La cohomologie des groupes linéaires sur les corps finis, d'après Quillen

Aurélien DJAMENT

mai 2017

Résumé

Ces notes d'exposés de groupe de travail visent à présenter la fin de la démonstration (en excluant la caractéristique 2, un petit peu plus difficile techniquement pour certains résultats) des théorèmes principaux de [Qui72], essentiellement les sections 8 et 11. Une autre référence qui reprend ces résultats et la plupart des démonstrations est [Knu01, § 1.1].

Table des matières

On se donne un corps fini k de caractéristique p et de cardinal $q = p^d$; l désigne un nombre premier, on s'intéresse à l'homologie $H_*(GL_n(k); \mathbf{F}_l)$ ou à la cohomologie $H^*(GL_n(k); \mathbf{F}_l)$ (qui est duale) pour tout entier $n \geq 0$. Les méthodes diffèrent totalement selon que $p \neq l$ (cas, dit de caractéristique croisée, dont on s'est contenté dans toutes les séances précédentes du groupe de travail et qui est le seul pour lequel on puisse déterminer entièrement ces espaces vectoriels de (co)homologie) ou $p = l$ (cas dit d'équicaractéristique), où l'on ne connaît le calcul de cette (co)homologie que si n ou d est assez grand (par rapport au degré (co)homologique). Dans le cas de caractéristique croisée, les résultats sont légèrement plus difficiles lorsque $l = 2$, nous nous contenterons du cas où l est impair.

Sauf mention expresse du contraire, la (co)homologie sans indication de coefficients est prise sur $\mathbf{F}_l$.

1 Énoncé des théorèmes principaux en caractéristique croisée

On note r l'ordre de q dans $\mathbf{F}_l^\times$. Ainsi l'extension $k(\mu_l)$ obtenue en adjoignant une racine primitive l-ème de l'unité à k est galoisienne de degré r ; son groupe de Galois $\pi := \mathrm{Gal}(k(\mu_l)/k)$ est cyclique d'ordre r, engendré par le morphisme de Frobenius $t \mapsto t^q$. Le groupe multiplicatif $C := k(\mu_l)^\times$ est cyclique d'ordre $q^r - 1$.

On dispose d'un monomorphisme de groupes $C = GL_1(k(\mu_l)) \hookrightarrow GL_r(k)$ bien défini à conjugaison près (il dépend du choix d'une base de $k(\mu_l)$ sur k), d'où un morphisme $H_*(C) \to H_*(GL_r(k))$. Ce morphisme est équivariant pour l'action de π, canonique sur C est triviale au but, car l'action de tout élément de π est induite par une conjugaison dans $GL_r(k)$, il induit donc un morphisme $H_*(C)_\pi \to H_*(GL_r(k))$.

Soit $n \in \mathbb{N}$; effectuons la division euclidienne $n = mr + e$ $(0 \le e < r)$. On a un monomorphisme de groupes $C^m \hookrightarrow GL_r(k)^m \hookrightarrow GL_{mr}(k) \hookrightarrow GL_n(k)$ bien défini à conjugaison près. Le morphisme qu'il induit en (co)homologie est équivariant pour l'action du produit en couronne $\Sigma_m \wr \pi := \Sigma_m \ltimes \pi^m$ (où $GL_n(k)$ est encore muni de l'action triviale) pour la même raison que précédemment. On obtient donc un morphisme $H_*(C^m)_{\Sigma_m \wr \pi} \to H_*(GL_n(k))$.

