

La théorie de l'homotopie des complexes de chaînes : constructions de base, d'après Dold (notes d'exposé au groupe de travail de topologie algébrique Nantes-Angers)

Aurélien DJAMENT

5 juin 2008

L'objectif de cette journée du groupe de travail consiste à étudier les propriétés homotopiques des complexes de chaînes dans une catégorie abélienne raisonnable, en suivant l'article de Dold [Dol60], notamment la théorie de l'obstruction dans ce contexte (utilisée par Pirashvili dans l'article [Pir00] que nous avons précédemment étudié pour démontrer l'effondrement de suites spectrales), qui sera exposée dans la deuxième séance par Antoine Touzé.

Cet exposé introductif donne les constructions de base.

Même si cette notion n'était pas encore développée au moment où Dold a rédigé son article, les constructions qu'il étudie sont très liées à l'algèbre homotopique (cf. [Qui67]) et constituent l'embryon de la théorie des catégories dérivées (cf. [Ver96]).

Table des matières

1	Les catégories $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ et $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{A})$	1
2	Démonstration du théorème 1.2	4
3	Suspension, cône, triangles distingués	6
4	Complexes d'Eilenberg-Mac Lane et opérations cohomologiques	8

Dans tout cet exposé, \mathcal{A} désigne une catégorie abélienne. Dold se place toujours dans le cas d'une catégorie de modules, mais la plupart des constructions qu'il donne se transportent sans aucun changement dans le cadre général, du moment que \mathcal{A} possède assez de projectifs, au moins. Nous spécifierons explicitement les hypothèses nécessaires (pas forcément optimales !) en temps utile.

1 Les catégories $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ et $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{A})$

On désigne par $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ la catégorie des *complexes de chaînes* (on parlera simplement de complexes par la suite) dans \mathcal{A} . Ses objets sont les suites d'objets $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de \mathcal{A} munies de morphismes $A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1}$ vérifiant la relation

$d_n d_{n+1} = 0$ pour tout entier n . On utilisera souvent une notation du type $A = ((A_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (d_n^A)_{n \in \mathbb{Z}})$ pour désigner un tel complexe. Comme d'habitude, l'indice des différentielles sera souvent omis s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Les morphismes de A vers B dans $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ sont les suites $(f_n : A_n \rightarrow B_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de morphismes de \mathcal{A} commutant aux différentielles en ce sens que $d_n^B f_n = f_{n-1} d_n^A$ pour tout entier n .

On vérifie aussitôt que $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ est une catégorie abélienne et que les foncteurs composantes $\mathbf{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A} \quad A \mapsto A_n$ sont exacts, mais ce n'est pas tellement cette structure sur $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ qui est intéressante, car elle possède "trop de morphismes", de même que la catégorie des espaces topologiques (même avec des hypothèses de régularité assez fortes) avec applications continues est trop vaste pour se prêter, par exemple, à des résultats de classification accessibles. C'est ce qui motive, entre autre, la théorie de l'homotopie.

Un autre foncteur de "morphismes" (qui est un foncteur hom interne dans le cas où \mathcal{A} est la catégorie \mathbf{Ab} des groupes abéliens) est le foncteur $\mathbf{Hom} : \mathbf{Ch}(\mathcal{A})^{op} \times \mathbf{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ défini comme suit : étant donnés deux complexes A et B et un entier d , on pose

$$\mathbf{Hom}_d(A, B) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_n, B_{n+d})$$

et l'on munit le groupe abélien gradué $\mathbf{Hom}(A, B)$ de la différentielle somme des morphismes

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_n, B_{n+d}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_n, B_{n+d-1}) \quad f \mapsto d^B f$$

et

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_{n-1}, B_{n+d-1}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_n, B_{n+d-1}) \quad f \mapsto (-1)^{d+1} f d^A$$

(on vérifie aussitôt que le morphisme gradué de degré -1 ainsi obtenu est une différentielle).

On note que $\mathrm{Hom}(A, B)$ est le groupe des cycles de degré 0 du complexe $\mathbf{Hom}(A, B)$. Par ailleurs, les bords de degré 0 sont les applications (homogènes de degré 0) de l'objet gradué (A_n) vers (B_n) qui sont de la forme $dh + hd$ pour une certaine application h homogène de degré 1 entre ces mêmes objets gradués.

