tandis que δ n'est exact qu'à droite, dans $\mathcal{C}$-**Mod**). Suivant [DV19], un objet X de $\mathcal{C}$-$\mathbf{Mod}_{\mathrm{gen}}$ est dit *polynomial de degré au plus d* si $\delta^{d+1}(X)$ est nul. La sous-catégorie pleine de ces foncteurs, notée $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C})$, est *bilocalisante* dans $\mathcal{C}$-**Mod** (i.e. épaisse et stable par limites). Dans [DV19], on étudie plusieurs propriétés de ces catégories ; on établit notamment le résultat suivant (dans lequel aucune hypothèse sur l'anneau A n'est nécessaire) :

Théorème 2 (Djament-Vespa)**.** *Pour tout anneau A et tout entier $d \geq 0$, la catégorie quotient $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{M}(A))/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathbf{M}(A))$ est équivalente à la catégorie des modules à droite sur l'algèbre tordue du groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ sur l'anneau $\Bbbk \otimes A^{\otimes d}$, où tous les produits tensoriels sont pris sur $\mathbb{Z}$ et l'action de $\mathfrak{S}_d$ se fait par permutation des facteurs du produit tensoriel $A^{\otimes d}$.*

En particulier, lorsque $\Bbbk \otimes A$ est nul, les seuls foncteurs génériques polynomiaux dans $\mathbf{M}(A)$-$\mathbf{Mod}_{\mathrm{gen}}$ sont les foncteurs constants. Lié à ce phénomène, dans le cas de caractéristique croisée qui est celui de [Nagb], le foncteur δ a tendance à faire grossir la « taille générique » des foncteurs non (stablement) constants, contrairement à ce qui arrive pour $\mathcal{C} = \Theta$, par exemple, et qui rend beaucoup plus aisée l'étude de Θ-$\mathbf{Mod}$. L'idée nouvelle fondamentale qu'introduit Nagpal [Nagb] est la considération d'un foncteur de décalage modifié, plus « petit », qui permet de contourner le problème.

5 Décalage à la Harish-Chandra

On se place ici dans le cas $\mathcal{C} = \mathbf{M}(A)$, où A est un anneau (pour l'instant arbitraire). L'espace vectoriel $\tau(F)(n) = F(n+1)$ est muni d'une action tautologique de $GL_{n+1}(A)$; l'action de $GL_n(A) = \mathrm{Aut}_{\mathbf{M}(A)}(n)$ donnée par la fonctorialité de $\tau(F)$ en est la restriction le long du monomorphisme de groupes

$$GL_n(A) \to GL_{n+1}(A) \qquad M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le sous-groupe triangulaire $T_n(A)$ (isomorphe au groupe additif sous-jacent à A^n) de $GL_{n+1}(A)$ constitué des matrices du type $\begin{pmatrix} 1 & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est normalisé par l'image de ce monomorphisme ; plus généralement, si $f : A^n \to A^m$ est une application linéaire (on n'a pas besoin de l'injectivité, ici), pour tout $g \in T_n(A)$, il existe $h \in T_m(A)$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A^n \oplus A & \xrightarrow{f \oplus A} & A^m \oplus A \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ A^n \oplus A & \xrightarrow{f \oplus A} & A^m \oplus A \end{array}$$

de sorte qu'on définit un quotient de $\tau(F)$ (dans $\mathbf{M}(A)$-$\mathbf{Mod}$), disons $\tau_{HC}(F)$, par

$$\tau_{HC}(F)(n) := F(n+1)_{T_n(A)}$$

(l'indice HC est mis pour *Harish-Chandra* car cette construction constitue une extension immédiate au niveau des catégories de foncteurs de la restriction de Harish-Chandra ; [Nagb] utilise la notation $\bar{\Sigma}$). On note qu'on peut utiliser exactement la même construction si l'on remplace à la source $\mathbf{M}(A)$ par la catégorie usuelle des A-modules libres de rang fini, ou pour $\mathbf{S}(A)$, et qu'il serait intéressant d'examiner ce que peuvent apporter les méthodes de Nagpal dans leur contexte.

On note δ_{HC} le conoyau de la transformation naturelle $\mathrm{Id} \to \tau \twoheadrightarrow \tau_{HC}$.

