Calcul des foncteurs d'après Weiss (II)

Notes d'exposé du groupe de travail de topologie Nantes/Angers

Aurélien DJAMENT

Mars 2011

Résumé

Cet exposé est la suite de celui de V. Franjou présentant les constructions et propriétés principales de la troncature polynomiale d'un bon foncteur, suivant Weiss [Wei99]. On y présente l'essentiel des démonstrations (en admettant certains résultats généraux sur les (co)limites homotopiques) de ces propriétés (qui ne sont *pas* purement formelles comme peuvent l'être les propriétés des troncatures polynomiales dans un contexte non homotopique, par exemple de foncteurs d'une petite catégorie additive vers les groupes abéliens), telles qu'elles sont données dans les sections 4 et 5 de [Wei99].

NB : le contenu et l'ordre exacts des notes ne coïncident pas forcément avec ceux de l'exposé oral.

Table des matières

Dans cet exposé, M désigne une variété (réelle, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension finie d). On désigne comme d'habitude par $\mathcal{O}(M)$ l'ensemble ordonné (par inclusion) des ouverts de M, qu'on voit couramment comme une petite catégorie.

Le principe utilisé pour démontrer les propriétés de base de la troncature d'un bon foncteur — le fait que la troncature est bonne et qu'elle est du bon degré polynomial, reposant sur un résultat de « petits ouverts » (tous ces résultats ont été énoncés précisément dans l'exposé précédent) — est de modifier la catégorie $\mathcal{O}_k(M)$, peu maniable pour les limites homotopiques, en introduisant la sous-catégorie de ses équivalences d'isotopie. En effet, tout bon foncteur envoie les flèches de cette catégorie sur des équivalences d'homotopie, et les limites homotopiques relativement à un foncteur possédant cette propriété se comportent de façon agréable.

1 Un cas où holim se comporte bien

Le résultat suivant est la proposition 3.12 de [Dwy96] (Dwyer mentionne que la première partie de ce résultat est une conséquence du théorème B de Quillen ; dans [GJ99], chap. IV § 5.2, une version simpliciale de ce résultat est fait donnée comme lemme pour démontrer le théorème B).

Proposition 1.1 (Dwyer)**.** *Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $X : \mathcal{C} \to \mathbf{Top}$ un foncteur. On suppose que X transforme toutes les flèches de $\mathcal{C}$ en des équivalences d'homotopie. Alors :*

1. *l'application canonique $\operatorname*{hocolim}_{\mathcal{C}} X \to B\mathcal{C}$ est une fibration à homotopie près (i.e. la fibre homotopique au-dessus de chaque point a le même type d'homotopie que la fibre naïve) ;*
2. *de plus, $\operatorname*{holim}_{\mathcal{C}} X$ a le type d'homotopie de l'espace des sections de toute fibration homotopiquement équivalente à l'application précédente.*

(Il faut bien sûr quelques précautions de topologie générale pour que l'espace des sections ne pose pas de problème ; la version simpliciale évite ces points techniques. On peut se ramener à cette situation puisqu'on ne manipule essentiellement que des variétés [1].)

On en déduit :

Corollaire 1.2. *Soient $\alpha : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un foncteur entre petites catégories, $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Top}$ un foncteur et $G = F \circ \alpha : \mathcal{D} \to \mathbf{Top}$. Supposons que F envoie toutes les flèches de $\mathcal{C}$ sur des équivalences d'homotopie et que $B\alpha : B\mathcal{D} \to B\mathcal{C}$ est une équivalence d'homotopie. Alors les applications $\operatorname*{hocolim}_{\mathcal{D}} G \to \operatorname*{hocolim}_{\mathcal{C}} F$ et $\operatorname*{holim}_{\mathcal{C}} F \to \operatorname*{holim}_{\mathcal{D}} G$ induites par α sont des équivalences d'homotopie.*

Corollaire 1.3. *Soient $F : \mathbb{N} \to \mathbf{Cat}$ un foncteur et $X_n : F(n) \to \mathbf{Top}$ des foncteurs tels que $X_n = X_{n+1} \circ F(n \to n+1)$, de sorte que (X_n) définit un foncteur $\tilde{X} : \operatorname{colim} F \to \mathbf{Top}$. Supposons que chaque X_n envoie les flèches de $F(n)$ sur des équivalences. Alors les applications canoniques*

$$\operatorname*{hocolim}_{n \in \mathbb{N}} \operatorname*{hocolim}_{F(n)} X_n \to \operatorname*{hocolim}_{\operatorname{colim} F} \tilde{X}$$

et

$$\operatorname*{holim}_{\operatorname{colim} F} \tilde{X} \to \operatorname*{holim}_{n \in \mathbb{N}} \operatorname*{holim}_{F(n)} X_n$$

sont des équivalences.