Définition 1.1. Une *homotopie* entre deux morphismes de complexes de chaînes $f, g : A \rightarrow B$ est une application h homogène de degré 1 entre les objets gradués sous-jacents telle que $dh + hd = f - g$.

Le groupe d'homologie $H_0(\mathbf{Hom}(A, B))$, qui consiste donc des morphismes dans $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ modulo la relation d'homotopie, est noté $[A, B]$ et appelé *groupe des classes d'homotopie (de complexes de chaînes) de A dans B* .

Une sous-catégorie fondamentale supplante rapidement $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ dans l'article de Dold, il s'agit de la sous-catégorie pleine $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{A})$ des complexes A tels que $A_n = 0$ pour n assez petit. On peut aussi s'intéresser à la sous-catégorie pleine $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$ des complexes A tels que $A_n = 0$ pour $n < 0$. Dold remarque que, tandis que $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ est une catégorie adaptée à faire de l'"homotopie stable" dans \mathcal{A} , $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$ y est l'analogue des espaces topologiques dans les spectres.

Une grande partie du travail de Dold peut se retraduire par des propriétés d'algèbres homotopique dans $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{A})$. Cette traduction (dans le cas de $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$) est mentionnée par Quillen dans [Qui67]; elle correspond au théorème suivant :

Théorème 1.2 (Dold, Quillen etc.). *Supposons que la catégorie abélienne \mathcal{A} possède assez d'objets projectifs. On fait de $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{A})$ une catégorie de modèles en prenant :*

- pour équivalences faibles les homologismes, c'est-à-dire les morphismes de complexes de chaînes induisant un isomorphisme entre leurs groupes d'homologie ;
- pour fibrations les épimorphismes (i.e. les morphismes de complexes qui sont surjectifs en chaque degré) ;
- pour cofibrations les monomorphismes dont le conoyau est un complexe formé d'objets projectifs de \mathcal{A} .

De surcroît, toute équivalence d'homotopie (au sens de la notion de la définition 1.1) est un homologisme. Réciproquement, un homologisme entre complexes formés d'objets projectifs est une équivalence d'homotopie (au sens de la notion de la définition 1.1).

On note que pour cette structure, tout complexe est fibrant (i.e. le morphisme vers 0 est une fibration), tandis que les complexes cofibrants (i.e. tels que le morphisme de source 0 soit une cofibration) sont ceux dont l'évaluation en chaque degré est un objet projectif de \mathcal{A} .

Pour les axiomes d'une catégorie de modèles¹, on pourra consulter [GJ99], § 2.1, par exemple (ou [Qui67]). Rappelons que l'archétype d'une catégorie de modèles est la catégorie des espaces topologiques dans laquelle les équivalences faibles sont les applications continues qui induisent des isomorphismes entre les π_0 et entre les groupes d'homotopie, les fibrations sont les fibrations de Serre, c'est-à-dire les applications continues $f : X \rightarrow Y$ telles que pour tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} [0, 1]^{n-1} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ [0, 1]^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

on puisse trouver une flèche en pointillés qui fasse commuter les deux triangles, et enfin les cofibrations sont les rétractes des "inclusions cellulaires relatives" (les espaces cofibrants sont les complexes cellulaires, tout espace est fibrant).

Convention 1.3. **Dans toute la suite de cet exposé, on suppose que la catégorie \mathcal{A} possède assez d'objets projectifs.**

Remarque 1.4. 1. Dold montre qu'on a des résultats similaires dans $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ lorsque la catégorie \mathcal{A} est de dimension homologique finie.

2. Comme le montre Hovey ([Hov99], § 2.3, où l'on trouvera une démonstration du théorème 1.2 plus conceptuelle que celle que nous donnons), on peut toujours munir $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ (lorsque \mathcal{A} a assez de projectifs) d'une structure de catégorie de modèles dont les équivalences faibles sont les homologismes et les fibrations les épimorphismes. Cependant, il n'y a pas de description simple des objets cofibrants.

¹Ils seront rappelés dans l'exposé oral.

2 Démonstration du théorème 1.2

Le contenu de cette section correspond essentiellement au § 3 de l'article de Dold, exprimé dans le langage des catégories de modèles.