Théorème 1 (Quillen, *Corollary* de [Qui72], page 571)**.** *Pour $l \neq 2$ et $l \neq p$, le morphisme $H_*(C^m)_{\Sigma_m \wr \pi} \to H_*(GL_n(k))$ est un isomorphisme. Dualement, le morphisme $H^*(GL_n(k)) \to H^*(C^m)^{\Sigma_m \wr \pi}$ induit par l'inclusion $C^m \hookrightarrow GL_n(k)$ est un isomorphisme.*

Noter qu'on dispose d'un isomorphisme canonique

$$H_*(C^m)_{\Sigma_m \wr \pi} \simeq \big((H_*(C)_\pi)^{\otimes m}\big)_{\Sigma_m},$$

par la formule de Künneth. On a

$$H_*(C)_\pi \simeq H_*\big(\mathbb{Z}/(q^r - 1)\big)_{\mathbb{Z}/r},$$

où le générateur canonique de $\mathbb{Z}/r$ opère par multiplication par q sur $\mathbb{Z}/(q^r - 1)$.

Comme le nombre premier l divise $q^r - 1$, le $\mathbf{F}_l$-espace vectoriel $H_i\big(\mathbb{Z}/(q^r - 1)\big)$ est de dimension 1 pour tout $i \in \mathbb{N}$; le générateur canonique de $\mathbb{Z}/r$ opère dessus par multiplication par q^a, où a est la partie entière de $\frac{i+1}{2}$ (cf. le calcul classique fonctoriel de l'homologie des groupes cycliques). Par conséquent, $H_i(C)_\pi$ est de dimension 1 si i est de la forme $2jr$ avec $j \in \mathbb{N}$ ou $2jr - 1$ avec $j \in \mathbb{N}^*$ et nul sinon. Cela fournit des éléments $\xi_j \in H_{2jr}(GL_r(k))$ (pour $j \in \mathbb{N}$) et $\eta_j \in H_{2jr-1}(GL_r(k))$ (pour $j \in \mathbb{N}^*$).

Le $\mathbf{F}_l$-espace vectoriel bigradué $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_*(GL_n(k))$ possède une structure d'algèbre anti-commutative (à l'aide des morphismes de groupes usuels $GL_i(k) \times GL_j(k) \to GL_{i+j}(k)$). Outre les éléments ξ_j et η_j, on utilise le générateur canonique ε de $H_0(GL_1(k))$. On a ainsi $\xi_0 = \varepsilon^r$.

Une forme équivalente du théorème 1, qui présente l'avantage d'être valable aussi pour $l = 2$ (toujours en caractéristique croisée) et de donner davantage de structure multiplicative, est la suivante (c'est ce par quoi Quillen commence dans le § 8 de [Qui72]).

Théorème 2 (Quillen, *Theorem 3* de [Qui72], page 570)**.** *Si $l \neq p$, le morphisme canonique d'algèbres*[1]

$$S(\varepsilon, \xi_1, \xi_2, \dots) \otimes \Lambda(\eta_1, \eta_2, \dots) \to \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_*(GL_n(k))$$

(où S désigne l'algèbre symétrique et Λ l'algèbre extérieure) est un isomorphisme.

Corollaire 3 (Quillen, *Theorem 5* de [Qui72], page 576)**.** *Le morphisme canonique $H_*(GL(k)) \to H_*(F\Psi^q)$ est un isomorphisme.*

Le théorème 1 permet de décrire la comultiplication sur $H_*(GL_n(k))$ — ou, dualement, la multiplication sur $H^*(GL_n(k))$ — en caractéristique croisée, pour $l \neq 2$; on peut aussi le faire pour $l = 2$ à l'aide du théorème 2. Le résultat précis et sa démonstration sont donnés par Quillen dans [Qui72, théorème 4, page 575] ; on les omettra ici. Un autre complément traité par Quillen mais qu'on n'abordera pas est l'examen de ce qu'induit en homologie (en caractéristique croisée) le morphisme $GL_n(k) \to GL_n(K)$ lorsque K est une extension algébrique de k, on renvoie à [Qui72, § 10] (et à [Qui71, théorème 1.6] pour le cas stable).

2 Sous-groupes de Sylow des $GL_n(k)$

(Pour ces résultats élémentaires et classiques, on pourra consulter par exemple [AM04], chap. VII, § 4. On prendra garde que le théorème 4.1.a de cette référence est faux pour les 2-Sylow, par exemple pour $GL_2(\mathbf{F}_3)$.)

