L'homologie de la construction barre itérée par l'homologie des foncteurs, d'après Livernet-Richter : démonstration du théorème principal et lien avec l'homologie de Hochschild supérieure de Pirashvili (notes d'exposés au groupe de travail de topologie algébrique Nantes-Angers)

Aurélien DJAMENT

14 et 28 janvier 2010

L'objectif du premier exposé est de donner les grandes lignes de la démonstration (au moins dans le cas $n = 2$) du résultat principal de la prépublication [LR09], à savoir que l'homologie de la construction barre n fois itérée d'une algèbre commutative est naturellement isomorphe aux groupes de torsion sur la catégorie des arbres planaires à n niveaux entre un foncteur explicite ne dépendant que de n et un foncteur explicite dépendant de n et de l'algèbre de départ.

L'outil essentiel pour démontrer ce théorème est la formule de Künneth.

Le deuxième exposé (section 4) fait le lien, d'après l'appendice du travail [LR09], avec l'homologie de Hochschild supérieure de Pirashvili (introduite et étudiée dans [Pir00]).

Table des matières

1 Rappels, notations et énoncé

On désigne comme dans [LR09] par Δ^{epi} la sous-catégorie des surjections de la catégorie simpliciale usuelle Δ ; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Epi_n la catégorie des arbres planaires à n niveaux, dont les objets sont les chaînes de $n-1$ flèches composables de Δ^{epi} : $[r_n] \xrightarrow{f_n} [r_{n-1}] \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_2} [r_1]$ (où $[m] = \{0 < 1 < \dots < m\}$) et dont les morphismes sont les suites d'applications surjectives rendant commutatif le diagramme évident et croissantes entre les fibres des flèches structurales des objets de Epi_n correspondants.

On se fixe dans toute la suite un anneau commutatif (unitaire) de base k, *qui sera supposé de caractéristique* 2 *pour éviter les difficultés de signes*; un Epi_n-module est un foncteur de Epi_n vers la catégorie des k-modules. Si F est un tel module, on pose

$$C^n_{(r_n,\dots,r_1)}(F) = \bigoplus_{a=[r_n]\xrightarrow{f_n}\dots\xrightarrow{f_2}[r_1]\in \mathrm{Epi}_n} F(a)$$

et

$$C^n(F) = \bigoplus_{r_1,\dots,r_n} C^n_{(r_n,\dots,r_1)}(F),$$

complexe gradué par le degré total $\sum_{i=1}^{n} r_i$.

On définit des différentielles

$$\partial_j : C^n_{(r_n,\dots,r_1)} \to C^n_{(r_n,\dots r_j-1,\dots,r_1)}$$

en considérant la somme de toutes les applications induites par les différents morphismes entre les arbres à n niveaux intervenant (qui se décrivent explicitement comme on l'a vu dans l'exposé précédent). La différentielle totale associée sur C^n en fait un complexe dont l'homologie sera notée $H^{[n]}$. On obtient ainsi un foncteur homologique depuis les Epi_n-modules vers les k-modules (car les C^n sont des foncteurs exacts).

Le lien avec l'homologie de la construction barre itérée n fois s'obtient ainsi : à une k-algèbre commutative A, non nécessairement unitaire, on associe un Epi_n-module $\mathcal{L}^n(A)$ défini par la composition du foncteur de Epi_n vers les ensembles finis avec surjections, associant à une chaîne son premier terme ($[r_n]$ avec les notations précédentes), et du foncteur des ensembles finis avec surjections vers les k-modules associant à E le produit tensoriel (sur k) de copies de A indexées par E, avec la fonctorialité habituelle (du foncteur de Loday).

On note par ailleurs b_n le foncteur *contravariant* de Epi_n vers les k-modules associant k à l'arbre $[0] \to \dots \to [0]$ et 0 aux autres.