Si l'on suppose maintenant que l'anneau A est *fini* et de cardinal inversible dans $\Bbbk$, alors les $T_n(A)$ sont des groupes finis d'ordres inversibles dans $\Bbbk$, de sorte que τ_{HC} est un foncteur *exact*. De surcroît, comme le morphisme canonique $F(n) \to \tau(F)(n)$ a une image stabilisée (point par point) par $T_n(A)$, le fait que la composée $\tau(F)(n)^{T_n(A)} \hookrightarrow \tau(F)(n) \twoheadrightarrow \tau(F)(n)_{T_n(A)}$ est un isomorphisme montre que le noyau de $\mathrm{Id} \to \tau \twoheadrightarrow \tau_{HC}$ est κ. De tout cela, on déduit que τ_{HC} et δ_{HC} induisent des endofoncteurs *exacts* de $\mathbf{M}(A)$-$\mathbf{Mod}_{\mathrm{gen}}$.

De plus, un calcul direct montre que le foncteur projectif à la Yoneda $\Bbbk[\mathbf{M}(A)(n,-)]$ est annulé par la $(n+1)$-ème itérée de δ_{HC} : sous réserve de remplacer δ par δ_{HC}, on retrouve un comportement analogue à ce qu'on observe sur Θ-$\mathbf{Mod}$. De fait, dans [Nagb, § 5.1], Nagpal introduit une notion de *q-polynomialité* liée à l'annulation (stable) d'itération de δ_{HC} et l'utilise d'une façon similaire à la notion usuelle de polynomialité.

6 Résultats principaux

Le résultat principal de [Nagb] (*Shift theorem*, 1.2 ou 4.34 dans [Nagb]) est le suivant :

Théorème 3 (Nagpal)**.** *Soit A un corps fini de caractéristique différente de celle de $\Bbbk$. Si F est un foncteur de type fini de* $\mathbf{M}(A)$-$\mathbf{Mod}$*, alors il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\tau^r(F)$ soit J-bon.*

La démonstration repose sur l'utilisation des foncteurs de décalage (usuel et à la Harish-Chandra) et le théorème 1 (qui emploie également ces outils).

Avant de donner l'un des corollaires les plus frappants du théorème précédent, donnons quelques notations. Si F est un foncteur de type fini de $\mathcal{C}$-$\mathbf{Mod}$ (ici, on suppose que $\mathcal{C}$ est une pseudo-théorie EI régulière quelconque), notons

$$\mathrm{d}_F : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto \dim_{\Bbbk} F(n)$$

sa *fonction de dimension.*

Pour $\mathcal{C} = \Theta$, il n'est pas difficile (du moment qu'on sait que Θ-$\mathbf{Mod}$ est une catégorie localement noethérienne) de voir que la fonction d_F est *polynomiale à partir d'un certain rang* pour tout foncteur F de type fini de Θ-$\mathbf{Mod}$.

Corollaire 4 (Nagpal)**.** *Soient A un corps fini de cardinal q inversible dans $\Bbbk$ et F un foncteur de type fini de* $\mathbf{M}(A)$-$\mathbf{Mod}$*. Alors il existe une fonction polynomiale $f : \mathbb{N} \to \mathbf{N}$ telle que $\mathrm{d}_F(n) = f(q^n)$ pour tout entier n assez grand.*

On a aussi un corollaire plus précis du théorème 3 (qui se déduit en fait plus directement de [Nagb, Théorème 4.34 *(b)*] en termes de groupe de Grothendieck :

Corollaire 5. *Sous les hypothèses du théorème 3, notons $G_0(\mathbf{M}(A)\text{-}\mathbf{Mod}_{\mathrm{gen}})$ le groupe de Grothendieck des objets noethériens de* $\mathbf{M}(A)$-$\mathbf{Mod}_{\mathrm{gen}}$*. Alors $G_0(\mathbf{M}(A)\text{-}\mathbf{Mod}_{\mathrm{gen}})$ est un groupe abélien libre dont une base est constituée des classes des foncteurs J_M, où n parcourt $\mathbb{N}$ et M les classes d'isomorphisme de $\Bbbk[GL_n(A)]$-modules simples.*

Un autre résultat remarquable est le suivant [Nagc, Théorème 4.5 (b)] :

Théorème 6 (Nagpal)**.** *Sous les hypothèses du théorème 3, la catégorie* $\mathbf{M}(A)$-$\mathbf{Mod}_{\mathrm{gen}}$ *est localement finie.*

(Par conséquent, la catégorie localement noethérienne $\mathbf{M}(A)$-**Mod** est de dimension de Krull 1, comme Θ-**Mod**.)

La démonstration de ce résultat utilise fortement le théorème 3, mais aussi d'autres ingrédients. Il est peut-être possible de l'obtenir assez directement en utilisant les seuls résultats du premier article de Nagpal [Nagb], ce sera un point à éclaircir.