Le groupe $GL_n(k)$ est d'ordre

$$\prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} (q^i - 1).$$

On voit ainsi une différence de pure théorie des groupes entre le cas de caractéristique croisée et d'équicaractéristique : en équicaractéristique, les p-Sylow de $GL_n(k)$ sont d'ordre $q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Le sous-groupe $U_n(k)$ des matrices triangulaires supérieures strictes de $GL_n(k)$ est un tel sous-groupe ; noter que son normalisateur est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $GL_n(k)$, qui est le produit semi-direct de $U_n(k)$ par le sous-groupe $(k^\times)^n$ des matrices diagonales. On se servira de cela dans la section 4.

Passons au cas de caractéristique croisée : là encore, on va voir sur les Sylow que le cas $l = 2$ est particulier (et un peu plus pénible que le cas l impair). On note que l ne divise $q^i - 1$ que si i est multiple de r. On en déduit que, si m désigne le quotient de n dans la division euclidienne par r, le sous-groupe $GL_m(\mathbf{F}_{q^r})$ de $GL_n(k)$ (bien défini au choix d'une $k = \mathbf{F}_q$-base de $\mathbf{F}_{q^r}$ près) est d'indice premier à l. Cela permet de se ramener au cas $r = 1$, i.e. $l | q - 1$.

Proposition 4. *Supposons que le nombre premier l est impair et divise $q - 1$. Notons $s = v_l(q-1) \geq 1$ la valuation l-adique de $q - 1$. Alors le sous-groupe $\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/l^s$ de $GL_n(k)$ (où Σ_n correspond aux matrices de permutations et $\mathbb{Z}/l^s$ est plongé dans le groupe multiplicatif $k^\times \simeq \mathbb{Z}/(q-1)$) est d'indice premier à l.*

1. Pour $l = 2$, il y a une vérification à effectuer pour s'assurer d'un morphisme bien défini, à savoir que les classes η_i sont envoyées sur des éléments de carré nul. Quillen le fait dans le lemme 11 de [Qui72] (page 572).

Démonstration. On a $v_l(q^i-1)=s+v_l(i)$ (c'est ce point qui tombe en défaut pour $l=2$) comme le montrent la formule du binôme et un peu d'arithmétique élémentaire (cf. [AM04], lemme 4.2 ; on commence par se ramener au cas où i est une puissance de l grâce à l'identité $q^{l^j u}-1=(q^{l^j}-1)(1+q+\dots+q^{u-1})$, puis par récurrence au cas où $i=p$, qu'on traite par les arguments usuels de divisibilité des coefficients binomiaux). Il s'ensuit que la valuation l-adique de l'ordre de $GL_n(k)$ est

$$\sum_{i=1}^{n}(s+v_l(i))=sn+v_l(n!),$$

d'où le résultat. □

Corollaire 5. *Supposons que l est distinct de p et de 2. Avec les notations de la section 1, $GL_n(k)$ possède un l-Sylow inclus dans $\Sigma_m\wr C$.*

Comme les l-Sylow des groupes symétriques s'obtiennent comme produits directs de produits en couronne itérés de groupes cycliques d'ordre l, le résultat précédent permet de donner une description explicite des l-Sylow de $GL_n(k)$ (pour $l\neq 2$ et $l\neq p$).

3 Détection par des sous-groupes abéliens

On dit que l'homologie (modulo l) d'un groupe G est *détectée* par une famille $\mathcal{G}$ de sous-groupes de G si le morphisme canonique $\bigoplus_{T\in\mathcal{G}} H_*(T)\to H_*(G)$ est surjectif (ce qui revient à dire que le morphisme canonique $H^*(G)\to\prod_{T\in\mathcal{G}} H^*(T)$ est injectif).

L'important résultat suivant (proposition 4 de [Qui72]) est démontré dans un travail légèrement antérieur de Quillen.