Théorème 1.1 (Livernet-Richter). *Il existe un isomorphisme de foncteurs homologiques entre $H^{[n]}$ et $\mathrm{Tor}^{\mathrm{Epi}_n}(b_n, -)$.*

On se convainc aisément qu'il suffit de démontrer la nullité de $H_i^{[n]}(\mathrm{Epi}_n^a)$ pour tout entier $i > 0$ et tout arbre (de niveau n) a, où Epi_n^a désigne le projectif $k[\mathrm{Epi}_n(a,-)]$ (qui représente l'évaluation en a par le lemme de Yoneda). En effet, ceci admis, on en déduit la nullité de $H_i^{[n]}(\mathrm{Epi}_n^a)$, pour $i > 0$, sur *tous* les projectifs (qui sont des facteurs directs de sommes directes de foncteurs du type Epi_n^a, et $H^{[n]}$ commute aux sommes directes arbitraires), de sorte qu'il suffit d'établir notre isomorphisme de foncteur *en degré nul.* Ceci provient des deux observations suivantes :

– $H^{[n]}(F)$ est le conoyau du morphisme $F([1] \to [0] \to \cdots \to [0]) \to F([0] \to \cdots \to [0])$ induit par l'unique morphisme $([1] \to [0] \to \cdots \to [0]) \to ([0] \to \cdots \to [0])$;
– le foncteur b_n est le conoyau du morphisme $\mathrm{epI}_n^{[1]\to[0]\to\cdots\to[0]} \to \mathrm{epI}_n^{[0]\to\cdots\to[0]}$ (où l'on note epI_n^a le foncteur contravariant projectif $k[\mathrm{Epi}_n[(-,a)]]$) induit par ce même morphisme.

Le cas $n = 1$, tout à fait élémentaire, est traité en guise d'apéritif dans [LR09]. Le cas crucial est $n = 2$.

2 Démonstration pour $n = 2$

On omettra ici les exposants 2 pour alléger. On s'intéresse d'abord au complexe $C(F)$, où F est un Epi_2-module, par rapport à la seule différentielle $\partial_2 : C_{(r,s)}(F) \to C_{(r-1,s)}(F)$; nous noterons $h_{(r,s)}(F)$ les groupes d'homologie correspondants.

Afin de regraduer ce complexe, notons qu'un objet de Epi_2, c'est-à-dire une flèche de Δ^{epi}, est caractérisé par la suite des cardinaux de ses fibres. Si $b_0, \ldots, b_s$ est une suite finie non vide d'entiers naturels non nuls, on notera $< b_0, \ldots, b_s >$ le morphisme correspondant de Δ^{epi} ; il va de $[r]$ dans $[s]$, où $r+1$ est la somme des b_i et envoie les entiers compris entre $b_0 + \cdots + b_{i-1}$ et $b_0 + \cdots + b_i - 1$ sur i. On notera $\Phi_i(b_0, \ldots, b_s) =< b_0, \ldots, b_s >^{-1}(i) = [b_0+\cdots+b_{i-1}, b_0+\cdots+b_i-1]$. On a ainsi

$$C_{(r,s)}(F) = \bigoplus_{b_0+\cdots+b_s=r+1} F(< b_0, \ldots, b_s >).$$

Notons

$$D_j : F(< b_0, \ldots, b_s >) \to F(< b_0, \ldots, b_j - 1, \ldots, b_s >)$$

(où l'on convient que le terme de droite est nul si $b_j = 1$) la composante de la différentielle ∂_2. Alors D_j est la somme des morphismes induits par

$$\begin{tikzcd}
{[r]} \arrow[rr, "<b_0,\ldots,b_s>"] \arrow[d, "d_i"'] & & {[s]} \arrow[d, "id"] \\
{[r-1]} \arrow[rr, "<b_0,\ldots,b_j-1,\ldots,b_s>"] & & {[s]}
\end{tikzcd}$$

pour $i, i+1 \in \Phi_j(b_0, \ldots, b_s)$ (condition pour que le diagramme commute). On en déduit que les D_j sont des différentielles qui commutent (à chaque fois, seul importe ce qui se passe dans la fibre de j), et que $(H_{(*,s)}, \partial_2)$ est le complexe total du $(s+1)$-complexe $F(< b_0, \ldots, b_s >)$ muni des différentielles $D_0, \ldots, D_s$.

