Suite spectrale de Beilinson pour la catégorie de Fukaya, d'après Seidel

Notes d'exposé du groupe de travail

Catégorie de Fukaya

Aurélien DJAMENT

mars 2011

Résumé

Le but de cet exposé est de présenter la partie algébrique de la section 6 de [FSS08]. On s'est servi aussi de la section 5 du chapitre I de l'ouvrage [Sei08], qui contient essentiellement les mêmes résultats, avec beaucoup plus de détails et de développements.

NB : le contenu et l'ordre exacts des notes ne coïncident pas forcément avec ceux de l'exposé oral.

Table des matières

Un corps commutatif K est fixé une fois pour toutes dans cet exposé.

1 Échauffement : un analogue classique

Soient n un entier naturel et I une catégorie K-linéaire (i.e. enrichie sur les K-espaces vectoriels) vérifiant les propriétés suivantes (on dira parfois que I est une catégorie ordonnée) :

1. $\operatorname{Ob} I = \{1, \dots, n\}$;
2. $I(i, j) = 0$ pour $i > j$;
3. $I(i, i) = K$ (droite engendrée par l'identité).

On note $\mathcal{C}$ la catégorie des foncteurs contravariants K-linéaires de I vers les K-espaces vectoriels (auxquels il convient de penser comme à des modules à droite sur l' « anneau à plusieurs objets » I). Elle est munie d'une structure monoïdale symétrique, le produit tensoriel (au-dessus de K), qui se calcule au but, et qui définit un bifoncteur qui est exact relativement à chaque argument.

On dispose de deux familles remarquables d'objets de $\mathcal{C}$: les *projectifs standard* $P_i = I(-,i)$, qui satisfont à un isomorphisme canonique $\mathcal{C}(P_i, F) \simeq F(i)$ (lemme de Yoneda ; d'où en particulier un plongement pleinement fidèle $I \to \mathcal{C}$), qui de plus engendrent la catégorie $\mathcal{C}$: tout objet F de $\mathcal{C}$ reçoit une flèche surjective depuis

$$\bigoplus_{\substack{i \\ x \in F(i)}} P_i.$$

On dispose par ailleurs d'objets S_i définis par $S_i(j) = K$ si $j = i$, 0 sinon. Ces objets sont *simples* — i.e. non nuls et sans sous-objet strict non nul.

Proposition 1.1.

1. *Tout objet simple de $\mathcal{C}$ est isomorphe à un S_i et un seul.*
2. *La K-algèbre graduée $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{C}}(S_i, S_i)$ est réduite à K pour tout i.*
3. *On a $\mathrm{Ext}^d(S_i, S_j) = 0$ pour $i < j + d$ (en particulier, $\mathrm{Ext}^*(S_i, S_j) = 0$ si $i < j$).*

Démonstration. Soient T un objet simple de $\mathcal{C}$ et i tel que $T(i) \neq 0$: on en déduit un épimorphisme $P_i \twoheadrightarrow T$. La somme amalgamée du diagramme

$$\begin{tikzcd} P_i \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & T \\ S_i & \end{tikzcd}$$

est non triviale (évaluées sur i, les deux flèches sont des isomorphismes), d'où l'on déduit un isomorphisme $T \simeq S_i$. L'unicité de i est claire.

Pour les assertions suivantes, on observe le fait suivant : si $F \in \mathcal{C}$ est tel que $F(l) = 0$ pour $l > i$, alors il existe un épimorphisme $Q \twoheadrightarrow F$ où :

1. Q est projectif ;
2. Q est une somme directe de P_t avec $t \leq i$, en particulier $Q(l) = 0$ pour $l > i$;
3. $Q(i) \to F(i)$ est un isomorphisme.