Proposition 6 (Quillen, *proposition 3.4* de [Qui71], page 72)**.** *Soit G un groupe dont l'homologie est détectée par les sous-groupes abéliens d'exposant divisant l^a (i.e. dont les éléments sont tous d'ordres divisant l^a) pour un certain $a\in\mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $m\in\mathbb{N}$, le produit en couronne $\Sigma_m\wr G$ possède la même propriété.*

La démonstration découlera de trois lemmes.

Lemme 7. *Si S est un sous-groupe de Σ_m et M une représentation d'un groupe G (sur un corps de base k), la suite spectrale de Serre dégénère en un isomorphisme naturel*

$$H_*(S\wr G;M^{\otimes m})\simeq H_*(S;H_*(G;M)^{\otimes m}).$$

Démonstration. Une manière purement algébrique de démontrer ce fait classique est la suivante : $C_\bullet\mapsto C_\bullet^{\otimes m}$ définit un foncteur des complexes de chaînes (d'espaces vectoriels, mais on pourrait considérer n'importe quelle catégorie abélienne munie d'une structure tensorielle exacte) vers les complexes de chaînes (bornés d'un côté) *de représentations de S* ; ce foncteur préserve les quasi-isomorphismes. Comme tout complexe de chaînes d'espaces vectoriels est formel, cela montre que $C_\bullet^{\otimes m}$ est toujours formel *comme complexe de représentations de S*. Notant

$\mathbf{H}(G;-)$ le foncteur dérivé *total* de $(-)_G$, le point de départ de la suite spectrale de Serre est le quasi-isomorphisme naturel

$$\mathbf{H}(S \wr G; M^{\otimes m}) \simeq \mathbf{H}\big(S; \mathbf{H}(G^m; M^{\otimes m})\big),$$

on conclut donc en utilisant le quasi-isomorphisme naturel S-équivariant

$$\mathbf{H}(G^m; M^{\otimes m}) \simeq \mathbf{H}(G; M)^{\otimes m}$$

que procurent la formule de Künneth et l'observation de formalité précédente. $\square$

Lemme 8 (*Corollary 3.2* de [Qui71]). *Pour tout groupe G, les sous-groupes G^l et $\mathbb{Z}/l \times G_\delta$ (où l'indice δ signifie que l'on plonge G diagonalement dans G^l) de $\mathbb{Z}/l \wr G$ détectent l'homologie de G (modulo l).*

Démonstration. Pour tout $\mathbf{F}_l$-espace vectoriel V et tout entier $i > 0$, on dispose d'isomorphismes $H_i(\mathbb{Z}/l; V^{\otimes l}) \simeq H_i(\mathbb{Z}/l; \mathbf{F}_l) \otimes V \simeq V$ (choisir une base de V et regarder l'action de $\mathbb{Z}/l$ sur les l-uplets).

On voit donc que, dans l'isomorphisme

$$H_*(\mathbb{Z}/l \wr G) \simeq H_*(\mathbb{Z}/l; H_*(G)^{\otimes l})$$

du lemme 7, les termes $H_0(\mathbb{Z}/l; H_*(G)^{\otimes l})$ sont détectés par le sous-groupe G^l de $\mathbb{Z}/l$, tandis que les termes $H_i(\mathbb{Z}/l; H_*(G)^{\otimes l}) \simeq H_i(\mathbb{Z}/l) \otimes H_*(G)$ sont détectés pour $i > 0$ par $\mathbb{Z}/l \times G_\delta$ (l'application induite en homologie par l'inclusion $\mathbb{Z}/l \times G_\delta \hookrightarrow \mathbb{Z}/l \wr G$ est celle qu'on croit — plus généralement, si M est une représentation de G, cette inclusion induit l'application évidente de

$$H_*(\mathbb{Z}/l \times G_\delta; M^{\otimes l}) \simeq H_*(G; H_*(\mathbb{Z}/l; M^{\otimes l}))$$

vers

$$H_*(\mathbb{Z}/l; H_*(G; M)^{\otimes l}) \simeq H_*(\mathbb{Z}/l \wr G; M^{\otimes l}),$$

ce qui est facile à montrer par un argument général de comparaison de foncteurs homologiques ; on peut aussi raisonner sans passer par les coefficients tordus en utilisant la structure multiplicative en cohomologie — cf. la démonstration du lemme 4.4 de [AM04], page 142). $\square$