Munis de ces notations et observations, nous pouvons aborder la première étape de la démonstration suivie dans [LR09] :

Proposition 2.1. *Soit $a = [u] \to [v]$ un objet de Epi_2. On a $h_{(r,s)}(\mathrm{Epi}_2^a) = 0$ sauf si $r = u = v$, auquel cas $h_{(r,s)}(\mathrm{Epi}_2^a) = k[\Delta^{\mathrm{epi}}([r], [s])]$.*

Démonstration. On commence par traiter le cas où s est nul.

Dans ce cas, comme $[0]$ est objet final de la catégorie Δ^{epi}, le complexe dont on cherche à calculer l'homologie est un complexe semi-simplicial qui vaut, en degré n, $k[\mathrm{Epi}_2(a,[n]\to[0])]$. Notons $E(a)$ l'ensemble des parties de $[u]$ telles que $x\le y$, $a(x)=a(y)$ et $y\in E$ entraîne $x\in E$. Si $f:[u]\to[v]$ est une fonction définissant un morphisme dans Epi_2 de a vers $[n]\to[0]$, alors $(T_i(f)=f^{-1}([0,i]))_{0\le i\le n}$ est une suite strictement croissante (pour l'inclusion ; le caractère strict provient de la surjectivité de f) d'éléments non vides de $E(a)$ (la condition de battage — préserver l'ordre dans les fibres — dit exactement cela) telle que $T_n(f)=[n]$. Réciproquement, toute telle suite définit un morphisme f de Epi_2 et un seul. De plus, le comportement de cette suite relativement aux opérateurs de face est simple : on a $T_j(d_i\circ f)=T_j(f)$ si $j<i$ et $T_j(d_i\circ f)=T_{j+1}(f)$ si $j\ge i$.

Les observations précédentes montrent que le complexe $(C_{(r,0)}(\mathrm{Epi}_2^a),\partial_2)$ est isomorphe au complexe barre réduit associé à l'ensemble ordonné $E(a)$ privé de ses éléments maximal et minimal, à un décalage de degré près : $h_{(r,0)}(\mathrm{Epi}_2^a)\simeq\widehat{H}_r(E(a))$ ($\widehat{H}$ est ici une notation ad hoc pour cette homologie modifiée d'ensemble ordonné possédant un plus petit et un plus grand élément). Si l'on note $F_j=a^{-1}(j)$ et $c_j=Card\,F_j$, on constate qu'un élément E de $E(a)$ est caractérisé par le nombre d'éléments de $E\cap F_j$ (en effet, tout élément de F_j inférieur à un élément de cet ensemble lui appartient encore, c'est la condition qui définit $E(a)$), ce qui fournit un isomorphisme d'ensembles ordonnés

$$E(a)\simeq\prod_{j=0}^{v}[c_j].$$

On conclut (dans le cas $s=0$) par une formule de Künneth[1] $\widehat{H}_*(A\times B)\simeq\widehat{H}_*(A)\otimes\widehat{H}_*(B)$ (où A et B sont deux ensembles ordonnés avec plus grand et plus petit élément) et le calcul $\widehat{H}_i([n])=0$ sauf pour $i=n=1$, auquel cas on obtient k (la condition $u=v$ est équivalente à dire que tous les c_j valent 1).

On aborde maintenant le cas où s est strictement positif.