En appliquant cela par récurrence, on en déduit que S_i possède une résolution projective du type :

$$\cdots \to Q_1 \to Q_0 \to S_i \to 0$$

avec $Q_0 = P_i$ et Q_l est une somme directe de P_t avec $t \leq i - l$. Cela permet de conclure. □

Filtration canonique d'un objet de $\mathcal{C}$ Elle dérive entièrement du cas du foncteur constant $K \in \mathcal{C}$. Celui-ci est *unisériel*, i.e. l'ensemble de ses sous-foncteurs est totalement ordonné (pour l'inclusion). Plus précisément, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, le générateur $1 \in K(i) = K$ engendre un sous-foncteur $K^{\leq i}$ donné par $K^{\leq i}(j) = K$ si $j \leq i$ et $K^{\leq i}(j) = 0$ si $j > 1$. On prolonge la notation $K^{\leq i}$ en convenant que ce foncteur est nul pour $i \leq 0$ et égal à K pour $i > n$. On a donc une filtration

$$0 = K^{\leq 0} \subset K^{\leq 1} \subset \cdots \subset K^{\leq n-1} \subset K^{\leq n} = K \ ;$$

on vérifie aussitôt qu'on a là la liste de tous les sous-objets de K et que $K^{\leq i}/K^{\leq i-1} \simeq S_i$.

Si F est un objet de $\mathcal{C}$, posons $F^{\leq i} := F \otimes K^{\leq i}$: c'est la troncature de F au-dessous du niveau i. On dispose ainsi d'une filtration finie

$$0 = F^{\leq 0} \subset F^{\leq 1} \subset \cdots \subset F^{\leq n-1} \subset F^{\leq n} = F$$

dont les quotients sont $F^{\leq i}/F^{\leq i-1} \simeq F \otimes S_i \simeq F(i) \otimes S_i$ (évidemment, on n'obtient généralement pas ainsi tous les sous-objets de F ; cela arrive en fait si et seulement si F est un sous-quotient du foncteur constant K).

Suite spectrale associée à un objet filtré (On peut consulter n'importe quel ouvrage d'algèbre homologique à ce sujet, par exemple [Wei94].)

Supposons que C^* est un complexe (avec convention cohomologique : la différentielle est de degré $+1$) d'une catégorie abélienne muni d'une filtration croissante (par des sous-complexes) :

$$\cdots \subset F^{p-1}(C^*) \subset F^p(C^*) \subset F^{p+1}(C^*) \subset \cdots$$

Alors on dispose d'une suite spectrale (cohomologique : la différentielle d^r est de bidegré $(r, 1-r)$) telle que $E^0_{p,q} = F^p(C^{p+q})/F^{p-1}(C^{p+q})$ d'aboutissement $H^*(C^*)$. Dans tous les cas qu'on considérera, la filtration sera finie (et exhaustive), i.e. $F^p(C) = C$ pour p assez grand et $F^p(C) = 0$ pour p assez petit. Sous cette hypothèse, la suite spectrale converge au sens le plus fort qu'on puisse espérer.

Un cas particulier fondamental est le suivant : supposons que, dans une catégorie abélienne avec assez d'objets projectifs, on dispose d'un objet Y muni d'une filtration finie décroissante

$$Y = Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_n = 0$$

et d'un objet X, dont on notera $P_\bullet$ une résolution projective. Cette filtration induit une filtration croissante finie sur le complexe $\mathrm{Hom}(P_\bullet, Y)$ donnée par

$$0 = \mathrm{Hom}(P_\bullet, Y/Y_0) \subset \mathrm{Hom}(P_\bullet, Y/Y_1) \subset \cdots \subset \mathrm{Hom}(P_\bullet, Y/Y_n) = \mathrm{Hom}(P_\bullet, Y)$$

qui donne lieu à une suite spectrale

$$E^0_{p,q} = \mathrm{Hom}(P_{p+q}, Y_{p-1}/Y_p),\ E^1_{p,q} = \mathrm{Ext}^{p+q}(X, Y_{p-1}/Y_p) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(X, Y)$$

On peut de plus décrire la différentielle

$$d^1_{p,q} : \mathrm{Ext}^{p+q}(X, Y_{p-1}/Y_p) \to \mathrm{Ext}^{p+q+1}(X, Y_p/Y_{p+1})$$

qui est donnée par le produit de composition (ou de Yoneda) par l'élément de $\mathrm{Ext}^1(Y_{p-1}/Y_p, Y_p/Y_{p+1})$ que représente la suite exacte courte

$$0 \to Y_p/Y_{p+1} \to Y_{p-1}/Y_{p+1} \to Y_{p-1}/Y_p \to 0.$$

Cette suite spectrale possède des propriétés de naturalité (élémentaires, mais qu'on n'écrira pas).