On en déduit immédiatement :

Lemme 9 (*Corollary 3.3* de [Qui71]). *Si G est un groupe dont l'homologie est détectée par les sous-groupes abéliens d'exposant divisant l^a (pour un $a \geq 1$), alors il en est de même pour $\mathbb{Z}/l \wr G$.*

Démonstration de la proposition 6. On utilise que tout sous-groupe d'indice premier à l dans un groupe en détecte l'homologie modulo l et, soit directement la description des Sylow des groupes symétriques qui permet d'utiliser itérativement le lemme 9, soit une récurrence directe sur m : si m n'est pas divisible par l, le sous-groupe $(\Sigma_{m-1} \wr G) \times G$ de $\Sigma_m \wr G$ est d'indice premier à l de sorte qu'on obtient immédiatement le résultat, et si $m = ls$ avec s entier, on utilise le sous-groupe $\Sigma_s \wr \mathbb{Z}/l \wr G$ de $\Sigma_m \wr G$, dont l'indice $\frac{(ls)!}{s! l^s}$ est premier à l. $\square$

Les notations sont toujours les mêmes que dans la section 1. On écrit $q^r - 1 = l^a.h$, où a et h sont des entiers, l ne divisant pas h.

Proposition 10 (*Lemma 12* de [Qui72], page 573)**.** *Tout sous-groupe abélien A de $GL_n(k)$ d'exposant divisant l^a est conjugué à un sous-groupe de C^m.*

Démonstration. Il suffit de montrer cela dans le sous-groupe $GL_m(k(\mu_l))$ de $GL_n(k)$. Comme $k(\mu_l)$ est d'ordre q^r et que $l^a|q^r-1$, ce corps contient toutes les racines l^a-èmes de l'unité. Comme il est d'autre part de caractéristique première à l, on en déduit que toutes les matrices de A sont diagonalisables sur $k(\mu_l)$. Comme A est commutatif, on peut diagonaliser simultanément ses matrices ; autrement dit, A est conjugué à un sous-groupe du groupe C^m des matrices diagonales de $GL_m(k(\mu_l))$. □

Démonstration du théorème 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la k-représentation tautologique de $GL_n(k)$ induit un morphisme (bien défini à homotopie près) $BGL_n(k) \to F\Psi^q$ (cf. [Qui72, § 7]), donc une application $H_*(GL_n(k)) \to H_*(F\Psi^q)$. Il résulte des définitions que le morphisme d'espaces vectoriels gradués

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_*(GL_n(k)) \to H_*(F\Psi^q)$$

est compatible aux structures multiplicatives. Ce morphisme envoie ε sur 1 et les classes ξ_i et η_i (pour $i \in \mathbb{N}^*$) sur les éléments de $H_*(F\Psi^q)$ notés de la même façon que Quillen construit dans [Qui72, § 6] (c'est direct : les classes dans $H_*(F\Psi^q)$ sont également définies à partir de l'homologie du groupe cyclique C). Par conséquent, le théorème 2 de [Qui72, page 566] montre que la composée

$$S(\varepsilon, \xi_1, \xi_2, \dots) \otimes \Lambda(\eta_1, \eta_2, \dots) \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_*(GL_n(k)) \to H_*(F\Psi^q)$$

a pour noyau l'idéal engendré par $\varepsilon - 1$. La bigraduation sur $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_*(GL_n(k))$ permet d'en déduire que notre morphisme $S(\varepsilon, \xi_1, \xi_2, \dots) \otimes \Lambda(\eta_1, \eta_2, \dots) \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_*(GL_n(k))$ est injectif.