Dans la dernière section de [Nagb], Nagpal donne d'autres conséquences de ses théorèmes principaux, notamment en termes de cohomologie locale.

Si $\Bbbk$ est de caractéristique nulle, des propriétés supplémentaires sont disponibles. Certaines relèvent de la pure théorie des représentations comme [Nagb, Théorème 5.14]. Les injectifs indécomposables de $\mathbf{M}(A)$-**Mod** (A corps fini, $\Bbbk$ de caractéristique 0) sont entièrement classifiés [Nagb, Théorème 5.23].

En fait, pour $\Bbbk$ de caractéristique nulle, un résultat frappant, qui permet une démonstration beaucoup plus rapide du théorème 6 dans ce cas, est le suivant, dû à Gan, Li et Xi [GLX, théorème 4.2], qui répond positivement à [Nagb, question 1.11] :

Théorème 7 (Gan-Li-Xi)**.** *Si A est un corps fini et que $\Bbbk$ est de caractéristique nulle, alors la catégorie $\mathbf{M}(A)$-$\mathbf{Mod}_{\mathrm{gen}}$ est équivalente à $\mathbf{M}(A)$-$\mathbf{Mod}_{\mathrm{tor}}$.*

Un résultat analogue a été montré avec la catégorie Θ à la source par Sam et Snowden [SS16, Théorème 3.2.1], motivant les considérations précédentes. L'équivalence de catégories correspondante et celle du théorème 7 sont explicites et proviennent de foncteurs de dualité [4] ; le théorème 3 n'est pas nécessaire. Ces équivalences sont déduites dans [GLX] d'un cadre général qui s'applique à d'autres situations.

Dans [Nagc], Nagpal prolonge [Nagb] en donnant notamment une description explicite des objets simples de la catégorie $\mathbf{M}(A)$-$\mathbf{Mod}_{\mathrm{gen}}$ (sous les hypothèses du théorème 3) à partir des $\Bbbk[GL_n(A)]$-modules simples. Cela repose sur des considérations combinatoires délicates que votre serviteur n'a pas bien comprises. Noter que, pour $\Bbbk$ de caractéristique nulle, le travail de Gan-Li-Xi susmentionné fournit une approche bien plus directe de la description des foncteurs génériques simples, mais il semble assez désespéré de l'étendre au cas où $\Bbbk$ est de caractéristique positive.

Références

[CEFN14] T. Church, J. S. Ellenberg, B. Farb & R. Nagpal – « FI-modules over Noetherian rings », *Geom. Topol.* **18** (2014), no. 5, p. 2951–2984.

[Dja16] A. Djament – « Des propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux », *Fund. Math.* **233** (2016), no. 3, p. 197–256.

[DV19] A. Djament & C. Vespa – « Foncteurs Faiblement Polynomiaux », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2019), no. 2, p. 321–391.

[Gab62] P. Gabriel – « Des catégories abéliennes », *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), p. 323–448.

4. Ils présentent sans doute des liens avec la dualité étudiée par Ksouri [Kso16], ce pourrait être un point à préciser dans le groupe de travail.

[GLX] W. L. Gan, L. Li & C. Xi – « An application of Nakayama functor in representation stability theory », https ://arxiv.org/pdf/1710.05493.

[Kso16] R. Ksouri – « Duality categories », *Appl. Categ. Structures* **24** (2016), no. 3, p. 283–314.

[Naga] R. Nagpal – « FI-modules and the cohomology of modular representations of the symmetric groups », https ://arxiv.org/pdf/1505.04294.pdf.

[Nagb] — , « VI-modules in non-describing characteristic, part I », https ://arxiv.org/pdf/1709.07591.pdf.

[Nagc] — , « VI-modules in non-describing characteristic, part II », https ://arxiv.org/pdf/1810.04592.pdf.

[Pow98] G. M. L. Powell – « The structure of indecomposable injectives in generic representation theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 10, p. 4167–4193.

[PS17] A. Putman & S. V. Sam – « Representation stability and finite linear groups », *Duke Math. J.* **166** (2017), no. 13, p. 2521–2598.

[SS16] S. V. Sam & A. Snowden – « GL-equivariant modules over polynomial rings in infinitely many variables », *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), no. 2, p. 1097–1158.

[SS17] — , « Gröbner methods for representations of combinatorial categories », *J. Amer. Math. Soc.* **30** (2017), no. 1, p. 159–203.