(Noter que le premier point, une interversion formelle de hocolim, ne nécessite pas l'hypothèse que les F_n envoient les flèches sur des équivalences.)

2 Une propriété fondamentale de classifiant

On commence par un résultat préparatoire sur les colimites homotopiques, qui figure dans l'appendice de [Seg78].

1. Pour la même raison, on peut se permettre, dans la suite de l'exposé, de ne pas faire de différence entre équivalence faible et équivalence d'homotopie.

Proposition 2.1 (Segal)**.** *Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie, X un espace topologique, $\mathcal{T}(X)$ sa topologie (vue comme ensemble ordonné puis comme petite catégorie) et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{T}(X)$ un foncteur. Pour $x \in X$, on désigne par $\mathcal{C}_x$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ des objets C tels que $x \in F(C)$.*

Supposons que pour tout $x \in X$ la catégorie $\mathcal{C}_x$ soit contractile. Alors l'application canonique $\operatorname{hocolim}_{\mathcal{C}} F \to X$ (où l'on note par abus encore F la composée de ce foncteur avec l'inclusion $\mathcal{T}(X) \to \mathbf{Top}$) est une équivalence faible.

Étant donné un entier positif n, on note $\mathcal{I}^{(n)}(M)$ le sous-ensemble ordonné (non plein) de $\mathcal{O}(M)$ des ouverts difféomorphes à la somme de n copies de $\mathbb{R}^d$ et dont les relations sont les inclusions *qui sont des équivalences d'isotopie.*

La propriété suivante (lemme 3.5 de [Wei99]) est fondamentale dans toute la théorie :

Proposition 2.2. *Le classifiant de la catégorie $\mathcal{I}^{(n)}(M)$ a le même type d'homotopie (faible[2]) que l'espace de configurations $Conf(M,n)$ de n points dans M.*

Démonstration. Utilisons la proposition 2.1 avec $X = Conf(M,n)$ et $\mathcal{C} = \mathcal{I}^{(n)}(M)$; le foncteur F associe à une réunion disjointe de n ouverts de M l'ouvert (contractile) de X qu'on en déduit. Pour tout $x = [a_1, \dots, a_n] \in X$, la catégorie $\mathcal{C}_x$ est isomorphe au produit sur $i \in \{1, \dots, n\}$ des ensembles ordonnés E_i, où E_i est l'ensemble des voisinages de a_i difféomorphes à $\mathbb{R}^d$ (les relations étant les inclusions qui sont des équivalences d'isotopie, mais cette dernière condition semble à peu près gratuite). Or cet ensemble ordonné est *filtrant à gauche* : quitte à se placer dans une carte, on peut utiliser les voisinages ouverts convexes de a_i (qui sont finaux dans tous les voisinages), qui sont stables par intersection. Donc les E_i, puis les $\mathcal{C}_x$, sont contractiles, et la proposition 2.1 montre que $\operatorname{hocolim}_{\mathcal{I}^{(n)}(M)} F$ a le type d'homotopie (a priori faible, mais tout le monde a le type d'homotopie de complexes cellulaires) que X.

Par ailleurs, la proposition 1.1 montre que l'application canonique $\operatorname{hocolim}_{\mathcal{I}^{(n)}(M)} F \to B\mathcal{I}^{(n)}(M)$ est, à homotopie près, une fibration de fibres contractiles, c'est donc une équivalence. □

Corollaire 2.3. *Le classifiant de la sous-catégorie $\mathcal{I}_k(M)$ de $\mathcal{O}_k(M)$ (sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}(M)$ dont les objets sont les réunions disjointes d'au plus k ouverts difféomorphes à $\mathbb{R}^d$) ayant les mêmes objets et les inclusions qui sont des équivalences d'isotopie comme morphismes a le type d'homotopie de la somme pour $n \in \{0, 1, \dots, k\}$ de $Conf(M,n)$.*

Corollaire 2.4. *Le foncteur $V \mapsto B\mathcal{I}_k(V)$ envoie équivalences d'isotopie (et même d'homotopie) sur équivalences d'homotopie.*

3 Propriétés fondamentales de la troncature polynomiale T_k

On rappelle que, si E est un bon foncteur $\mathcal{O}(M)^{op} \to \mathbf{Top}$ (cf. exposé de Jean-Claude Thomas, ou définition 1.1 de [Wei99]) et k un entier positif, on

2. Cette restriction est superflue puisque tous les espaces considérés ont le type d'homotopie de complexes cellulaires.

définit un foncteur $T_k(E)$ (de mêmes source et but) par

$$T_k(E)(V) = \underset{U \in \mathcal{O}_k(V)^{op}}{\operatorname{holim}} E(U).$$

3.1 Préparation : arguments bi(co)simpliciaux

La proposition qui suit est une reformulation du lemme 3.4 de [Wei99] sans utiliser de bicatégories.

Proposition 3.1 (Lemme 3.4 de [Wei99])**.** *Soient $\mathcal{B}$ une petite catégorie, $\mathcal{A}$ une sous-catégorie ayant les mêmes objets et $F : \mathcal{B}^{op} \to \mathbf{Top}$ un foncteur. Il existe une équivalence naturelle*

$$\underset{\mathcal{B}^{op}}{\operatorname{holim}} F \simeq \operatorname{Tot}\big([p] \mapsto \underset{\mathcal{A}_p\mathcal{B}^{op}}{\operatorname{holim}} F \circ \pi_p\big)$$

où $\mathcal{A}_p\mathcal{B}$ désigne la sous-catégorie de $N_p(\mathcal{B}) = \mathbf{Fct}([p], \mathcal{B})$ avec les mêmes objets et pour flèches celles dont les composantes sont dans $\mathcal{A}$ et $\pi_p : \mathcal{A}_p\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ le foncteur $U \mapsto U(0)$.

NB : [Wei99] fait l'hypothèse supplémentaire que F envoie les flèches de $\mathcal{A}$ sur des équivalences, mais ne s'en sert pas.

Démonstration. On considère l'espace bicosimplicial $X^{\bullet,\bullet}$ tel que $X^{i,j}$ soit le produit sur les carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd}
C_{0,0} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & C_{i,0} \arrow[d] \\
\cdots \arrow[d] & \cdots & \cdots \arrow[d] \\
C_{j,0} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_{i,j}
\end{tikzcd}$$

de $\mathcal{B}$ dont toutes les flèches verticales sont dans $\mathcal{A}$ de $F(C_{0,0})$. En utilisant que toutes les façons de totaliser un espace bicosimplicial sont homotopiquement équivalentes, on voit que

$$\operatorname{Tot}\big([p] \mapsto \underset{\mathcal{A}_p\mathcal{B}^{op}}{\operatorname{holim}} F \circ \pi_p\big) \simeq \operatorname{Tot}\big([i] \mapsto \underset{\mathcal{B}_i\mathcal{A}^{op}}{\operatorname{holim}} F \circ \kappa_i\big)$$

où $\mathcal{B}_i\mathcal{A}$ est la sous-catégorie pleine de $N_i(\mathcal{B})$ dont les objets sont ceux de $N_i(\mathcal{A})$ et $\kappa_i : \mathcal{B}_i\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est le foncteur $U \mapsto U(0)$. Il suffit donc de voir que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'application $\underset{\mathcal{B}^{op}}{\operatorname{holim}} F \to \underset{\mathcal{B}_i\mathcal{A}^{op}}{\operatorname{holim}} F \circ \kappa_i$ induite par κ_i est une équivalence faible.

