Homologie de Mac Lane, homologie des foncteurs et quelques autres théories homologiques

Notes d'exposé au groupe de travail sur la construction cubique de Mac Lane et ses applications en algèbre et topologie

Aurélien Djament

Strasbourg, 11 juin 2014

Résumé

Le but de cet exposé consiste à donner un panorama des résultats de comparaison (co)homologique entre l'homologie des foncteurs (sur une catégorie de modules projectifs de type fini) et d'autres théories (co)homologiques. Nous commencerons par donner la définition précise de l'homologie de Mac Lane et esquisser la démonstration de son identification, établie par Jibladze et Pirashvili à la fin des années 1980, avec de l'homologie de foncteurs. Par la suite, nous évoquerons l'identification de cette homologie de foncteurs à d'autres théories homologiques : l'homologie de Hochschild topologique (résultat dû à Pirashvili et Waldhausen) et la K-théorie stable (Beltley, Suslin, Scorichenko).

Il s'agira, au moins pour la deuxième partie (sertions 3 et 4), d'un exposé non technique à vocation culturelle.

1 Construction bar

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, k)$ une catégorie monoïdale symétrique. Si A est un anneau dans cette catégorie, c'est-à-dire un objet de $\mathcal{C}$ muni de morphismes $\eta_A : k \to A$ (unité) et $\mu_A : A \otimes A \to A$ (multiplication) vérifiant les conditions d'associativité de d'unitarité usuelles, on peut construire un objet simplicial $\mathcal{B}(A)$ dans $\mathcal{C}$ qui en degré n est $A^{\otimes n+2}$ et dont les faces sont données par

$$A^{\otimes n+2} = A^{\otimes i} \otimes A^{\otimes 2} \otimes A^{\otimes n-i} \xrightarrow{id \otimes \mu_A \otimes id} A^{\otimes i} \otimes A \otimes A^{\otimes n-i} = A^{\otimes n+1}$$

et les dégénérescences par

$$A^{\otimes n+1} = A^{\otimes i} \otimes A \otimes A^{\otimes n-i} \xrightarrow{id \otimes \eta_A \otimes id} A^{\otimes i} \otimes A^{\otimes 2} \otimes A^{\otimes n-i} = A^{\otimes n+2}.$$

Plus généralement, si M est un A-bimodule dans $\mathcal{C}$ (i.e. un objet de $\mathcal{C}$ muni d'actions à gauche $A \otimes M \to M$ et à droite $M \otimes A \to M$ vérifiant les mêmes conditions qu'un bimodule usuel), on dispose d'un objet simplicial $\mathcal{B}(A; M)$ qui en degré n vaut $A^{\otimes n} \otimes M$ avec des formules analogues pour les faces (mais en utilisant pour l'une d'entre elles l'action à droite, pour l'autre l'action à gauche, et toutes les restantes la même formule) et les dégénérescences. On utilisera également la notation $\mathcal{B}(B, A, C) := \mathcal{B}(A; B \boxtimes C)$ où B est un A-module à droite et C un A-module à gauche, $B \boxtimes C$ désignant l'objet $B \otimes C$ muni de la structure de bimodule induite par les structures de modules sur B et C. Noter que $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(A, A, A)$.

Cette construction est fonctorielle.

Remarque 1. On peut plus généralement définir des objets simpliciaux associés à une adjonction, en itérant la composée des foncteurs adjoints. Les faces (resp. dégénérescences) s'obtiennent en utilisant la coünité (resp. l'unité). La construction bar telle que présentée ici est le cas particulier de l'adjonction entre l'inclusion des A-modules dans $\mathcal{C}$ et le foncteur libre $A \otimes -$.

Supposons que $\mathcal{C}$ est la catégorie des modules sur un anneau commutatif k et que $\otimes$ est le produit tensoriel sur k. On obtient ainsi, lorsque A est une k-algèbre et M un A-bimodule, un k-module simplicial $\mathcal{B}(A;M)$. Son homotopie est par définition l'homologie de Hochschild $HH_*(A;M)$ de A à coefficients dans M. Elle peut se calculer comme homologie du complexe de Moore $B(A;M)$ associé à ce module simplicial (complexe qui en degré n est $\mathcal{B}(A;M)_n$ et dont la différentielle est la somme alternée des faces). C'est ce complexe qui est appelé traditionnellement complexe bar. On utilisera également les notations $B(A)$ et $B(A,X,Y)$, lorsque X (resp. Y) est un A-module à droite (resp; à gauche). Noter que l'on a un isomorphisme canonique $B(A;M) \simeq B(A) \otimes_{A^{op}\otimes A} M$. On dispose également de la cohomologie de Hochschild $HH^*(A;M)$ qu'on peut voir comme la homologie du complexe de cochaînes $\mathrm{Hom}_{A^{op}\otimes A}(B(A),M)$. (On peut aussi voir cela à l'aide de la construction cobar qui se définit également dans un cadre tout à fait général.)

Si k est un corps, on dispose d'isomorphismes gradués naturels $HH_*(A;M) \simeq \mathrm{Tor}_*^{A^{op}\otimes A}(A,M)$ et $HH^*(A;M) \simeq \mathrm{Ext}^*_{A^{op}\otimes A}(A,M)$. Dans le cas général, on dispose d'une description analogue avec des Tor ou Ext relatifs à k.