Application à la filtration canonique On revient au contexte précédent : il suffit de renuméroter la filtration canonique (pour en faire une filtration décroissante) pour obtenir une suite spectrale naturelle en les objets X et Y de $\mathcal{C}$ de la forme

$$E^1_{i,j} = \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{C}}(X, Y^{\leq n-i+1}/Y^{\leq n-i}) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{C}}(X, Y),$$

soit, si Y prend des valeurs de dimension finie,

$$E^1_{i,j} = Y(n-i+1) \otimes \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{C}}(X, S_{n-i+1}) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

2 Suite spectrale de Seidel à la Beilinson

2.1 Cadre (1) : modules A_∞

On part d'une catégorie A_∞ (K-linéaire) $\mathcal{A}$; contrairement aux conventions rencontrées au début de ce groupe de travail, on la supposera *strictement unitaire.* Ainsi ([Sei08], § I.2), $\mathcal{A}$ est une catégorie A_∞ non unitaire munie, pour chaque objet X, d'un morphisme $1_X : X \to X$ (de degré 0) vérifiant les conditions suivantes :

1. $a = \mu^2_{\mathcal{A}}(a, 1_X) = (-1)^{|a|}\mu^2_{\mathcal{A}}(1_Y, a)$ pour tout morphisme homogène (de degré $|a|$) $a : X \to Y$;
2. $\mu^1_{\mathcal{A}}(1_X) = 0$;
3. pour $d > 2$, $0 \leq n < d$ et $a_k : X_{k-1} \to X_k$ dans $\mathcal{A}$ (sans restriction de degré), on a
$$\mu^d_{\mathcal{A}}(a_{d-1}, \dots, a_{n+1}, 1_{X_n}, a_n, \dots, a_1) = 0.$$

On s'intéresse ensuite à la catégorie $\mathbf{Mod} - \mathcal{A}$, notée aussi, ici, $\mathcal{C}$, des $\mathcal{A}$-modules à droite. Un tel module est un foncteur contravariant A_∞ au sens non unitaire (introduit précédemment dans le groupe de travail) de $\mathcal{A}$ vers les complexes de cochaînes [1] de K-espaces vectoriels (catégorie différentielle graduée vue comme une catégorie A_∞ en prenant les compositions supérieures μ^i, $i > 2$, triviales) vérifiant les relations de compatibilité à l'action analogues aux précédentes. Explicitement, un tel module M consiste en des K-espaces vectoriels gradués [2] $M(X)$ pour $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ et des applications

$$\mu^{d+1}_M : M(X_d) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to M(X_0)[1-d]$$

(pour tout entier $d \geq 0$ et toute famille d'objets $(X_0, \dots, X_d)$ de $\mathcal{A}$) telles que $\mu^2_M(-, 1_X) = Id_{M(X)}$, μ^{d+1}_M s'annule pour $d \geq 2$ sur tous les $(d+1)$-uplets dont une des d dernières composantes est une identité et vérifiant l'identité A_∞ qu'on peut trouver par exemple dans [Sei08], p. 19 (équation (1.19)).

Les $\mathcal{A}$-modules à droite forment une catégorie différentielle graduée ; on renvoie à [FSS08], § 6a (ou à [Sei08]) pour la définition des morphismes, de la différentielle et de la composition (qui prennent plusieurs lignes).

On s'intéresse également à la catégorie homotopique C associée à la catégorie différentielle graduée $\mathcal{C}$: c'est une catégorie K-linéaire graduée (ordinaire)

1. Seidel parle de complexes de chaînes, mais avec ses conventions les différentielles des complexes sont de degré +1 !

2. L'article [FSS08] les suppose de dimension finie, mais cette condition semble tout à fait inessentielle (même si des propriétés de finitude sont souvent utiles à des fins particulières).

ayant les mêmes objets ; ses morphismes sont donnés par la cohomologie des complexes de morphismes dans $\mathcal{C}$ (en particulier, les morphismes de degré 0 sont les morphismes de complexes — au sens fort : de degré 0 et respectant les différentielles — à homotopie près). Un des aspects agréables du cadre A_∞ est que dans cette catégorie homotopique, *les quasi-isomorphismes sont déjà inversés* (cf. [Kel01], § 4.2).

Produit tensoriel par un complexe de cochaînes Si Z est un complexe de cochaînes (de K-espaces vectoriels) et M un $\mathcal{A}$-module à droites, on peut définir un $\mathcal{A}$-module à droite $Z \otimes M$ tel que $(Z \otimes M)(X) = Z \otimes M(X)$ comme complexes de cochaînes. Ce produit donne lieu à des isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}^*_C(L, Z \otimes M) \simeq H^*(Z) \otimes \mathrm{Hom}^*_C(L, M)$$

sous une hypothèse de finitude (par exemple Z de dimension finie), d'où l'on déduit en particulier que $Z \otimes M$ et $H^*(Z) \otimes M$ (où $H^*(Z)$ est muni de la différentielle triviale) sont quasi-isomorphes. On pourra consulter [Sei08], § I 3c pour les détails.

Structure triangulée La catégorie C (ou plutôt la sous-catégorie obtenue en ne conservant que les morphismes de degré 0 [3]) est une *catégorie triangulée* (où de plus le foncteur de décalage est une équivalence) : cela provient essentiellement de ce que la catégorie but, les complexes de cochaînes de K-espaces vectoriels, possède une structure triangulée distinguée (cf. [Ver96], chap. II, pour la définition et de nombreux détails dans ce cadre classique). Rappelons simplement la construction essentielle, celle du *cône* d'un morphisme de complexes de cochaînes $f : A^\bullet \to B^\bullet$: c'est le complexe $C(f)^\bullet$ donné par $C(f)^n = A^{n+1} \oplus B^n$ avec la différentielle $C(f)^{n-1} \to C(f)^n$ donnée par la matrice $\begin{pmatrix} -d_A & 0 \\ f & d_B \end{pmatrix}$; $A \to B \to C(f)$ (qu'on peut prolonger par un morphisme vers $A[1]$) est le modèle des triangles distingués. Dans le cas des modules A_∞, si $f \in \mathrm{Hom}^0_C(M, N)$ est un cocycle, son cône $C(f)$ est $M[1] \oplus N$ avec la structure de module A_∞ donnée par

$$\mu^d_{C(f)}((m, n), a_{d-1}, \ldots, a_1) =$$
$$\big(\mu^d(m, a_{d-1}, \ldots, a_1), \mu^d(n, a_{d-1}, \ldots, a_1) + f^d(m, a_{d-1}, \ldots, a_1)\big).$$

On dit que la catégorie A_∞ $\mathcal{A}$ est triangulée ([Sei08], I 3h) si son image par le plongement de Yoneda [4] dans C en est une sous-catégorie triangulée stable par l'inverse du décalage [5].

Un cas particulier de cône que nous utiliserons peu dans cet exposé mais qui semble fondamental dans la théorie est celui de la *torsion algébrique* : si M et N sont deux $\mathcal{A}$-modules, on dispose d'un morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}^*_C(M, N) \otimes M \to N$$

3. Cela dépend de la définition exacte qu'on donne d'une catégorie triangulée, mais n'a pas d'importance sur le fond : il s'agit simplement de décider si l'on incorpore les morphismes gradués dans la structure catégorique initiale ou si on la déduit du foncteur de décalage.

4. On anticipe ici sur ce foncteur qui sera rappelé sommairement dans le paragraphe suivant.

5. Cette définition diffère sans doute de ce qu'on prendrait dans le cadre général, mais ici il semble commode de ne considérer que des catégories triangulées où le décalage est une équivalence.

dont le cône est noté $T_M(N)$ et s'appelle la torsion algébrique de M par N.

On renvoie à [Sei08], I 3 (et début du 5) pour plus de détail sur toutes ces notions.

2.2 Cadre (2) : catégories A_∞ ordonnées

Les notations sont les mêmes que précédemment ; on fait l'hypothèse supplémentaire suivante : il existe un entier $n > 0$ tel que :

1. $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\}$;
2. $\mathrm{Hom}_\mathcal{A}(i, j) = 0$ pour $i > j$;
3. $\mathrm{Hom}_\mathcal{A}(i, i) = K$ (droite engendrée par l'identité).

(Fukaya, Seidel et Smith supposent également que tous les K-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_\mathcal{A}(i, j)$ sont de dimension finie, mais là encore cette hypothèse est inessentielle : il convient simplement, pour certaines assertions utilisant des produits tensoriels, de disposer d'une hypothèse de finitude.)