Le foncteur $\lambda_i : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_i\mathcal{A}$ associant $C \xrightarrow{id} \dots \xrightarrow{id} C$ à C est adjoint à gauche à κ_i. On en déduit facilement le résultat (en utilisant par exemple le théorème de cofinalité de Bousfield-Kan — cf. [BK72], chap. XI, § 9). $\square$

On rappelle également la *construction de Grothendieck* : si F est un foncteur d'une petite catégorie $\mathcal{C}$ vers $\mathbf{Cat}$ (catégorie des petites catégories), la construction de Grothendieck sur F est la catégorie $\int_{\mathcal{C}} F$ dont les objets sont les couples (C, x) formés d'un objet C de $\mathcal{C}$ et d'un objet x de $F(C)$; les morphismes

$(C,x) \to (D,y)$ sont les couples (f,u) formés d'un morphisme $f : C \to D$ de $\mathcal{C}$ et d'un morphisme $u : F(f)(x) \to y$ de $F(D)$. On dispose d'un foncteur évident $\int_{\mathcal{C}} F \to \mathcal{C}$ associant C à (C,x). Un théorème de Thomason ([Tho79] § 1) affirme que le classifiant de $\int_{\mathcal{C}}$ a naturellement le même type d'homotopie que la colimite homotopique du foncteur $\mathcal{C} \to \mathbf{Top} \quad C \mapsto BF(C)$; cela résulte du fait (non trivial !) que les différents foncteurs de réalisation des objets bisimpliciaux sont tous homotopiquement équivalents.

3.2 Démonstration des résultats fondamentaux sur la troncature

Ici k est un entier naturel fixé. Pour $p \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{C}_p(M)$ la catégorie (notée $\mathcal{I}k\mathcal{O}k_p(M)$ dans [Wei99]) dont les objets sont les éléments de $N_p(\mathcal{O}_k(M))$ et les morphismes de $U_0 \subset \cdots \subset U_p$ vers $V_0 \subset \cdots \subset V_p$ les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\subset"] & U_p \arrow[d] \\ V_0 \arrow[r, "\subset"] & \cdots \arrow[r, "\subset"] & V_p \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont dans $\mathcal{I}_k(M)$.

Le résultat qui suit est le lemme 3.6 (et la remarque 3.7) de [Wei99].

Lemme 3.2. *Pour tout entier $p \geq 0$:*

1. *la fibre homotopique de l'application $B\mathcal{C}_p(M) \to B\mathcal{I}_k(M)$ induite par $\phi_p : \mathcal{C}_p(M) \to \mathcal{I}_k(M) \quad (U_0 \subset \cdots \subset U_p) \mapsto U_p$ au-dessus du point correspondant à un objet V de $\mathcal{I}_k(M)$ a le type d'homotopie de $B\mathcal{C}_{p-1}(V)$ (en convenant que $\mathcal{C}_{-1} = *$) ;*
2. *le foncteur $V \mapsto B\mathcal{C}_p(V)$ envoie les équivalences d'isotopie (ou même d'homotopie) sur des équivalences d'homotopie.*

Démonstration. On procède par récurrence sur p. La catégorie $\mathcal{C}_p(M)$ est isomorphe à la construction de Grothendieck sur le foncteur $\mathcal{I}_k(M) \to \mathbf{Cat} \quad V \mapsto \mathcal{C}_{p-1}(V)$ et que, via cet isomorphisme, le foncteur ϕ_p s'identifie au foncteur canonique. Par conséquent, le théorème de Thomason cité en fin de paragraphe précédent montre que l'application $B\phi_p$ s'identifie (à homotopie près) à l'application canonique

$$\operatorname*{hocolim}_{V \in \mathcal{I}_k(M)} B\mathcal{C}_{p-1}(V) \to \operatorname*{hocolim}_{V \in \mathcal{I}_k(M)} * = B\mathcal{I}_k(M).$$

L'hypothèse de récurrence dit que les flèches de $\mathcal{I}_k(M)$ sont envoyées sur des équivalences d'homotopie par $V \mapsto B\mathcal{C}_{p-1}(V)$. Cela permet de déduire la première assertion de la proposition 1.1 et des corollaires 1.2 et 2.4. $\square$

Proposition 3.3 (Lemme 3.8 de [Wei99])**.** *Pour tout bon foncteur E, le foncteur $T_k(E)$ est bon.*

Démonstration. Par la proposition 3.1, l'application canonique

$$\mathrm{Tot}\big([p] \mapsto \operatorname*{holim}_{U_0 \subset \cdots \subset U_p \in \mathcal{C}_p(V)^{op}} E(U_0)\big) \to \operatorname*{holim}_{U \in \mathcal{O}_k(V)^{op}} E(U)$$

est une équivalence pour tout $V \in \mathcal{O}(M)$.

On observe maintenant que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le foncteur

$$V \mapsto \underset{U_0 \subset \cdots \subset U_p \in \mathcal{C}_p(V)^{op}}{\operatorname{holim}} E(U_0)$$

est bon, en vertu du lemme 3.2 et des corollaires 1.2 et 1.3. Cela donne le résultat. □

On rappelle que pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{E}$ de M, on note $\mathcal{E}\mathcal{O}_k(M)$ le sous-ensemble ordonné plein de $\mathcal{O}_k(M)$ des ouverts dont chaque composante connexe est incluse dans un élément de $\mathcal{E}$, et qu'on définit

$$\mathcal{E}T_k(E)(M) = \underset{V \in \mathcal{E}\mathcal{O}_k(M)^{op}}{\operatorname{holim}} E(V).$$

Proposition 3.4 (Théorème 3.9 de [Wei99])**.** *L'application canonique*

$$T_k(E)(M) \to \mathcal{E}T_k(E)(M)$$

est une équivalence faible.

Démonstration. Raisonnant comme dans la démonstration précédente, on voit qu'il suffit de démontrer que l'application canonique

$$\underset{U_0 \subset \cdots \subset U_p \in \mathcal{C}_p(V)^{op}}{\operatorname{holim}} E(U_0) \to \underset{U_0 \subset \cdots \subset U_p \in \mathcal{E}\mathcal{C}_p(V)^{op}}{\operatorname{holim}} E(U_0)$$

est une équivalence, où $\mathcal{E}\mathcal{C}_p(V)$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_p(V)$ des p-chaînes d'ouverts qui sont tous dans $\mathcal{E}\mathcal{O}_k(V)$. Par le corollaire 1.2, il suffit donc de montrer que l'inclusion $\mathcal{E}\mathcal{C}_p(V) \hookrightarrow \mathcal{C}_p(V)$ induit une équivalence entre classifiants. Cela résulte soit d'un argument de (co)finalité, soit de ce qu'on peut suivre exactement la même marche pour identifier (à homotopie près) le classifiant de $\mathcal{E}\mathcal{I}_k(V)$ (définition évidente) puis $\mathcal{E}\mathcal{C}_p(V)$ que pour $\mathcal{I}_k(V)$ et $\mathcal{C}_p(V)$. □

La proposition précédente est l'ingrédient essentiel pour établir le résultat suivant :

Théorème 3.5 (Théorème 4.1 de [Wei99])**.** *Le foncteur $T_k(E)$ est polynomial de degré au plus k.*

Idée de la démonstration. Il s'agit de démontrer une propriété de limite homotopique étant donné des fermés deux à deux disjoints $A_0, \dots, A_k$ de M. On peut trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{E}$ de M dont chaque élément rencontre au plus l'un des A_i ; on applique la proposition 3.4 à un tel $\mathcal{E}$. Les choses fonctionnent bien parce que

$$\mathcal{E}\mathcal{O}_k(M) = \bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{E}\mathcal{O}_k(M \setminus A_i).$$

Pour conclure il reste un résultat, formel, d'analyse de double limite homotopique, qui est le lemme 4.2 de [Wei99]. □

Références

[BK72] A. K. Bousfield & D. M. Kan – *Homotopy limits, completions and localizations*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[Dwy96] W. G. Dwyer – « The centralizer decomposition of BG », in *Algebraic topology : new trends in localization and periodicity (Sant Feliu de Guíxols, 1994)*, Progr. Math., vol. 136, Birkhäuser, Basel, 1996, p. 167–184.

[GJ99] P. G. Goerss & J. F. Jardine – *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[Seg78] G. Segal – « Classifying spaces related to foliations », *Topology* **17** (1978), no. 4, p. 367–382.

[Tho79] R. W. Thomason – « Homotopy colimits in the category of small categories », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **85** (1979), no. 1, p. 91–109.

[Wei99] M. Weiss – « Embeddings from the point of view of immersion theory. I », *Geom. Topol.* **3** (1999), p. 67–101 (electronic).