Pour établir sa surjectivité, il suffit de voir que le sous-groupe C^m de $GL_n(k)$ en détecte l'homologie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (cf. l'équivalence entre les théorèmes 1 et 2). C'est une conséquence directe du corollaire 5 et des propositions 10 et 6. □

Démonstration du corollaire 3. La démonstration précédente montre que le morphisme canonique $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_*(GL_n(k)) \to H_*(F\Psi^q)$ s'identifie au passage au quotient par l'idéal engendré par $\varepsilon-1$. Or il en est de même pour le morphisme canonique $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_*(GL_n(k)) \to \operatorname{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*(GL_n(k)) \simeq H_*(GL(k))$, puisque la multiplication par ε induit le morphisme de stabilisation $H_*(GL_n(k)) \to H_*(GL_{n+1}(k))$. □

4 Cas d'équicaractéristique

On présente ici les résultats de [Qui72, § 11].

On travaille toujours sur les groupes linéaires sur le corps $k = \mathbf{F}_q$, où $q = p^d$, mais l'homologie est prise maintenant modulo p.

Théorème 11 (Quillen, *Theorem 6* de [Qui72], page 578)**.** *On a*

$$H_i(GL_n(k);\mathbf{F}_p) = 0 \qquad \textit{pour} \quad 0 < i < d(p-1)$$

et tout $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 12 (Quillen, *Corollary 1* de [Qui72], page 578)**.** *On a*

$$H_i(GL_n(\bar{\mathbf{F}}_p);\mathbf{F}_p) = 0 \quad \textit{pour tous } i > 0 \textit{ et } n \geq 0.$$

Démonstration. Argument de colimite filtrante (qu'on peut commuter avec l'homologie) à partir du théorème précédent. □

Théorème 13 (Quillen, *Corollary 2* de [Qui72], page 579)**.** *On a*

$$H_i(GL(k);\mathbf{F}_p) = 0 \qquad \textit{pour } i > 0.$$

Démonstration. On utilise le diagramme commutatif de groupes

$$\begin{tikzcd} GL_n(\mathbf{F}_q) \arrow[r] \arrow[d] & GL_n(\mathbf{F}_q)^t \arrow[d] \\ GL_n(\mathbf{F}_{q^t}) \arrow[r] & GL_{nt}(\mathbf{F}_q) \end{tikzcd}$$

dont la flèche verticale est la diagonale, la flèche de gauche est induite par l'extension de corps $\mathbf{F}_q \hookrightarrow \mathbf{F}_{q^t}$, la flèche horizontale l'inclusion obtenue en regardant $\mathbf{F}_{q^t}$ comme un $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel de dimension t et la flèche de droite l'inclusion par blocs diagonaux.

On conclut en utilisant le théorème 11 en prenant t premier à p assez grand, par un argument de récurrence sur le degré homologique i utilisant la formule de Künneth, la trivialité de l'action de la conjugaison en homologie (qui permet de voir que les différentes inclusions diagonales induisent la même application en homologie) et un argument de colimite filtrante sur n. □

Remarque 14. Comme l'homologie des groupes $GL_n(k)$ se stabilise (c'est-à-dire que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'application de stabilisation $H_i(GL_n(k)) \to H_i(GL_{n+1}(k))$ est un isomorphisme pour n assez grand), on en déduit que, pour tout $i > 0$, $H_i(GL_n(k))$ est nul pour n assez grand.

Le lemme suivant constitue un exercice élémentaire laissé au lecteur (qui pourra se ramener au cas où tous les γ_i sont $< p$).