Les trois premiers axiomes sont évidents : abélienne, la catégorie $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{A})$ possède des limites et colimites finies ; les homomorphismes vérifient la propriété "2 parmi 3" ; un rétracte d'un épimorphisme (resp. d'un monomorphisme, d'un morphisme dont le conoyau est projectif en chaque degré, d'un homomorphisme) a encore la même propriété.

Montrons maintenant les deux propriétés de relèvement. Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & X \\ i \downarrow & \nearrow ? & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{v} & Y \end{array} \quad (1)$$

dans lequel i est une cofibration et p une fibration. Notons P le conoyau de i , qui est une inclusion : les P_n sont projectifs. On choisit un scindement des suites exactes $0 \rightarrow A_n \xrightarrow{i_n} B_n \rightarrow P_n \rightarrow 0$, ce qui fixe une décomposition $B_n \simeq A_n \oplus P_n$ (qui ne commute pas forcément aux différentielles!). Trouver un relèvement revient donc à construire des flèches $f_n : P_n \rightarrow X_n$ de \mathcal{A} telles que $p_n f_n$ soit la restriction de v_n à P_n et que les morphismes $B_n \simeq A_n \oplus P_n \xrightarrow{(u_n, f_n)} X_n$ commutent aux différentielles. Par récurrence (le choix $f_n = 0$ convient pour n assez petit!), on peut supposer que de tels f_i sont construits pour $i < n$.

Notons N le noyau de l'épimorphisme $p : A \rightarrow B$. Comme P_n est projectif, on peut trouver un morphisme $\bar{f}_n : P_n \rightarrow X_n$ tel que la composée $p_n \bar{f}_n$ coïncide avec la restriction de v_n . On montre que l'on peut trouver $g_n : P_n \rightarrow N_n$ et $h_n : P_{n-1} \rightarrow Z_{n-1}(N)$ ($n-1$ -cycles de N) tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{(u_n, \bar{f}_n + g_n)} & X_n \\ d_n^B \downarrow & & \downarrow d_n^X \\ B_{n-1} & \xrightarrow{(u_{n-1}, \bar{f}_{n-1} + h_n)} & X_{n-1} \end{array} \quad (2)$$

commute (on a utilisé l'identification de B_i à $A_i \oplus P_i$ pour la notation des morphismes). Cela permettra de conclure : comme on n'aura modifié les relèvements \bar{f}_n et f_{n-1} que par des morphismes à valeurs dans N , la propriété de relèvement ne sera pas affectée ; la compatibilité entre f_{n-1} , f_{n-2} et les différentielles sera également préservée puisqu'on n'aura modifié f_{n-1} que par un morphisme à valeurs dans les cycles, et le diagramme commutatif (2) assurera la compatibilité entre $f_n = \bar{f}_n + g_n$, $f_{n-1} + h_n$ et les différentielles.

L'existence de g_n et h_n ayant les propriétés requises équivaut à dire que le morphisme $H_n(B) \rightarrow H_{n-1}(N)$ composé de $H_n(v) : H_n(B) \rightarrow H_n(Y)$ et du morphisme de liaison $H_n(Y) \rightarrow H_{n-1}(N)$ associé à la suite exacte courte $0 \rightarrow N \rightarrow A \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ de $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{A})$ est nul. En effet, en jouant sur h_n , on voit d'abord que cela équivaut à dire que la restriction aux n -cycles de B du morphisme $B_n \xrightarrow{\bar{f}_n} X_n \xrightarrow{d_n^X} X_{n-1}$ est à valeurs dans les $n-1$ -bords de N (ce morphisme est toujours à valeurs dans N_{n-1} comme on le voit en projetant dans

Y), et il suffit d'utiliser la définition de ce morphisme de liaison pour obtenir l'observation précédente.

Lorsque la fibration p est triviale, le complexe N est acyclique : $H_{n-1}(N) = 0$, donc on peut toujours trouver nos morphismes g_n et h_n .

Lorsque la cofibration i est triviale, $H_n(i) : H_n(A) \rightarrow H_n(B)$ est un isomorphisme. Or la composée de cette flèche avec la flèche $H_n(B) \rightarrow H_{n-1}(N)$ précédente est nulle en vertu de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_n(A) & \xrightarrow{H_n(u)} & H_n(X) \\ H_n(i) \downarrow & & \downarrow H_n(p) \\ H_n(B) & \xrightarrow{H_n(v)} & H_n(Y) \end{array}$$

et de ce que la composée de $H_n(p)$ avec le morphisme de liaison $H_n(Y) \rightarrow H_{n-1}(N)$ est nulle. Cela achève d'établir les propriétés de relèvement.