La décomposition

$$\mathrm{Epi}_2(a,[r]\xrightarrow{f}[s])=\coprod_{\sigma\in\Delta^{\mathrm{epi}}([v],[s])}\{(\tau,\sigma)\,|\,\tau:[u]\to[r]\text{ surj. croissante dans les fibres}\}$$

est préservée par la différentielle ∂_2 : notre complexe se scinde selon les morphismes $\sigma:[v]\to[s]$ deuxièmes composantes des morphismes de Epi_2. Cette décomposition vaut également pour les sous-complexes introduits en début de section. Nous désignerons à chaque fois par un indice σ les sous-ensembles ou sous-foncteurs correspondants.

Si E est une partie non vide de $[s]$, notons a^E l'arbre obtenu en restreignant a aux fibres indexées par E, i.e. $a^E=(\sigma\circ a)^{-1}(E)\xrightarrow{\bar f}\sigma^{-1}(E)$, et $\sigma^E:\sigma^{-1}(E)\to E$ la restriction de σ (vue comme morphisme de Δ^{epi}), et de même $f^E:f^{-1}(E)\to E$, si $F:[r]\to[s]$ est un objet de Epi_2. L'observation fondamentale est que si E_0,E_1 est une partition de E, on dispose d'une décomposition

$$\mathrm{Epi}_2(a,f)_\sigma=\mathrm{Epi}_2(a^{E_0},f^{E_0})_{\sigma^{E_0}}\times\mathrm{Epi}_2(a^{E_1},f^{E_1})_{\sigma^{E_1}}.$$

[1]Cette formule de Künneth n'est qu'un cas particulier de la formule de Künneth usuelle pour les petites catégories : si E est un ensemble ordonné avec plus petit (resp. grand) élément m (resp. M), on a $\widehat{H}_r(E)=HH_r(E;B_E)$, où B_E est le bifoncteur donné par $B_E(x,y)=k$ si $x=M$ et $y=m$, 0 sinon, et $B_{I\times J}=B_I\boxtimes B_J$.

Cela entraîne une décomposition de notre complexe :

$$(C_{(*,s)}((\mathrm{Epi}_2^a)_\sigma), \partial_2) \simeq \bigotimes_{j=0}^{s} (C_{(*,0)}(\mathrm{Epi}_2^{a^j}), D_j \simeq \partial_2).$$

On conclut alors, par la formule de Künneth et la première partie de la démonstration, que l'homologie $h_{(r,s)}((\mathrm{Epi}_2^a)_\sigma)$ est nulle sauf si tous les a^j sont des identités, i.e. $u = v$, auquel cas elle est isomorphe à k concentré en degré u. Le résultat s'obtient en sommant sur tous les $\sigma \in \Delta^{\mathrm{epi}}([v],[s])$. $\square$

La proposition montre déjà la $H^{[2]}$-acyclicité des foncteurs Epi_2^a lorsque a n'est pas l'identité. Pour traiter le cas $a = [u] \xrightarrow{id} [u]$, on a besoin d'expliciter les isomorphismes donnés par la proposition précédente.

Proposition 2.2. *Soient $r \in \mathbb{N}$ et $a = [r] \to [r] \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Epi}_2$.*

1. *Le k-module libre $h_{(r,0)}(\mathrm{Epi}_2^a)$ est engendré par le cycle*

$$c_r = \sum_{\sigma \in \Sigma_{r+1}} \sigma.$$

2. *Pour tout $0 \leq s \leq r$, le k-module libre $h_{(r,0)}(\mathrm{Epi}_2^a)$ est engendré par les cycles*

$$c_{b_0,\ldots,b_s} = \sum_{(\sigma_0,\ldots,\sigma_s) \in \Sigma_{b_0} \times \ldots \Sigma_{b_s}} (\sigma_0, \ldots, \sigma_s)$$

pour $< b_0, \ldots, b_s > \in \Delta^{\mathrm{epi}}([r],[s])$.

Ici on a représenté un élément de $\mathrm{Epi}_2(a, < b_0, \ldots, b_s >: [r] \to [s])$ par sa première composante (qui détermine la seconde puisque $a = id$), qui est une surjection $[r] \to [r]$, i.e. un élément de Σ_{r+1}, qui doit vérifier une condition de battage correspondant à l'appartenance au sous-groupe produit $\Sigma_{b_0} \times \ldots \Sigma_{b_s}$.

Démonstration. La deuxième assertion résulte de la première et de la démonstration de la proposition précédente.

Pour la première, on note que le complexe $(C_{(*,s)}(\mathrm{Epi}_2^a), \partial_2)$ est nul en degrés $> r$. L'homologie dont on cherche un générateur se réduit dont, en degré maximal r, aux cycles. Comme on sait que cette homologie est un k-module libre de rang 1, il suffit de vérifier que l'élément non nul c_r de degré r est bien un cycle, ce qu'on constate directement. $\square$

Fin de la démonstration du théorème 1.1 (pour $n = 2$). Il s'agit de démontrer la $H^{[2]}$-acyclicité de Epi_2^a pour $a = id_{[r]}$. Pour cela, on détermine la différentielle induite par ∂_1 sur $h_{(r,s)}(\mathrm{Epi}_2^a)$. Le calcul donne :

$$\partial_1(c_{b_0,\ldots,b_s}) = \sum_{i=0}^{s-1} c_{b_0,\ldots,b_i+b_{i+1},\ldots,b_s}.$$

Par conséquent, le complexe $(h_{(r,*)}(\mathrm{Epi}_2^a), \partial_1)$ est isomorphe au complexe barre associé au Δ^{epi}-module projectif Epi_1^r, qui est acyclique (cas $n = 1$). Cela termine la démonstration. $\square$

3 Aperçu du cas général

La démonstration, qui procède par récurrence sur n, est entièrement analogue au cas $n = 2$, à l'aide du résultat suivant (proposition 4.7 de [LR09]) :

Proposition 3.1. *Soient $a = [r_n] \to [r_{n-1}] \to \cdots \to [r_1]$ un objet de Epi_n et $\bar{a} = [r_{n-1}] \to \cdots \to [r_1]$ sa réduction à Epi_{n-1}. Notons $h_{s_n,\dots,s_1}(F)$ l'homologie du complexe $(C^n_{s_n,\dots,s_1}(F), \partial_n)$. Alors $h_{s_n,\dots,s_1}(\mathrm{Epi}^a_n)$ est nul sauf si $r_n = r_{n-1} = s_n$, auquel cas cette homologie est isomorphe à $C^{n-1}_{s_{n-1},\dots,s_1}(\mathrm{Epi}^{\bar{a}}_{n-1})$. De plus, il s'agit d'un isomorphisme de $n-1$ complexes, si l'on munit cette homologie des différentielles induites par ∂_j pour $j < n$.*

4 Lien avec l'homologie de Hochschild supérieure à la Pirashvili

On se propose dans ce deuxième exposé de démontrer, comme l'appendice de [LR09] (mais par une méthode différente, plus explicite), l'isomorphisme entre l'homologie de la construction barre n-itérée d'une algèbre commutative sans unité et l'homologie de Hochschild supérieure (due à Pirashvili), associée à la sphère $\mathbb{S}^n$, de l'algèbre commutative augmentée correspondante, à un décalage de degré de n près.

On commence par faire quelques rappels de l'article [Pir00] introduisant l'homologie de Hochschild supérieure.

On désigne par Γ la catégorie des ensembles finis pointés, ou plutôt son squelette composé des ensembles $[n]$ (pour $n \in \mathbb{N}$) pointés par 0. On note également Ω la catégorie des ensembles finis avec les surjections pour morphismes. Il existe une équivalence ω de la catégorie des Ω-modules (i.e. des foncteurs d'Ω vers les k-modules) vers celle des Γ-modules, donnée sur les objets par

$$\omega(X)(E,*) = \bigoplus_{A \subset E \setminus \{*\}} X(A)$$

(cf. [Pir00]).

Un cas particulier fondamental de Γ-module est le *foncteur de Loday* $\mathcal{L}(A)$ associé à une k-algèbre commutative unitaire augmentée A, qui est donné par $\mathcal{L}(A)(E) = k \underset{A}{\otimes} A^{\otimes E}$, où k est un A-module via l'augmentation, la structure de A-module sur $A^{\otimes E}$ est donnée par le point de base de E et la fonctorialité en E provient de ce que le produit tensorielle est une somme catégorique parmi les k-algèbres associatives, unitaires et commutatives.

Une version réduite, pour les Ω-modules, est donnée à partir de la k-algèbre non unitaire $\bar{A}$ noyau de l'idéal d'augmentation : on a $\mathcal{L}(A) \simeq \omega(\bar{\mathcal{L}}(\bar{A}))$, où $\bar{\mathcal{L}}(\bar{A})(E) = A^{\otimes E}$ (la fonctorialité étant donnée de la même façon que pour le foncteur $\mathcal{L}$, la restriction aux surjections assurant qu'elle s'étend malgré l'absence d'unité).

Si X est un ensemble simplicial de type fini pointé, c'est-à-dire un foncteur $\Delta^{op} \to \Gamma$, on note, à la suite de [Pir00], $C^X_*(F)$, pour tout Γ-module F, le complexe de Moore (sur k) associé au k-module simplicial $F \circ X$, son homologie est notée $H^X_*(F)$. Lorsque X est la sphère $\mathbb{S}^n$ (on précisera par la suite quel en est le modèle simplicial approprié pour nos considérations), on adoptera les notations $C_*^{[n]}(F)$ et $H_*^{[n]}(F)$. L'homologie de Hochschild supérieure d'une k-algèbre commutative augmentée A est par définition $HH^{[n]}(A) := H^{[n]}(\mathcal{L}(A))$.

Le cas $n = 1$ redonne exactement le complexe de Hochschild ordinaire (à coefficients dans k) en prenant pour cercle pointé $\mathbb{S}^1$ le foncteur $\Delta^{op} \to \Gamma$ donné par $E \mapsto (E, \min E)$ sur les objets et $f \mapsto f^*$ sur les morphismes, où $f^*(j) = \min\{i \,|\, f(i) \geq j\}$ si cet ensemble est non vide, et est égal au plus petit élément sinon.

On a là encore une variante réduite : pour tout ensemble simplicial de type fini pointé, le foncteur composé de $\Delta^{\mathrm{epi}} \to \Delta^{op}$ donné par l'identité sur les objets et $f \mapsto f^*$ (même formule que précédemment) sur les morphismes et de X envoie toute flèche de Δ^{epi} sur une surjection de Γ (car le premier foncteur arrive dans les épimorphismes de Δ^{op}, i.e. les injections de Δ, qui sont tous scindés), il induit donc un foncteur de Δ^{epi} vers Ω (par oubli du point de base). En le composant avec un Ω-module donné T, on obtient un Δ^{epi}-module qui procure (cf. § 1 de [LR09]) un complexe que nous noterons $\bar{C}_*^X(T)$ et dont nous désignerons par $\bar{H}_*^X(T)$ l'homologie. On notera, par analogie avec la situation précédente, $\bar{H}^{[n]}$ pour $\bar{H}^{\mathbb{S}^n}$ et $\bar{HH}^{[n]}(A)$ pour $\bar{H}^{[n]}(\bar{\mathcal{L}}(A))$, où A est une k-algèbre commutative (sans unité).

On vérifie que, en conservant les notations précédentes, le complexe $\bar{C}_*^X(T)$ coïncide avec un décalage de degré de 1 avec le complexe *réduit* associé au k-module simplicial $\omega(T) \circ X$; par conséquent, on dispose d'un isomorphisme naturel $\bar{H}_i^X(T) \simeq H_{i+1}^X(\omega(T))$. Dans le cas où $X = \mathbb{S}^1$ et $T = \bar{\mathcal{L}}(A)$, cette observation se réduit à celle du § 1 de [LR09] sur le complexe de Hochschild en terme de complexe barre réduit.

Proposition 4.1 (Berger, Fresse, Livernet-Richter). *Pour toute k-algèbre augmentée A d'idéal d'augmentation $\bar{A}$ et tous entiers n et i, il existe un isomorphisme naturel*

$$H_i(B^n(\bar{A})) \simeq HH_{i+n}^{[n]}(A)$$

où B désigne la construction barre.

On donne maintenant les grandes lignes de la démonstrations, en s'appuyant sur [Ber07], § 3, qui introduit plusieurs catégories analogues aux Epi_n.

Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie. On dispose d'un foncteur

$$\mathbf{Ens}^{op} \to \mathbf{Cat} \qquad E \mapsto \mathcal{A}^E.$$

Si maintenant on suppose que $\mathcal{A}$ possède un objet nul (i.e. initial et final), noté 0, on dispose d'une variante :

$$\Phi_{\mathcal{A}} : \Gamma^{op} \to \mathbf{Cat} \qquad E \mapsto \mathcal{A}^{E\setminus *} \simeq \{\varphi \in \mathcal{A}^E \,|\, \varphi(*) = 0\}.$$

Berger définit [2] la catégorie produit en couronne, notée $\Gamma^{op} \int \mathcal{A}$, de Γ^{op} et $\mathcal{A}$ comme la construction de Grothendieck associée à ce foncteur. Autrement dit, ses objets sont les couples formés d'un objet E de Γ^{op} et d'un objet de $\Phi_{\mathcal{A}}(E)$ et les morphismes $(E, X) \to (E', X')$ sont les couples formés d'un morphisme $\alpha : E \to E'$ de Γ^{op} et d'un morphisme $\Phi_{\mathcal{A}}(\alpha)(X) \to X'$ de $\Phi_{\mathcal{A}}(E')$.

[2] On peut s'affranchir de l'hypothèse que $\mathcal{A}$ possède un objet nul, mais il faut modifier la définition (ce qui n'est pas difficile — cf. [Ber07]).

En précomposant $\Phi_{\mathcal{A}}$ avec le foncteur canonique $\gamma : \Delta \to \Gamma^{op}$ (représentant le cercle pointé $\mathbb{S}^1$), on peut définir une construction analogue $\Delta \int \mathcal{A}$. De plus, γ induit une transformation naturelle $\gamma \int \mathcal{A} : \Delta \int \mathcal{A} \to \Gamma^{op} \int \mathcal{A}$.

Les objets des catégories $\Delta \int \mathcal{A}$ comme $\Gamma^{op} \int \mathcal{A}$ sont les suites finies d'objets de $\mathcal{A}$; la composition fait intervenir celle de Δ ou Γ^{op} combinée à celle de $\mathcal{A}$ par la même formule que pour le produit en couronne usuel de groupes.

On dispose de surcroît d'un foncteur

$$\Gamma^{op} \int \Gamma^{op} \to \Gamma^{op} \qquad (E_1, \dots, E_n) \mapsto E_1 \vee \dots \vee E_n,$$

très analogue au foncteur $\mathrm{Epi}_n \to \Omega \quad ([r_n] \to \dots \to [r_1]) \mapsto [r_n]$.

En itérant ce foncteur, on obtient, pour tout $i \in \mathbb{N}$, un foncteur $\alpha_i : \Gamma^{\int i} \to \Gamma$ (on note $\Gamma \int \mathcal{A}$ pour $(\Gamma^{op} \int \mathcal{A}^{op})^{op}$).

D'autre part, pour toute petite catégorie $\mathcal{A}$ avec objet nul, on dispose d'un foncteur

$$\Delta \times \mathcal{A} \to \Delta \int \mathcal{A} \qquad ([n], A) \mapsto (A, \dots, A)$$

(où A est répété n fois) ; en itérant on en déduit des foncteurs $\delta_i : \Delta^{\times i} \to \Delta^{\int i}$. On dispose de manière analogue de foncteurs $\delta_i^{\Gamma} : \Gamma^{\times i} \to \Gamma^{\int i}$.

Le point fondamental est le diagramme commutatif[3]

$$\begin{tikzcd}
(\Delta^{op})^{\times i} \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d] & (\Delta^{op})^{\int i} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\Gamma^{\times i} \arrow[r, "\delta_i^{\Gamma}"] & \Gamma^{\int i} \arrow[r, "\alpha_i"] & \Gamma
\end{tikzcd}$$

(dont les flèches verticales sont induites par le cercle standard) et la réalisation géométrique des foncteurs $(\Delta^{op})^{\int i} \to \Gamma$, qui généralise celle des ensembles simpliciaux pointés. De fait :

- l'ensemble simplicial obtenant en précomposant par la diagonale le foncteur $(\Delta^{op})^i \to \Gamma$ est un modèle du produit contracté de i copies du cercle pointé $\mathbb{S}^1$, donc de la sphère $\mathbb{S}^i$ (suivre le chemin inférieur) ; l'homologie du complexe total associé au i-complexe simplicial correspondant (après composition avec le foncteur de Loday) est donc (à isomorphisme naturel) l'homologie de Hochschild généralisée associée à $\mathbb{S}^i$ (utiliser le théorème d'Eilenberg-Zilber généralisé — voir par ex. le th. 2.4 de [GJ99], chapitre IV (p. 205), attribuée à Dold-Puppe par Goerss-Jardine et attribuée à Cartier par Dold-Puppe) ;
- par conséquent, il suffit de vérifier que l'homologie du complexe défini sur les arbres de la même façon que dans [LR09] sur un $(\Delta^{op})^{\int i}$-module est naturellement isomorphe à l'homotopie de sa réalisation géométrique (le foncteur de réalisation géométrique sur cette catégorie se factorise par δ_i — cf. proposition 3.9 de [Ber07]).

Ce dernier point doit pouvoir se vérifier de manière directe, analogue à celle que l'homotopie d'un groupe abélien simplicial se calcule comme on sait, en comprenant très soigneusement les considérations sur la réalisation géométrique de

[3]La catégorie Δ ne possède pas d'objet initial, il faut donc utiliser la généralisation (immédiate en écrivant explicitement ce qu'est la construction de Grothendieck dans ce cas) à une catégorie $\mathcal{A}$ arbitraire dans ce qui précède.

[Ber07]. Une alternative consiste à comparer les deux foncteurs homologiques : par le résultat principal de [LR09], il suffit essentiellement de vérifier que l'homotopie de la réalisation géométrique d'un $(\Delta^{op})^{\int i}$-module est un foncteur homologique universel (il y a aussi quelques points à régler avec le passage aux catégories de surjections, mais ce n'est pas une difficulté majeure, la factorisation épi/mono dans Δ rendant les choses gentilles). Cela provient essentiellement de ce que la réalisation géométrique d'un objet représentable est contractile.

Références

[Ber07] C. Berger – « Iterated wreath product of the simplex category and iterated loop spaces », *Adv. Math.* **213** (2007), no. 1, p. 230–270.

[GJ99] P. G. Goerss & J. F. Jardine – *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[LR09] M. Livernet & B. Richter – « An interpretation of E_n-homology as functor homology », arXiv :0907.1283, 2009.

[Pir00] T. Pirashvili – « Hodge decomposition for higher order Hochschild homology », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **33** (2000), no. 2, p. 151–179.