Lemme 15. *Soit* $(\gamma_i)_{0 \leq i \leq d-1}$ *une famille d'entiers naturels telle que* $p^d - 1$ *divise* $\sum_i \gamma_i p^i$ *et que* $\sum_i \gamma_i < d(p-1)$*. Alors les* γ_i *sont tous nuls.*

Le point de départ de tous ces calculs est la classique détermination *fonctorielle* de l'homologie à coefficients dans $\mathbf{F}_p$ d'un groupe abélien [2] (ici les p-groupes abéliens élémentaires suffisent, ce qui rend la démonstration encore plus facile).

2. Signalons pour la culture que la détermination *fonctorielle* de l'homologie d'un groupe abélien *à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ constitue un problème très difficile et largement ouvert.

Lemme 16. *Soit V un p-groupe abélien élémentaire (i.e. un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel). Il existe un isomorphisme naturel*

$$H_n(V;\mathbf{F}_p) \simeq \Gamma^n_{\mathbf{F}_p}(V) \qquad \text{si } p = 2$$

et

$$H_n(V;\mathbf{F}_p) \simeq \bigoplus_{i+2j=n} \Lambda^i_{\mathbf{F}_p}(V) \underset{\mathbf{F}_p}{\otimes} \Gamma^j_{\mathbf{F}_p}(V) \qquad \text{si } p \text{ est impair,}$$

où Λ^i et Γ^i désignent respectivement la i-ème puissance extérieure et la i-ème puissance divisée.

Lemme 17. *Soit V un $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel. Il existe un isomorphisme naturel de $\mathbf{F}_q$-espaces vectoriels*

$$V \underset{\mathbf{F}_p}{\otimes} \mathbf{F}_q \simeq \bigoplus_{i=0}^{d-1} V_i\,;$$

(le membre de gauche étant muni de la structure provenant du facteur $\mathbf{F}_q$ et non de V) où V_i désigne le $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel obtenu à partir de V en tordant l'action des scalaires par la puissance i-ème du morphisme de Frobenius (i.e. V muni de la structure pour laquelle $\xi \in \mathbf{F}_q$ opère par ξ^{p^i}).

Démonstration. Cela résulte de la théorie de Galois des corps finis, qui décrit l'algèbre $\mathbf{F}_q \underset{\mathbf{F}_p}{\otimes} \mathbf{F}_q$. □

Lemme 18. *Soient λ un générateur de $\mathbf{F}_q^\times$, V un $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel de dimension finie (vu comme groupe abélien) et n un entier tel que $0 < n < d(p-1)$. Alors 1 n'est pas valeur propre de l'action de λ sur $H_n(V;\mathbf{F}_p)$ induite par l'action de λ sur V par multiplication.*

Démonstration. Si 1 est valeur propre de l'endomorphisme du $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel en question, il en est de même pour l'endomorphisme induit sur le $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel obtenu par extension des scalaires.

En nous plaçant par exemple dans le cas où $p = 2$ (le cas p impair est analogue mais un peu plus pénible à écrire), les lemmes 16 et 17 procurent un isomorphisme naturel de $\mathbf{F}_q$-espaces vectoriels

$$H_n(V;\mathbf{F}_p) \underset{\mathbf{F}_p}{\otimes} \mathbf{F}_q \simeq \bigoplus_{\substack{\gamma_0,\dots,\gamma_{d-1}\in\mathbb{N}\\ \gamma_0+\cdots+\gamma_{d-1}=n}} \Gamma^{\gamma_0}_{\mathbf{F}_q}(V_0) \otimes \cdots \otimes \Gamma^{\gamma_{d-1}}_{\mathbf{F}_q}(V_{d-1}).$$

L'action de λ sur un facteur direct typique du membre de gauche est donnée par la multiplication par λ élevé à la puissance $e = \sum_{i=0}^{d-1} \gamma_i p^i$. Maintenant, par le lemme 15, les relations $\gamma_i \geq 0$ et $0 < \sum_i \gamma_i = n < d(p-1)$ imposent que $q-1$ ne divise pas e. Autrement dit, $\lambda^e \neq 1$, ce qui établit le lemme. □

Ce lemme peut se reformuler comme suit :

Lemme 19. *Sous les mêmes hypothèses, $H_0(\mathbf{F}_q^\times; H_n(V;\mathbf{F}_p)) = 0$.*

Comme l'ordre de $\mathbf{F}_q^\times$ est premier à p, on en tire :

Lemme 20. *Soit V un $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel de dimension finie (vu comme groupe abélien), sur lequel on fait opérer le groupe $\mathbf{F}_q^\times$ par homothéties. On a*

$$H_i(V \rtimes \mathbf{F}_q^\times ; \mathbf{F}_p) = 0 \quad si\ 0 < i < d(p-1).$$

Démonstration du théorème 11. Notons $B_n(\mathbf{F}_q)$ le sous-groupe de $GL_n(\mathbf{F}_q)$ des matrices triangulaires supérieures (les coefficients diagonaux étant arbitraires). Il suffit d'établir l'annulation de $H_i(B_n(\mathbf{F}_q); \mathbf{F}_p)$ pour $0 < i < d(p-1)$, puisque $B_n(\mathbf{F}_q)$ est d'indice premier à p dans $GL_n(\mathbf{F}_q)$ (cf. le début de la section 2). Procédant par récurrence sur n, on peut supposer l'annulation analogue acquise pour B_{n-1}.

On dispose par ailleurs d'une suite exacte (scindée) de groupes

$$1 \to \mathbf{F}_q^{n-1} \rtimes \mathbf{F}_q^\times \to B_n(\mathbf{F}_q) \to B_{n-1}(\mathbf{F}_q) \to 1$$

(le groupe de gauche s'identifie au sous-groupe des matrices de B_n dont les $n-1$ premières colonnes sont triviales). La conclusion résulte donc de l'hypothèse de récurrence, du lemme 20 et de la suite spectrale de Hochschild-Serre. □

5 K-théorie des corps finis

Cette section est donnée rapidement, à titre culturel, sans rappel de définition ni démonstration, suivant la douzième et dernière section de [Qui72].

Le morphisme canonique (bien défini à homotopie près) $BGL(\mathbf{F}_q) \to F\Psi^q$ induit un isomorphisme en homologie à coefficients dans $\mathbf{F}_l$ pour $l \neq p$ (corollaire 3), mais aussi pour $l = p$ et à coefficients dans $\mathbb{Q}$, d'après le théorème 13 et le fait que, $F\Psi^q$ étant simple et ayant des groupes d'homotopie qui sont finis de cardinaux premiers à p, il a une homologie à coefficients dans $\mathbf{F}_p$ ou $\mathbf{Q}$ triviale (version relative du théorème de Whitehead, due à Serre). En utilisant derechef la simplicité de $F\Psi^q$, on en déduit que ce morphisme induit une équivalence d'homotopie

$$BGL(\mathbf{F}_q)^+ \xrightarrow{\simeq} F\Psi^q.$$

Le calcul de l'homotopie de $F\Psi^q$ [Qui72, lemme 1 (iii)] donne donc [Qui72, théorème 8] des isomorphismes

$$K_{2i}(\mathbf{F}_q) = 0$$

$$K_{2i-1}(\mathbf{F}_q) \simeq \mathbb{Z}/(q^i - 1)\ ;$$

on peut de plus montrer que l'effet en K-théorie d'une extension de corps finis est injectif et décrire l'action du Frobenius. Quillen conclut son travail en en déduisant [Qui72, *Corollary* page 585] la K-théorie de la clôture algébrique d'un corps fini.

Références

[AM04] A. Adem & R. J. Milgram – *Cohomology of finite groups*, second éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 309, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Knu01] K. P. Knudson – *Homology of linear groups*, Progress in Mathematics, vol. 193, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

[Qui71] D. Quillen – « The Adams conjecture », *Topology* **10** (1971), p. 67–80.

[Qui72] — , « On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field », *Ann. of Math. (2)* **96** (1972), p. 552–586.