On établit ensuite les deux propriétés de factorisation.

Pour la factorisation d'un morphisme $f : Y \rightarrow X$ en une cofibration triviale suivie d'une fibration, il suffit que montrer qu'il existe une fibration $p : P \rightarrow X$ avec P cofibrant et acyclique. En effet, l'inclusion canonique $Y \hookrightarrow Y \oplus P$ sera alors une cofibration triviale, qui composée avec l'épimorphisme $Y \oplus P \xrightarrow{(f,p)} X$ donne f .

On commence par choisir, pour tout n , un épimorphisme $\pi_n : Q_n \twoheadrightarrow X_{n+1}$ avec Q_n projectif et nul pour n assez petit. On définit alors le complexe P par $P_n = Q_n \oplus Q_{n-1}$, avec pour différentielle $d_n^P : Q_n \oplus Q_{n-1} \rightarrow Q_{n-1} \hookrightarrow Q_{n-1} \oplus Q_{n-2}$, qui en fait bien un complexe cofibrant et acyclique. On définit maintenant $p_n : Q_n \oplus Q_{n-1} \rightarrow X_n$ par ses composantes $d_{n+1}^X \circ \pi_n : Q_n \rightarrow X_n$ et $\pi_{n-1} : Q_{n-1} \rightarrow X_n$. Comme $d_n^X \circ d_{n+1}^X = 0$, p définit bien un morphisme de complexes, lequel est surjectif parce que les π_i le sont.

On montre maintenant que tout morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{A})$ peut se factoriser en une cofibration suivie d'une fibration triviale. Quitte à appliquer d'abord la factorisation précédemment établie, on peut supposer que f est elle-même une fibration, i.e. un épimorphisme, et l'on cherche une factorisation de f en $X \xrightarrow{i} A \xrightarrow{g} Y$ où i est une cofibration et g un homomorphisme. Par récurrence, on peut supposer l'hypothèse suivante, notée \mathcal{H}_n , vérifiée :

$A_m, d_m^A : A_m \rightarrow A_{m-1}$, i_m et g_m sont construits pour $m < n$ de sorte que :

1. $d_{m-1}^A d_m^A = 0$;
2. $d_m^A i_m = i_{m-1} d_m^X$;
3. $d_m^Y g_m = g_{m-1} d_m^A$;
4. i_m est une inclusion $A_m \hookrightarrow Y_m = A_m \oplus P_m$ avec P_m projectif;
5. g_m induit un isomorphisme entre $H_m(A)$ et $H_m(Y)$ pour $m < n - 1$;
6. g_{n-1} induit un épimorphisme de $Z_{n-1}(A)$ sur $Z_{n-1}(Y)$ ($n - 1$ -cycles).

On choisit maintenant un épimorphisme $\bar{a}_n : P_n \twoheadrightarrow \ker(Z_{n-1}(A) \xrightarrow{\bar{g}_{n-1}} Z_{n-1}(Y) \twoheadrightarrow H_{n-1}(Y))$ de source P_n projective, dont on note a_n la composée avec l'inclusion dans A_{n-1} , on pose $Y_n = A_n \oplus P_n$ et on note $i_n : A_n \hookrightarrow Y_n$ l'inclusion canonique.

On prend pour différentielle $d_n^A : X_n \oplus P_n \rightarrow A_{n-1}$ le morphisme de composantes $X_n \xrightarrow{d_n^X} X_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} A_{n-1}$ et a_n ; la composition avec d_{n-1}^A est bien nulle puisque a_n prend ses valeurs dans les cycles.

Par construction, la composée $P_n \xrightarrow{a_n} A_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} Y_{n-1}$ est à valeurs dans $B_{n-1}(Y)$ ($n-1$ -bords), donc on peut trouver un morphisme $h_n : P_n \rightarrow Y_n$ dont la composée avec d_n^Y soit égale à la précédente, puisque P_n est projectif. On pose $g_n = (f_n, h_n) : A_n = X_n \oplus P_n \rightarrow Y_n$.