Une généralisation classique très importante de l'homologie de Hochschild consiste à l'appliquer aux algèbres *différentielles graduées*. Précisément, supposons que k est un anneau commutatif et que $\mathcal{C}$ est la catégorie des k-modules différentiels gradués, munie du produit tensoriel (gradué, avec différentielle donnée par la règle usuelle) sur k. On obtient ainsi, lorsque A est une k-algeèbre différentielle graduée et M un A-bimodule différentiel gradué, un k-module simplicial différentiel gradué $\mathcal{B}(A,M)$, c'est-à-dire un objet simplicial dans la catégorie des complexes de k-modules. En utilisant comme précédemment la différentielle de Moore, on obtient un bicomplexe de k-modules. Son complexe total est la construction bar qu'on notera comme précédemment $B(A;M)$.

Une propriété importante de cette construction bar est qu'elle préserve les quasi-isomorphismes.

2 Construction cubique et homologie de Mac Lane

Soit A un anneau. On note $A-\mathbf{Mod}$ la catégorie des A-modules à gauche, $\mathbf{P}(A)$ la sous-catégorie pleine des A-modules projectifs (on pourrait se restreindre aux libres) de type fini (ou un squelette de celle-ci), $A^e := A^{op} \otimes A$ (de sorte que $A^e - \mathbf{Mod}$ s'identifie à la catégorie des A-bimodules) et $\mathcal{F}(A)$ la catégorie des foncteurs $\mathbf{P}(A) \to A - \mathbf{Mod}$.

Les foncteurs

$$t : A^e - \mathbf{Mod} \to \mathcal{F}(A) \qquad M \mapsto - \underset{A}{\otimes} M$$

et

$$h : A^e - \mathbf{Mod} \to \mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A)^{op}, A - \mathbf{Mod}) \qquad M \mapsto \mathrm{Hom}_A(-,M)$$

sont exacts et pleinement fidèles ; leurs images essentielles s'identifient aux sous-catégories de foncteurs additifs.

On note $\mathrm{I} : \mathbf{P}(A) \to A - \mathbf{Mod}$ le foncteur d'inclusion, il s'identifie à t_A.

Proposition 2. *Supposons donné un foncteur $C_\bullet : \mathbf{P}(A) \to \mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab})$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $C_n : \mathbf{P}(A) \to \mathbf{Ab}$ est projectif de type fini ;*
2. *C_0 est le foncteur de linéarisation $\mathbb{Z}[-]$ ou sa version réduite $\bar{\mathbb{Z}}[-]$ et la projection canonique $C_0 \twoheadrightarrow \mathrm{I}$ induit un isomorphisme $H_0(C_\bullet) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{I}$;*
3. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $H_n(C_\bullet) : \mathbf{P(A)} \to \mathbf{Ab}$ est additif;*
4. *pour tout entier $n > 0$ et tout foncteur additif $F : \mathbf{P}(A)^{op} \to \mathbf{Ab}$, on a $F \underset{\mathbf{P}(A)}{\otimes} C_n = 0$ (ce qui équivaut à $\mathrm{Hom}\,(C_n, A) = 0$ pour tout foncteur additif $A : \mathbf{P}(A) \to \mathbf{Ab}$) ;*
5. *le complexe $C_\bullet(A)$ possède une structure d'anneau différentiel gradué et, pour tout objet M de $\mathbf{P}(A)$, le complexe $C_\bullet(M)$ possède une structure naturelle de $C_\bullet(A)$-module différentiel gradué (là encore, on se donne ces structures).*

Considérons $A \simeq H_0(C_\bullet(A))$ comme un $C_\bullet(A)$-bimodule, ce qui permet de former la construction bar $B(A, C_\bullet(A), A)$. Ce complexe possède une structure naturelle de A-bimodule.

Alors on dispose d'isomorphismes gradués

$$H_*\big(B(A, C_\bullet(A), A) \otimes_{A^e} M\big) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathbf{P}(A)}(h_M, \mathrm{I})$$

et

$$H^*\big(\mathrm{Hom}_{A^e}(B(A, C_\bullet(A), A), M)\big) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(A)}(\mathrm{I}, t_M)$$

naturels en le A-bimodule M.

Démonstration. On commence par remarquer que, pour tout objet V de $\mathbf{P}(A)$, le morphisme naturel

$$B(A, C_\bullet(A), C_\bullet(V)) \to B(A, A, V) \to V$$

est un quasi-isomorphisme. C'est clair pour $V = A$; le cas où $V = A^{\oplus i}$ s'en déduit en utilisant l'hypothèse d'additivité des $H_n(C_\bullet)$ et la préservation des quasi-isomorphismes par la construction bar. Le cas général d'un module projectif de type fini s'ensuit.

Maintenant, on remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(A, C_\bullet(A), C_\bullet(-))$ est un objet projectif de $\mathcal{F}(A)$. Cela découle de l'hypothèse faite sur les C_i, puisque ce foncteur est une somme directe de foncteurs du type $A \otimes C_{i_1}(A) \otimes \cdots \otimes C_{i_r}(A) \otimes C_j$.

Autrement dit, on vient d'observer que $B_*(A, C_\bullet(A), C_\bullet(-))$ *est une résolution projective de* I *dans* $\mathcal{F}(A)$.

Maintenant, comme h_M est un foncteur additif, on a

$$h_M \underset{\mathbf{P}(A)}{\otimes} B_n(A, C_\bullet(A), C_\bullet(-)) \simeq h_M \underset{\mathbf{P}(A)}{\otimes} \big(A \otimes C_n(A) \otimes C_0\big) \simeq (A \otimes C_n(A) \otimes A) \underset{A^e}{\otimes} M$$

où le premier isomorphisme provient de la quatrième hypothèse et le deuxième de $C_0 = \mathbb{Z}[-]$. L'assertion relative à l'homologie en découle, l'autre est analogue. □

La construction Q de Mac Lane (cf. [3] et [10]) peut être vue comme un foncteur $Q_\bullet : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab})$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur Q_n est facteur direct d'un foncteur du type $V \mapsto \mathbb{Z}[V^r]$ (avec $r = 2^n$ en l'occurrence) ;
2. on a $Q_0 = \bar{\mathbb{Z}}[-]$ et la projection canonique vers le foncteur identité induit un isomorphisme $H_0(Q_\bullet) \simeq Id$;
3. pour $n > 0$, il n'y a pas morphisme non nul de Q_n vers un foncteur additif ;
4. pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $H_n(Q_\bullet) : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ est additif ;

5. on dispose de *produits de Dixmier* (externes), à savoir de morphismes naturels $Q_i(A) \otimes Q_j(B) \to Q_{i+j}(A \otimes B)$ qui sont associatifs, et unitaires relativement à un morphisme canonique $\mathbb{Z} \to Q_*(\mathbb{Z})$.
   En particulier, si A est un anneau, $Q_*(A)$ hérite d'une structure d'anneau naturelle dont le produit est le morphisme (produit de Dixmier interne)
   $$Q_*(A) \otimes Q_*(A) \to Q_*(A \otimes A) \to Q_*(A)$$
   composé du produit de Dixmier externe et du morphisme induit par le produit de A et l'unité le morphisme
   $$\mathbb{Z} \to Q_0(\mathbb{Z}) \hookrightarrow Q_*(\mathbb{Z}) \to Q_*(A)$$
   composé du morphisme susmentionné et du morphisme induit par l'unité de A.
   De façon analogue, si M est un A-module à gauche (resp. à droite), $Q_*(M)$ hérite d'une structure naturelle de $Q_*(A)$-module à gauche (resp. à droite).

Nous allons revenir sur la définition du complexe $Q_\bullet$ et la démonstration de ces propriétés, mais avant donnons la définition et la conclusion qui s'impose :

Définition 3. Soient A un anneau un M un A-bimodule. On définit l'*homologie de Mac Lane* de A à coefficients dans M comme :

$$HML_*(A;M) := H_*\big(B(A, Q_\bullet(A), A) \otimes_{A^e} M\big)$$

et la *cohomologie de Mac Lane* de A à coefficients dans M comme :

$$HML^*(A;M) := H^*\big(\mathrm{Hom}_{A^e}(B(A, Q_\bullet(A), A), M)\big).$$

La proposition 2 et les propriétés ci-dessus impliquent donc :

Corollaire 4 (Jibladze-Pirashvili [8]). *On dispose d'isomorphismes gradués*

$$HML_*(A;M) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathbf{P}(A)}(h_M, \mathrm{I})$$

et

$$HML^*(A;M) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(A)}(\mathrm{I}, t_M)$$

naturels en le A-bimodule M.

(En fait, Jibladze et Pirashvili montrent un peu plus — on peut remplacer $\mathcal{F}(A)$ par certaines variantes —, voir [8], théorème A.)

Noter que le morphisme canonique $Q_\bullet(A) \to A$ induit des morphismes gradués naturels

$$HML_*(A;M) \to HH_*(A;M)$$

et

$$HH^*(A;M) \to HML^*(A;M).$$

Ceux-ci sont des isomorphismes lorsque A est une $\mathbb{Q}$-algèbre (car $Q_\bullet(A) \to A$ est alors un quasi-isomorphisme, l'homologie rationnelle des Eilenberg-Mac Lane étant triviale), mais pas pour $A = M = \mathbb{Z}/p$ où p est un nombre premier, par exemple (l'homologie de Hochschild est alors nulle en degré strictement positif, tandis que l'homologie de Mac Lane est nulle en degré impair mais isomorphe à $\mathbb{Z}/p$ en chaque degré pair).

Remarque 5 (Interprétation concrète des HH^2). Le groupe abélien $HML^2(A;M)$ classifie les *extensions spéciales* de A par M, c'est-à-dire les morphismes surjectifs d'anneaux $f : B \twoheadrightarrow A$ dont le noyau est un idéal de carré nul dont la structure de A-bimodule (qu'induit sa structure d'idéal bilatère dans B compte-tenu de ce que $A^2 = 0$) est celle donnée sur M (voir [10], théorème 2). Le groupe abélien $HH^2(A;M)$ classifie quant à lui les extensions spéciales linéairement scindées (i.e. les extensions spéciales f qui sont scindées comme morphismes de groupes abéliens).

Le morphisme naturel $HH^2(A;M) \to HML^2(A;M)$ mentionné plus haut est induit, via les descriptions précédentes, par l'inclusion des extensions spéciales linéairement scindées dans toutes les extensions spéciales.

Rappel : définition de la construction Q Soient A un groupe abélien et $n \in \mathbb{N}$. On note $C_n := \{0,1\}^n$ l'ensemble des sommets d'un cube de dimension n et $Q'_n(A) := \mathbb{Z}[A^{C_n}]$ le groupe abélien libre construit sur l'ensemble des fonctions de C_n dans A. Les cubes étant munis de « faces » $r_i, s_i : C_{n-1} \to C_n$ pour $1 \leq i \leq n$ où $r_i(x)$ (resp. $s_i(x)$) est obtenu en ajoutant à x un 0 (resp. 1) en position i, on définit sur $Q'(A)$ une structure de complexe de chaînes en posant

$$\delta_n([t]) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \big([P_i(t)] - [R_i(t)] - [S_i(t)]\big)$$

(pour $t \in A^{C_n}$) où $R_i(t) = t \circ r_i$, $S_i(t) = t \circ s_i$ et $P_i(t) = R_i(t) + S_i(t)$ (la vérification de $\delta_n \delta_{n+1} = 0$ est un exercice facile découlant d'identités formelles comme $R_j R_i = R_i R_{j-1}$ pour $i < j$). On obtient ainsi un foncteur Q' des groupes abéliens vers les complexes de chaînes (concentrés en degré positif) de groupes abéliens.

Le complexe cubique $Q_*(A)$ s'obtient en prenant le quotient de $Q'_*(A)$ par un sous-complexe naturel explicite (composée de sortes de « dégénérescences » — mais attention, contrairement à ce qu'une certaine intuition simpliciale pourrait laisser penser, la projection $Q'(A) \twoheadrightarrow Q(A)$ n'est généralement pas un quasi-isomorphisme).

On note $Q_n(A)$ le quotient de $Q'_n(A)$ par le sous-groupe engendré par les *tranches* et les *diagonales*. Une tranche est un élément $[t]$, où $t \in A^{C_n}$ est tel que $t = 0$ si $n = 0$, ou une i-tranche pour un $1 \leq i \leq n$ si $n > 0$, c'est-à-dire un élément tel que $t(a) = 0$ pour tout a tel que $a_i = 0$ ou pour tout $a \in C_n$ tel que $a_i = 1$. Une i-diagonale est un élément $[t]$, où $t \in A^{C^n}$ avec $1 \leq i \leq n-1$, tel que $t(a) = 0$ pour tout $a \in C^n$ tel que $a_i \neq a_{i+1}$. (Dans [10], Mac Lane affirme qu'il n'est en fait pas nécessaire de tuer les diagonales, mais que c'est utile.) Il est clair que la différentielle δ préserve les tranches et envoie une diagonale sur une diagonale ou une tranche, de sorte que la projection de Q' sur Q munit Q d'une structure de foncteur des groupes abéliens vers les complexes de chaînes de groupes abéliens.

Les produits de Dixmier externes sont définis au niveau de Q de la manière suivante : si A et B sont deux groupes abéliens, $t \in A^{C_i}$ et $u \in B^{C_j}$, le produit de $[t]$ et $[u]$ est l'élément $[t.u]$, où $t.u$ est l'image de $t \otimes u$ par l'isomorphisme canonique

$$A^{C_i} \otimes B^{C_j} \xrightarrow{\simeq} (A \otimes B)^{C_i \times C_j} \xrightarrow{\simeq} (A \otimes B)^{C_{i+j}}.$$

Il est facile de voir que l'application $Q'_i(A) \otimes Q'_j(B) \to Q'_{i+j}(A \otimes B)$ est compatible aux différentielles et passe au quotient $Q' \twoheadrightarrow Q$ pour définir la structure produit dont on a besoin sur la construction Q. L'unité est naturellement l'élément [1] de $Q'_0(\mathbb{Z})$ ou son image dans $Q_0(\mathbb{Z})$.

(L'intérêt des cubes est clair ici : les propriétés monoïdales de ces morphismes sont évidentes.)

Vérification des propriétés formelles nécessaires de la construction Q Il est remarquablement simple et formel de montrer que les complexes Q' et Q ont une homologie additive, sans utiliser le moins du monde l'identification de leur homologie à l'homologie stable des espaces d'Eilenberg-Mac Lane (ce qui n'est d'aucune utilité ici, c'est peut-être l'un des points les plus spectaculaires du travail de Jibladze et Pirashvili). Pour cela, observons qu'un foncteur F défini sur une catégorie additive est additif si et seulement l'application naturelle

$$F(s) - F(p_1) - F(p_2) : F(V \oplus V) \to F(V)$$

est nulle, où $p_i : V \oplus V \to V$ est la i-ème projection et $s = p_1 + p_2$ la somme.

Pour voir que l'homologie de Q' est additive, il suffit donc de construire une homotopie entre 0 et $Q'(s) - Q'(p_1) - Q'(p_2) : Q'(V \oplus V) \to Q'(V)$. On observe que $Q'_n(V \oplus V) \simeq Q'_{n+1}(V)$; précisément, nous choisirons l'isomorphisme naturel envoyant $[t, u]$, où t et u sont des éléments de V^{C_n}, sur $[x]$ où $x(a, 0) = t$ et $x(a, 1) = u$. On vérifie aussitôt que cet isomorphisme définit l'homotopie recherchée (à un signe près). De plus, cette homotopie passe au quotient sur Q, de sorte que les homologies des complexes Q' et Q (qui ne sont *pas* isomorphes) sont constituées de foncteurs additifs.

Suivant [8], § 2, si F est un foncteur d'une catégorie additive dans une catégorie abélienne et S un ensemble fini, nous noterons F_S le foncteur $V \mapsto F(V[S])$; cette construction est fonctorielle en S (et en F).

Lemme 6. *Soient S un ensemble fini et $T_1, \dots, T_r$ des sous-ensembles de S. Notons G le conoyau du morphisme canonique $\bigoplus_{i=1}^r F_{T_i} \to F_T$. Alors :*

1. *la projection canonique $F \twoheadrightarrow G$ est scindée ;*
2. *si les T_i recouvrent S, il n'y a aucun morphisme non nul de G vers un foncteur additif.*

Le premier point coïncide avec [8], *Corollary 2.3*, c'est un exercice facile autour de la notion d'effet croisé. Indiquons rapidement comment démontrer le deuxième point (c'est fait dans [8] au cours de la démonstration du Theorem A, § 2). On peut supposer que F est la linéarisation d'un foncteur additif A, quitte à utiliser une présentation de F par des sommes directes de projectifs à la Yoneda (de toute façon, pour la construction Q, seul le cas où F est la linéarisation d'un foncteur additif nous importe) ; si B est un autre foncteur additif on note que

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[A], B) \simeq \mathrm{Hom}(A, B)$$

et, pour tout ensemble fini S,

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[A]_S, B) \simeq \mathrm{Hom}(A, B)^S$$

naturellement en S. La conclusion résulte donc de ce que, pour tout groupe abélien V, le morphisme canonique

$$V^S \to \bigoplus_{i=1}^r V^{T_i}$$

est un monomorphisme si les T_i recouvrent S (on peut aussi exprimer cela, encore, en termes d'effets croisés).

Le premier point de ce lemme assure que les foncteurs Q_n possèdent bien la propriété de projectivité requise (ce qui est évident pour les Q'_n). Quant au deuxième point, il montre qu'il n'y a pas de morphisme non nul de Q_n vers un foncteur additif pour $n > 0$. Cette propriété, fondamentale pour établir le corollaire 4, est évidemment en défaut pour les Q'_n, d'où la nécessité de normaliser (on voit aussi que la normalisation par les diagonales n'est pas nécessaire pour cela).

Le point de vue de Johnson-Mac Carthy On peut se demander si le complexe Q (ou Q', ou la variante obtenue en ne normalisant que par les tranches) peut s'obtenir comme l'un des complexes classiques associés fonctoriellement à un groupe abélien cubique convenable. La question semble ouverte.

En revanche, même si ce complexe a un aspect cubique, Johnson et Mac Carthy donnent dans [9] une présentation générale de la variante C du complexe Q obtenue en ne normalisant que par les tranches comme complexe *simplicial* augmenté (l'un des avantages de cette présentation étant de fournir quasi-gratuitement une généralisation de cette construction pour obtenir une homologie de degré n, entier fixé, plutôt que simplement additive, en utilisant l'effet croisé cr_{n+1} plutôt que cr_2). Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. On peut voir le deuxième effet croisé cr_2 est un foncteur de la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ des foncteurs réduits (i.e. nuls en 0) vers la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ constituée des bifoncteurs B tels que $B(u, v) = 0$ si u ou v est nul, qui est adjoint à gauche à la précomposition par la somme $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. En composant ces deux foncteurs, on obtient un endofoncteur T des foncteurs réduits de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ tel que

$$TF(V) = F(V \oplus V)/(F(V) \oplus F(V)).$$

Ce foncteur s'insère dans une comonade, qui donne lieu formellement à un foncteur simplicial augmenté dont le n-ème terme ($n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$) est T^{n+1}. Le complexe C est exactement le complexe de Moore [1] associé à l'objet simplicial augmenté sur les endofoncteurs des groupes abéliens obtenu en appliquant le foncteur simplicial augmenté précédent à l'endofoncteur $\bar{\mathbb{Z}}[-]$ (idéal d'augmentation de l'anneau de groupe) des groupes abéliens.

Calcul de la (co)homologie de Mac Lane : historique très succinct Hormis l'observation que l'homologie de Mac Lane coïncide avec l'homologie de Hochschild pour les $\mathbb{Q}$-algèbres, il n'y a eu pendant longtemps aucun calcul d'homologie de Mac Lane (et peu, voire pas, de suites données au travail de Mac Lane du début des années 1950 sur la construction Q). Le premier calcul de la cohomologie de Mac Lane des corps finis est dû à Breen en 1978 ([2]) ; il utilise un langage faisceautique (pas indispensable) et surtout l'algèbre de Steenrod. L'utilisation d'homologie des foncteurs a permis, au début des années 1990, un calcul beaucoup plus simple, par Franjou, Lannes et Schwarts ([6]). Franjou et Pirashvili ont calculé ([7]) l'homologie de Mac Lane de $\mathbb{Z}$, que Bökstedt avait déterminée (travail non publié) en utilisant THH. Pirashvili a également déterminé dans [11], en utilisant l'homologie des foncteurs, l'homologie de Mac Lane de tous les anneaux $\mathbb{Z}/n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans l'article [12], Pirashvili montre que le calcul de l'homologie de Mac Lane de beaucoup d'anneaux peut se ramener à celui de $\mathbb{Z}$ ou d'un corps fini et à un calcul d'homologie de Hochschild. Ce travail utilise la construction Q (il serait intéressant de voir si on peut tout traduire commodément en termes d'homologie des foncteurs).

Construction Q et résolutions projectives des foncteurs additifs On a vu dans la démonstration de la proposition 2 comment combiner la construction Q (ou d'autres complexes de foncteurs appropriés) et la construction bar pour obtenir des résolutions projectives de foncteurs additifs. Malheureusement, les résolutions obtenues sont énormes (sauf dans $\mathcal{F}(A)$, où A est un anneau *fini*), car $Q_n(V)$ n'est jamais un groupe abélien de type fini si V un groupe abélien infini. Toutefois, on peut utiliser la

1. Il est très probable que le complexe Q soit exactement le complexe réduit (au sens où l'on prend le quotient tuant les dégénérescences, au sens simplicial bien sûr) associé à cet objet simplicial augmenté, mais votre serviteur ne l'a pas vérifié entièrement.

construction Q pour montrer, dans certains cas, des propriétés de finitude des foncteurs additifs (et plus généralement polynomiaux) sur une catégorie additive.

Proposition 7. *Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive. Supposons que la sous-catégorie pleine $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ constituée des foncteurs additifs soit localement noethérienne. Alors tout foncteur polynomial et de type fini de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ possède une résolution projective de type fini (i.e. une résolution projective dont tous les termes sont de type fini).*

(La propriété peut être en défaut sans hypothèse sur la petite catégorie additive $\mathcal{A}$.)

Esquisse de démonstration. Disons qu'un foncteur est pf_n, où $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, s'il possède une résolution projective dont les termes sont de type fini jusqu'en degré n.

En utilisant une récurrence sur le degré polynomial, les résultats de base sur la structure des foncteurs polynomiaux et la stabilité par produit tensoriel de foncteurs pf_∞ est pf_∞, on voit facilement qu'il suffit de démontrer la propriété pour les foncteurs *additifs* $A : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ de type fini. On montre par récurrence sur n qu'un tel foncteur est pf_n. Pour $n = 0$, il n'y a rien à faire, on suppose donc $n > 0$.

L'homologie du complexe $Q_\bullet \circ A$ de foncteurs $\mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ est constituée de foncteurs additifs de type fini. En effet, l'homologie des espaces d'Eilenberg -Mac Lane est en chaque degré strictement positif une somme directe finie de foncteurs du type $V \mapsto \mathbb{Z}/p \otimes V$ et $V \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, V)$ (où p est un nombre premier), donc l'homologie de $Q_\circ A$ est en chaque degré une somme directe finie de quotients et de sous-foncteurs de A. (Comme $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ est localement noethérienne, un sous-objet d'un objet noethérien de cette catégorie est encore noethérien.) L'hypothèse de récurrence montre donc que l'homologie de ce complexe est constituée de foncteurs pf_{n-1}. Par ailleurs, tous ses termes sont pf_∞ (car on peut se ramener au cas où $A = \mathcal{A}(a, -)$ en résolvant A dans $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$). Par un argument classique de décalage ou de suite spectrale, on en déduit que $A \simeq H_0(Q_\bullet \circ A)$ est pf_n (par exemple, utiliser que F est pf_n si et seulement si $\mathrm{Ext}^i(F, -)$ commute aux colimites filtrantes de monomorphismes pour $i \leq n$). □

Remarque 8. Cette proposition n'est certainement pas nouvelle, mais votre serviteur ne connaît pas de référence.

3 Homologie de Hochschild topologique (THH)

On applique la construction bar (dans le cadre générale de la première section) à la catégorie monoïdale symétrique des spectres $\mathbf{Spt}$ munie du produit contracté $\wedge$. La construction de cette catégorie monoïdale symétrique est tout sauf une évidence, nous la tairons entièrement dans cet exposé.

En conséquence, si X est un spectre en anneaux (i.e. un anneau dans la catégorie monoïdale $\mathbf{Spt}$) et M un bimodule sur X, on dispose d'un spectre simplicial $\mathcal{B}(X; M)$. En utilisant le foncteur de réalisation des spectres simpliciaux vers les spectres (analogue stable de la réalisation des espaces topologiques simpliciaux — là encore, nous tairons complètement sa définition), on obtient un spectre $|\mathcal{B}(X; M)|$ dont on peut considérer l'homotopie.

Si A est un anneau (au sens ordinaire de l'algèbre linéaire) et M un bimodule sur A, le spectre d'Eilenberg-Mac Lane HA est un spectre en anneaux, et HM est un bimodule (dans $\mathbf{Spt}$) sur HA. Bien sûr, cela nécessite de disposer d'un bon foncteur *monoïdal* « spectre d'Eilenberg-Mac Lane » des groupes abéliens vers les spectres, question non triviale que nous n'aborderons pas non plus. Par définition, l'homologie de Hochschild topologique de A à coefficients dans M est :

$$THH_*(A;M) := \pi_*\big(|\mathcal{B}(HA;HM)|\big)$$

(on peut de même définir une cohomologie de Hochschild topologique $THH^*(A;M)$). Cette notion est due à Bökstedt.

Dans [13], Pirashvili et Waldhausen démontrent :

Proposition 9 (Pirashvili-Waldhausen). *Il existe un isomorphisme naturel*

$$THH_*(A;M) \simeq HML_*(A;M).$$

Précisément, ils exhibent un isomorphisme naturel $THH_*(A;M) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathbf{P}(A)}(h_M, \mathrm{I})$ et appliquent le corollaire 4. Ils utilisent pour cela un autre modèle de THH construit à partir d'endofoncteurs appropriés (qui servent de modèles pour l'homotopie stable et évitent les difficultés de construction de la catégorie monoïdale symétrique **Spt**) sur la catégorie Γ des ensembles pointés finis.

Dans [4], Fiedorowicz, Pirashvili, Schwänzl, Vogt et Waldhausen précisent cet isomorphisme naturel en le relevant au niveau homotopique.

Remarque 10. La démonstration de la proposition précédente n'est pas difficile ; toute la difficulté réside dans les constructions.

On se convainc d'ailleurs aisément que cette proposition est plausible de la manière suivante : supposons pour simplifier que A est une algèbre sur un corps premier k (de sorte que la formule de Künneth soit particulièrement agréable). Le spectre simplicial $\mathcal{B}(HA;HM)$ vaut $HA^{\wedge i} \wedge HM$ en degré (simplicial) i, de sorte que son homotopie s'exprime comme suit :

$$\pi_*(\mathcal{B}(HA;HM)_i) = \pi_*(HA^{\wedge i} \wedge HM) \simeq H_*(HA^{\wedge i};M) \simeq H_*(HA;k)^{\otimes i} \otimes M\ ;$$

cette homotopie est la première page d'une suite spectrale (générale pour tout spectre simplicial) d'aboutissement $THH_*(A;M)$. Pour sa part, l'homologie de Mac Lane est l'aboutissement d'une suite spectrale (venant de ce que la construction bar sur une algèbre différentielle graduée est le complexe total d'un bicomplexe) dont la première page est donnée par

$$H_*(Q(A)^{\otimes i} \otimes M) \simeq H_*(Q(A))^{\otimes i} \otimes M \simeq H_*(HA;k)^{\otimes i} \otimes M.$$

De plus, dans les deux cas, la différentielle d^1 est la différentielle de Hochschild (de sorte que la deuxième page des suites spectrales sera dans les deux cas $HH_\bullet(H_*(HA;k);M)$).

Dans [4], une suite d'équivalences faibles naturelles de spectres simpliciaux est exhibée qui permet d'identifier les deux suites spectrales précédentes dont nous avons seulement noté la coïncidence à la deuxième page.

4 Homologie des groupes linéaires, K-théorie stable et homologie des foncteurs

L'un des succès majeurs de l'homologie des foncteurs provient du lien, mis en évidence depuis la fin des années 1990, qu'elle possède avec l'homologie des groupes linéaires, dont elle permet d'effectuer assez simplement des calculs stables a priori hors d'atteinte sans lourde machinerie. Le premier résultat, qui concerne les corps finis, a été établi indépendamment par Betley ([1]) et Suslin (appendice de [5]).

Théorème 11 (Betley, Suslin). *Soit k un corps fini.*

1. *Si F et G sont des foncteurs* polynomiaux *de $\mathcal{F}(k)$, pour tout entier i, le morphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(k)}(F,G) \to \mathrm{Ext}^i_{k[GL_n(k)]}(F(k^n),G(k^n))$$

induit par l'évaluation sur k^n est un isomorphisme pour n assez grand (la borne dépendant seulement de i et des degrés de F et G). $\mathbf{P}(k) \to k-\mathbf{Mod}$

2. *Si $F : \mathbf{P}(k)^{op} \to k-\mathbf{Mod}$ et $G \in \mathcal{F}(k)$ sont des foncteurs polynomiaux, pour tout entier i, le morphisme naturel*

$$\mathrm{Tor}_i^{k[GL_n(k)]}(F(k^n),G(k^n)) \to \mathrm{Tor}_i^{\mathbf{P}(k)}(F,G)$$

est un isomorphisme pour n assez grand (la borne dépendant seulement de i et des degrés de F et G).

3. *Si $B : \mathbf{P}(k)^{op} \times \mathbf{P}(k) \to k-\mathbf{Mod}$ est un bifoncteur polynomial, le morphisme naturel*

$$H_i(GL_n(k);B(k^n,k^n)) \to HH_i(\mathbf{P}(k);B)$$

est un isomorphisme pour n assez grand (la borne dépendant seulement de i et du degré de B).

Lorsque F et G sont des foncteurs additifs, les deux premiers points et le corollaire 4 indiquent donc qu'on peut interpréter l'homologie de Mac Lane de k comme homologie stable des groupes linéaires sur k.

Ce théorème contient la stabilité homologique pour les groupes linéaires sur k à coefficients polynomiaux et la trivialité de l'homologie de $GL_\infty(k) := \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{colim}}\, GL_n(k)$ à coefficients dans k ; en fait, la démonstration utilise des deux résultats non triviaux, dus respectivement à Dwyer (qui a généralisé aux coefficients tordus les résultats de stabilité homologique initiés par Quillen puis développés par de nombreux autres mathématiciens, notamment van der Kallen) et Quillen.

Pour le reste de la démonstration, Suslin utilise des méthodes internes à l'homologie des foncteurs. Betley transite par la catégorie des *foncteurs polynomiaux stricts* (qui apparaîtra durant ce groupe de travail dans l'exposé d'Antoine Touzé), reliée de près aux groupes linéaires vus comme groupes algébriques.

La trivialité de l'homologie de $GL_\infty(k)$ à coefficients dans k ne vaut pas pour tout anneau k ; on ne peut donc pas espérer étendre tel quel le théorème 11. Il y a deux méthodes voisines pour tenir compte de ce phénomène (l'homologie des foncteurs semble incapable de donner quelque renseignement que ce soit sur le très difficile problème de calculer l'homologie de $GL_\infty(k)$ à coefficients constants).

La première consiste à utiliser la *K-théorie stable* (introduite par Kassel au début des années 1980, dans le prolongement de travaux de Waldhausen). Soient A un anneau et $X(A)$ la fibre homotopique de l'application canonique $BGL_\infty(A) \to BGL_\infty(A)^+$. Si M est un $GL_\infty(A)$-module, on peut considérer l'homologie $H_*(X(A);M)$ où $\pi_1(X(A))$ opère sur M via le morphisme canonique vers $\pi_1(BGL_\infty(A)) = GL_\infty(A)$. (En fait, pour la définition originelle de la K-théorie stable, on se restreint aux représentations de $GL_\infty(A)$ des matrices infinies dont seul un nombre fini de coefficients sont non nuls, à coefficients dans un A-bimodule, l'action se faisant par conjugaison.) Cette homologie est la K-théorie stable de A à coefficients dans M, on la note $K^s_*(A;M)$. On dispose d'une suite spectrale de Serre

$$E^2_{p,q} = H_p(GL_\infty(A);K^s_*(A;M)) \Rightarrow H_{p+q}(GL_\infty(A);M).$$

Le point remarquable est que, dans les bons cas (ceux dont on va parler), l'action de $GL_\infty(A)$ sur $K^s_*(A;M)$ dans le membre de gauche est *triviale* et que la suite spectrale s'effondre à la page 2. La généralisation du théorème 11 au cas d'un anneau quelconque, due à Scorichenko ([14], non publié) s'énoncé ainsi : *la K-théorie stable d'un anneau arbitraire à coefficients dans la représentation de son groupe linéaire obtenue à partir d'un bifoncteur polynomial sur $\mathbf{P}(A)$ est naturellement isomorphe à l'homologie de Hochschild de ce bifoncteur.* Autrement dit, Scorichenko a démontré pour un anneau quelconque et des coefficients polynomiaux quelconques la conjecture selon laquelle le morphisme naturel entre THH et K^s est un isomorphisme.

On peut aussi relier directement l'homologie de $GL_\infty(A)$ à l'homologie des foncteurs pour obtenir la reformulation suivante du théorème de Scorichenko : si B est un bifoncteur polynomial sur $\mathbf{P}(A)$, on dispose d'un isomorphisme gradué naturel

$$H_*(GL_\infty(A); \operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} B(A^n,A^n)) \simeq HH_*(GL_\infty(A)\times \mathbf{P}(A);B)$$

où le groupe linéaire opère *trivialement* sur le membre de droite.

Ces résultats (et des généralisations qui ont suivi) constituent une motivation importante aux calculs (co)homologiques sur $\mathbf{P}(A)$ avec des (bi)foncteurs polynomiaux.

Références

[1] Stanislaw Betley. Stable K-theory of finite fields. *K-Theory*, 17(2) :103–111, 1999.

[2] Lawrence Breen. Extensions du groupe additif. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (48) :39–125, 1978.

[3] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane. Homology theories for multiplicative systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 71 :294–330, 1951.

[4] Z. Fiedorowicz, T. Pirashvili, R. Schwänzl, R. Vogt, and F. Waldhausen. Mac Lane homology and topological Hochschild homology. *Math. Ann.*, 303(1) :149–164, 1995.

[5] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Alexander Scorichenko, and Andrei Suslin. General linear and functor cohomology over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 150(2) :663–728, 1999.

[6] Vincent Franjou, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis. *Invent. Math.*, 115(3) :513–538, 1994.

[7] Vincent Franjou and Teimuraz Pirashvili. On the Mac Lane cohomology for the ring of integers. *Topology*, 37(1) :109–114, 1998.

[8] Mamuka Jibladze and Teimuraz Pirashvili. Cohomology of algebraic theories. *J. Algebra*, 137(2) :253–296, 1991.

[9] B. Johnson and R. McCarthy. Deriving calculus with cotriples. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(2) :757–803 (electronic), 2004.

[10] Saunders Mac Lane. Homologie des anneaux et des modules. In *Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956*, pages 55–80. Georges Thone, Liège ; Masson & Cie, Paris, 1957.

[11] T. Pirashvili. On the topological Hochschild homology of $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$. *Comm. Algebra*, 23(4) :1545–1549, 1995.

[12] Teimuraz Pirashvili. Spectral sequence for Mac Lane homology. *J. Algebra*, 170(2) :422–428, 1994.

[13] Teimuraz Pirashvili and Friedhelm Waldhausen. Mac Lane homology and topological Hochschild homology. *J. Pure Appl. Algebra*, 82(1) :81–98, 1992.

[14] Alexander Scorichenko. *Stable K-theory and functor homology over a ring.* PhD thesis, Evanston, 2000.