Comme dans la section 1, on dispose de deux suites d'objets privilégiés dans la catégorie $\mathcal{C}$ des $\mathcal{A}$-modules à droite. D'une part, le plongement de Yoneda $\mathcal{A} \to \mathcal{C}$ procure des objets « projectifs » $\mathcal{P}_i := \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(-, i)$. Pour tout objet M de $\mathcal{C}$, on dispose d'un *quasi-isomorphisme* naturel $M(i) \to \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(\mathcal{P}_i, M)$; par conséquent, $\mathcal{P}_i$ représente l'évaluation en i *dans la catégorie* C. Pour plus de détail (actions sur les morphismes, démonstration de cette version A_∞ du lemme de Yoneda), on renvoie à [Sei08], chap. I, § 1l et 2g.

On dispose également de $\mathcal{A}$-modules à droite $\mathcal{S}_i$ définis par $\mathcal{S}_i(j) = K$ (concentré en degré 0) pour $i = j$, 0 sinon. (On voit facilement qu'il existe une et une seule action sur les morphismes possibles pour en faire un foncteur A_∞.) Comme dans le cas classique de la section 1, ces objets sont simples au sens où ils sont non nuls et n'ont pas de sous-objet non trivial.

Proposition 2.1. *Les complexes* $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j)$ *sont nuls pour* $i < j$ *et de dimension* 1 *(concentrés en degré* 0*, engendrés par l'identité) pour* $i = j$*.*

Démonstration. Un morphisme de degré k de $\mathcal{S}_i$ vers $\mathcal{S}_j$ est une famille d'applications

$$\mathcal{S}_i(l_d) \otimes \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(l_d, l_{d-1}) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(l_0, l_1) \to \mathcal{S}_j(l_0)[k - d] \ ;$$

pour que la source et le but soient non nuls, il faut que

$$j = l_0 \leq l_1 \leq \cdots \leq l_d = i.$$

On déduit alors facilement la proposition de ce que $\mathcal{A}$ est ordonnée. □

2.3 Filtration canonique et suite spectrale de Beilinson (première version)

Elle fonctionne de la même façon que dans le cas élémentaire de la section 1, à ceci près que nous ne la présenterons pas comme produit tensoriel par un objet quelconque de la filtration naturelle sur le foncteur constant, puisque nous n'avons défini le produit tensoriel qu'entre un $\mathcal{A}$-module et un complexe de cochaînes, pas entre deux $\mathcal{A}$-modules [6].

Nous sommes toujours dans la situation d'une catégorie ordonnée du paragraphe précédent.

Étant donné un $\mathcal{A}$-module à droite M, on peut définir des sous-modules $M^{\leq i}$ par $M^{\leq i}(j) = M(j)$ si $j \leq i$, 0 sinon (c'est le caractère ordonné de la catégorie qui permet de le faire) ; on a bien sûr

$$0 = M^{\leq 0} \subset M^{\leq 1} \subset \cdots \subset M^{\leq n-1} \subset M^{\leq n} = M.$$

Les quotients de cette filtration sont donnés par des isomorphismes canoniques

$$M^{\leq i}/M^{\leq i-1} \simeq M(i) \otimes \mathcal{S}_i$$

(le produit tensoriel est celui que nous avons introduit précédemment entre le complexe de cochaînes $M(i)$ et le $\mathcal{A}$-module à droite $\mathcal{S}_i$).

On en déduit une suite spectrale du même type qu'à la section 1 : si L est un autre objet de $\mathcal{C}$, on obtient

$$E^1_{i,j} = \mathrm{Hom}^{i+j}_C(L, M(n-i+1) \otimes \mathcal{S}_{n-i+1}) \Rightarrow \mathrm{Hom}^{i+j}_C(L, M)$$

(ici, au lieu de considérer des résolutions, il convient d'utiliser la structure triangulée, en utilisant que le foncteur Hom transforme un triangle distingué en une suite exacte longue — cf. [Sei08], cor. 3.15 du chap. I). Ce terme E^1 peut encore s'écrire, sous une hypothèse de finitude (par exemple, M à valeurs de dimension finie)

$$E^1_{i,j} \simeq \big(H^*(M(n-i+1)) \otimes \mathrm{Hom}^*_C(L, \mathcal{S}_{n-i+1})\big)^{i+j}$$

ou encore

$$E^1_{i,j} \simeq \big(\mathrm{Hom}^*_C(\mathcal{P}_{n-i+1}, M) \otimes \mathrm{Hom}^*_C(L, \mathcal{S}_{n-i+1})\big)^{i+j}.$$

2.4 Collections exceptionnelles et suite spectrale de Beilinson (deuxième version)

Définition 2.2. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie A_∞ triangulée (éventuellement avec conditions de finitude) et C sa catégorie homotopique. On appelle *collection exceptionnelle* de $\mathcal{C}$ toute suite finie $(Y_1, \ldots, Y_n)$ d'objets de $\mathcal{C}$ telle que :

1. pour tout i, $\mathrm{Hom}_C(Y_i, Y_i) = K$ concentré en degré 0 (engendré par l'identité) ;
2. pour tous $i > j$, $\mathrm{Hom}_C(Y_i, Y_j) = 0$.

La collection exceptionnelle est dite *complète* si elle engendre C comme catégorie triangulée.

6. Il me semble probable qu'on puisse procéder de la même façon, mais je n'ai pas trouvé de référence à un tel produit tensoriel interne aux $\mathcal{A}$-modules dans [Sei08], c'est donc à confirmer. Quoi qu'il en soit, cette présentation comme produit tensoriel n'ajoute manifestement pas grand chose, dans le cas classique comme ici.

Autrement dit, une collection exceptionnelle définit un foncteur A_∞ pleinement fidèle d'une catégorie A_∞ ordonnée $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$. Il se prolonge de manière unique (à isomorphisme près) en un foncteur de $\mathbf{Mod}-\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$ préservant les structures triangulées ; celui-ci envoie les « projectifs » $\mathcal{P}_i$ de $\mathbf{Mod}-\mathcal{A}$ sur Y_i. L'image des simples $\mathcal{S}_i$ est une autre collection exceptionnelle $(Y_1^!, \ldots, Y_n^!)$ de $\mathcal{C}$, dite *duale* (on prendra garde que cette opération de dualité n'est *pas* involutive) de $(Y_1, \ldots, Y_n)$, qui vérifie [7] :

$$\mathrm{Hom}^*_C(Y_i, Y_j^!) = K \text{ (concentré en degré 0) si } i = j,\ 0 \ \text{ sinon.}$$

On peut décrire $(Y_i^!)$ à partir de (Y_i), dans le cas où la collection est complète, à l'aide d'une action explicite du groupe des tresses sur l'ensemble des collections exceptionnelles complètes, construite à partir des *mutations*, elles-mêmes obtenues facilement à partir de la torsion algébrique. On pourra consulter [Sei08], § I 5j-k à ce sujet.

Si la collection est complète, ce prolongement est une équivalence en un sens convenable (op. cit. 5n), ce qui permet de construire une suite spectrale de Beilinson à partir d'une collection exceptionnelle complète et de sa duale. Bien sûr, on peut aussi construire la suite spectrale sans utiliser cette équivalence avec le point de vue des catégories A_∞ ordonnées : c'est ce que fait d'abord Seidel (op. cit. 5l). On peut décrire la différentielle d^1 (voir op. cit. prop. 5.17 et [FSS08] lemme 17 pour un cas particulier spécialement simple).

Références

[FSS08] K. Fukaya, P. Seidel & I. Smith – « Exact Lagrangian submanifolds in simply-connected cotangent bundles », *Invent. Math.* **172** (2008), no. 1, p. 1–27.

[Kel01] B. Keller – « Introduction to A-infinity algebras and modules », *Homology Homotopy Appl.* **3** (2001), no. 1, p. 1–35.

[Sei08] P. Seidel – *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

[Ver96] J.-L. Verdier – « Des catégories dérivées des catégories abéliennes », *Astérisque* (1996), no. 239, p. xii+253 pp. (1997), With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis.

[Wei94] C. A. Weibel – *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

7. Ces relations caractérisent (à quasi-isomorphisme près) la collection duale en fonction de la collection d'origine si et seulement si celle-ci est complète.