Les quatre premières conditions de \mathcal{H}_{n+1} sont donc satisfaites. Comme g_{n-1} induit, par hypothèse, un épimorphisme de $Z_{n-1}(A)$ sur $Z_{n-1}(Y)$, la construction de a_n assure que $H_{n-1}(g)$ est bien un isomorphisme. Reste à prouver que $g_n(Z_n(A))$ contient $Z_n(Y)$, quitte à modifier h_n par un morphisme à valeurs dans $Z_n(Y)$ (ce qui ne change rien aux autres propriétés). Il suffit pour cela d'ajouter à P_n un objet projectif se surjectant sur $Z_n(Y)$.

Pour terminer la démonstration, il suffit de voir qu'une homotopie au sens des catégories de modèles entre deux objets cofibrants est une homotopie au sens de la définition 1.1 (on rappelle qu'une équivalence faible entre objets fibrants et cofibrants est une équivalence d'homotopie). Pour cela, on utilise l'"objet de chemins" sur un objet cofibrant X construit précédemment — comme X est cofibrant, on dispose d'une fibration $P \xrightarrow{p} X$ avec P cofibrant acyclique donné par $P_n = X_{n+1} \oplus X_n$; ensuite le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{diag}} & X \oplus X \\ & \searrow & \nearrow \\ & X \oplus P & \end{array}$$

dont la flèche $X \oplus P \rightarrow X \oplus X$ a pour composantes la diagonale $X \rightarrow X \oplus X$ et la composée de $p : P \rightarrow X$ avec la première inclusion fait de $X \oplus P$ un "objet de chemins" pour X , lequel donne facilement le résultat recherché.

3 Suspension, cône, triangles distingués

La *suspension* est l'isomorphisme S de la catégorie $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{A})$ (ou $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$) donné par $S_n(A) = A_{n-1}$ et $d_n^{S(A)} = -d_{n-1}^A$.

Le *cône* d'un morphisme de complexes $A \xrightarrow{f} B$ est le complexe $C(f)$ défini par $C_n(f) = A_{n-1} \oplus B_n$ et $d_n^{C(f)} = \begin{pmatrix} -d_{n-1}^A & 0 \\ f_{n-1} & d_n^B \end{pmatrix}$ (la condition d'annulation de $(d^{C(f)})^2$ est précisément équivalente au fait que f est un morphisme de complexes).

On dispose d'une suite exacte naturelle évidente

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{P(f)} C(f) \xrightarrow{Q(f)} S(A) \rightarrow 0. \quad (3)$$

Le foncteur cône jouit des propriétés suivantes, dont la vérification est immédiate.

1. On a une égalité $C(S(f)) = S(C(-f))$;

2. il existe un isomorphisme naturel $\tau : C(S(f)) \rightarrow S(C(f))$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 S(B) & \xrightarrow{P(S(f))} & C(S(f)) & \xrightarrow{Q(S(f))} & S^2(A) \\
 id \downarrow & & \tau \downarrow & & \downarrow -id \\
 S(B) & \xrightarrow{S(P(f))} & S(C(f)) & \xrightarrow{S(Q(f))} & S^2(A)
 \end{array} \quad (4)$$

commute;

3. les foncteurs cône et $\mathbf{Hom}(X, -)$ commutent à isomorphisme naturel près.

Nous pouvons définir maintenant la *suite cofibre* associée au morphisme f comme la suite de morphismes de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ suivante :

$$\dots \rightarrow S^{-1}(B) \xrightarrow{S^{-1}(P(f))} S^{-1}(C(f)) \xrightarrow{S^{-1}(Q(f))} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{P(f)} C(f) \xrightarrow{Q(f)} S(A) \rightarrow \dots \quad (5)$$

Dold note $\mathcal{U}(f)$ cette suite, qui vérifie d'utiles propriétés de functorialité.

Définition 3.1. Une *transformation* entre deux morphismes $A \xrightarrow{f} B$ et $A' \xrightarrow{f'} B'$ de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ est un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\
 A' & \xrightarrow{f'} & B'
 \end{array}$$

qui commute à homotopie près (i.e. tel que $f'\phi$ et ψf sont homotopes). Une *équivalence d'homotopie* entre f et f' est une telle transformation pour laquelle ϕ et ψ sont des équivalences d'homotopie.

Par abus, on nomme encore *suite cofibre* toute suite homotopiquement équivalente à la suite cofibre associée à un morphisme de complexes.

Proposition 3.2. 1. La construction $\mathcal{U}(f)$ est functorielle en f au sens des transformations : toute transformation $f \rightarrow f'$ se prolonge en une suite de transformations $\mathcal{U}(f) \rightarrow \mathcal{U}(f')$; si la transformation de départ est une équivalence d'homotopie, il en est de même pour les prolongements.

2. Tout décalage d'une suite cofibre est une suite cofibre.

3. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $H_n : \mathbf{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ le foncteur n -ième objet d'homologie. L'image par H_n d'une suite cofibre est une suite exacte ; plus précisément, l'image de $\mathcal{U}(f)$ par H_n est isomorphe à la suite exacte longue d'homologie associée à la suite exacte courte (3) (modulo un décalage d'indice de n).

Nous renvoyons à l'article de Dold (§ 2) pour la démonstration de cette proposition, tout à fait élémentaire mais un peu longue.

Pour cette propriété, qui est le point de départ de l'étude de la structure triangulée de $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{A})$, on pourra aussi se référer à [Ver96] (chapitre I, § 3).

4 Complexes d'Eilenberg-Mac Lane et opérations cohomologiques

Définition 4.1. Soient A un objet de \mathcal{A} et $n \in \mathbb{Z}$. Un *complexe d'Eilenberg-Mac Lane* de type (A, n) est un objet X de $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{A})$ muni d'isomorphismes $H_i(X) \simeq A$ pour $i = n$, 0 sinon.

Exemple 4.2. Le complexe (A, n) qui est nul en degré différent de n et égal à A en degré n est un tel complexe.

La terminologie de la définition est justifiée par la proposition suivante.

Proposition 4.3. *Tout complexe d'Eilenberg-Mac Lane de type (A, n) est faiblement équivalent au complexe (A, n) .*

(La réciproque est évidemment vraie!)

Démonstration. Soient X un complexe d'Eilenberg-Mac Lane (dans \mathcal{A}) de type (A, n) et Y le sous-complexe donné par $Y_i = 0$ pour $i < n$, $Y_n = Z_n(X)$ (cycles de degré n de X) et $Y_i = X_i$ pour $i > n$. L'inclusion $Y \hookrightarrow X$ est un homomorphisme.

Par ailleurs, la projection $Y_n = Z_n(X) \twoheadrightarrow H_n(X) \simeq A$ définit un morphisme de complexes de Y vers (A, n) , qui est également un homomorphisme, d'où la conclusion. \square

Corollaire 4.4. *Soient X un complexe d'Eilenberg-Mac Lane de type (A, n) et P un complexe projectif en chaque degré. Il existe un isomorphisme*

$$[P, X] \simeq H^n(P, A)$$

naturel en P .

Plus généralement, on a un isomorphisme naturel

$$H_i(\mathbf{Hom}(P, X)) \simeq H^{n-i}(P, A).$$

Démonstration. Le théorème 1.2 montre que le foncteur $[P, X]$ ne dépend, à isomorphisme près, que de la classe d'homomorphisme de X et de P puisque ce dernier objet est cofibrant. Comme $H^n(-, A)$ est *par définition* le foncteur

$$H^n(\mathcal{H}om(-, A)) \simeq H^n(\mathbf{Hom}(-, (A, 0))) \simeq [-, (A, n)]$$

(où $\mathcal{H}om(-, A)$ désigne l'endofoncteur contravariant de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ induit par $\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(-, A)$), cela donne le corollaire. \square

Remarque 4.5. 1. Un complexe d'Eilenberg-Mac Lane de type (A, n) projectif en chaque degré s'obtient en décalant de n une résolution projective de A .

2. On peut traiter de la cohomologie singulière des espaces topologiques en utilisant le théorème de Dold-Kan et les considérations analogues aux précédentes dans $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{Ab})$. Voir par exemple [GJ99], chapitre III, § 2.

Proposition 4.6. *Soient X et Y des complexes d'Eilenberg-Mac Lane de type (A, n) et (B, m) respectivement. On suppose de plus que X est projectif en chaque degré. Alors $[X, Y] \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{m-n}(A, B)$.*

Démonstration. Cela résulte du corollaire 4.4 et de la remarque qui suit cet énoncé. \square

Nous sommes maintenant en mesure de définir et étudier les opérations cohomologiques dans le cadre de la catégorie $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{A})$.

Définition 4.7. Une *opération cohomologique* de type (A, n, B, m) est une transformation naturelle depuis $H^n(-, A)$ vers $H^m(-, B)$, foncteurs depuis la catégorie *homotopique* de $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{A})$ vers les *ensembles* (pas les groupes abéliens).

Rappelons que la catégorie homotopique d'une catégorie de modèles a pour objets les objets fibrants et cofibrants de la catégorie de départ et pour morphismes les classes d'homotopie de morphismes (cf. [Qui67] ou [GJ99], ch. II, §1). Cette définition est donc rigoureusement équivalente à celle donnée par Dold, de transformation naturelle entre foncteurs depuis la sous-catégorie des complexes projectifs en chaque degré.

Comme les foncteurs de cohomologie prennent en fait leurs valeurs dans les groupes abéliens, l'ensemble des opérations cohomologiques d'un certain type forme canoniquement un groupe abélien.

Notation 4.8. Nous désignerons par $\mathfrak{D}(A, n, B, m)$ le groupe abélien des opérations cohomologiques de type (A, n, B, m) .

En fait, une opération cohomologique est toujours linéaire, en vertu du lemme classique suivant :

Lemme 4.9. Soient \mathcal{C} une catégorie additive, F et G deux foncteurs additifs de \mathcal{C} vers \mathbf{Ab} et i le foncteur d'inclusion de \mathbf{Ab} dans la catégorie des ensembles.

Toute transformation naturelle u de $i \circ F$ vers $i \circ G$ est en fait une transformation naturelle de F dans G .

Démonstration. Soit X un objet de \mathcal{C} . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(X) \oplus F(X) & \xrightarrow{u_X \oplus u_X} & G(X) \oplus G(X) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ F(X \oplus X) & \xrightarrow{u_{X \oplus X}} & G(X \oplus X) \end{array}$$

commute par naturalité, parce que les isomorphismes verticaux sont induits par les deux morphismes canoniques $X \rightarrow X \oplus X$. On en déduit que la fonction u_X est linéaire. \square

Proposition 4.10. Le groupe abélien $\mathfrak{D}(A, n, B, m)$ est naturellement (en A et B) isomorphe au groupe d'extensions $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{m-n}(A, B)$.

Démonstration. Le corollaire 4.4 montre que le foncteur $H^n(-, A)$ est représentable dans la catégorie homotopique par (A, n) , ou plutôt un remplacement cofibrant P de ce complexe. Le lemme de Yoneda fournit alors un isomorphisme canonique $\mathfrak{D}(A, n, B, m) \simeq H^m(P, B)$, groupe qui s'identifie à $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{m-n}(A, B)$ par la proposition 4.6. \square

1. On peut éviter le recours à la catégorie homotopique en utilisant explicitement la classe universelle fournie par le corollaire 4.4 (c'est la même démonstration...).

2. Dans l'isomorphisme de la proposition précédente, la composition des opérations cohomologiques correspond au produit de composition (ou de Yoneda).
3. Soient e un élément de $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(A, B)$ et $0 \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ une suite exacte représentant cette extension. La transformation naturelle de $\mathfrak{D}(A, n, B, n+1)$ est le morphisme de Bockstein associé à cette suite exacte — i.e. sur un complexe P projectif en chaque degré, c'est le morphisme de liaison (en degré n) de la suite exacte longue d'homologie associée à la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{H}om(P, B) \rightarrow \mathcal{H}om(P, E) \rightarrow \mathcal{H}om(P, A) \rightarrow 0$.

Références

- [Dol60] A. DOLD – « Zur Homotopietheorie der Kettenkomplexe », *Math. Ann.* **140** (1960), p. 278–298.
- [GJ99] P. G. GOERSS & J. F. JARDINE – *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.
- [Hov99] M. HOVEY – *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [Pir00] T. PIRASHVILI – « Hodge decomposition for higher order Hochschild homology », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **33** (2000), no. 2, p. 151–179.
- [Qui67] D. G. QUILLEN – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, No. 43, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [Ver96] J.-L. VERDIER – « Des catégories dérivées des catégories abéliennes », *Astérisque* (1996), no. 239, p. xii+253 pp. (1997), With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis.