La structure de la catégorie des algèbres de Hopf en caractéristique p

Notes d'exposé au groupe de travail sur les anneaux de Hopf

Aurélien DJAMENT

Angers, mars 2014

Résumé

Le but de cet exposé est d'expliquer des résultats de structure sur la catégorie des algèbres de Hopf (graduées, connexes, bicommutatives) sur un corps commutatif parfait de caractéristique positive présentés par Schoeller dans [Sch70].

Table des matières

1 La catégorie $\mathcal{H}(k)$: définitions, premières propriétés

Soit k un corps commutatif. On note $\mathcal{H}(k)$ (ou simplement $\mathcal{H}$) la catégorie des k-algèbres de Hopf H (unitaires, coünitaires, associatives, coassociatives) graduées [1] sur $\mathbb{N}$, bicommutatives (la commutativité et la cocommutativité s'entendant au sens gradué) et *connexes*, c'est-à-dire telles que H_0 soit la droite vectorielle engendrée par l'unité. Cette condition est évidemment fondamentale dans tout ce qui suit, permettant, par des arguments de récurrence sur le degré, d'obtenir des propriétés qui sont complètement fausses pour des algèbres de Hopf non graduées ou graduées non connexes [2].

On rappelle quelques propriétés classiques :

1. la catégorie $\mathcal{H}(k)$ est additive (c'est le caractère bicommutatif des algèbres de Hopf qui est important ici — cf. la catégorie des groupes abéliens —,

1. On suppose que les morphismes respectent la graduation, i.e. sont de degré nul.

2. On rappelle également qu'une bigèbre graduée connexe possède toujours une inversion unique, on ne souciera donc jamais d'inversions.

pas la connexité) et sa somme directe est le produit tensoriel (sur k, au sens gradué) ;

2. c'est même une catégorie abélienne ; on a la description suivante des conoyaux : si $f : H \to K$ est un morphisme de $\mathcal{H}(k)$, alors le conoyau de f a pour k-algèbre graduée sous-jacente le quotient de K par l'idéal gradué qu'engendre l'image par f de l'idéal d'augmentation $\bar{H} := \bigoplus_{n>0} H_n$ de H, la structure de cogèbre étant induite par celle de K. (Il existe une description duale du noyau de f : en tant qu'espace vectoriel gradué c'est le noyau de la composition

$$0 \to H \xrightarrow{\Delta} H \otimes H \xrightarrow{f \otimes H} K \otimes H \twoheadrightarrow \bar{K} \otimes H$$

avec diagonale et produit induits par ceux de H.)

3. La catégorie $\mathcal{H}(k)$ possède des limites et colimites arbitraires ; le foncteur d'oubli de $\mathcal{H}(k)$ vers les k-algèbres graduées commutatives (resp. les k-cogèbres graduées cocommutatives) commute aux colimites (resp. aux limites) — cela découle formellement de ce que le produit tensoriel est une somme (resp. un produit) catégorique dans les algèbres commutatives (resp. les cogèbres cocommutatives). En particulier, les colimites filtrantes sont exactes dans $\mathcal{H}(k)$.

Rappelons également quelques foncteurs fondamentaux :

1. le foncteur de dualité, qui au niveau des k-espaces vectoriels gradués sous-jacents est la dualité (graduée) usuelle, est défini sur la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}(k)$ des algèbres de Hopf H *réflexives*, c'est-à-dire telles que H_n soit un k-espace vectoriel de dimension finie pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est une anti-autoéquivalence de cette sous-catégorie.
2. Le foncteur des *éléments primitifs* $P : \mathcal{H}(k) \to \mathcal{E}_{gr}(k)$ (catégorie des k-espaces vectoriels gradués) qui à H associe le sous-espace vectoriel gradué de H noyau de $\Delta - 1 \otimes Id - Id \otimes 1 : H \to H \otimes H$;
3. le foncteur des *indécomposables* $Q : \mathcal{H}(k) \to \mathcal{E}_{gr}(k)$ défini par $Q(H) = \bar{H}/\bar{H}^2$.

Les foncteurs P et Q sont duaux : on dispose d'isomorphismes canoniques $P(H^*) \simeq Q(H)^*$ et $Q(H^*) \simeq P(H)^*$ (pour H réflexive). Noter que $P(H)$ (resp. $Q(H)$) ne dépend que de la structure de cogèbre (resp. d'algèbre) graduée sous-jacente à H. De plus :

Proposition 1.1. *Soit $f : H \to K$ un morphisme de $\mathcal{H}(k)$.*

1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
   (a) *f est un monomorphisme ;*
   (b) *le morphisme $P(f) : P(H) \to P(K)$ de $\mathcal{E}_{gr}(k)$ est un monomorphisme (i.e. est injectif) ;*
   (c) *f est injectif (au sens usuel, i.e. son oubli dans $\mathcal{E}_{gr}(k)$ l'est).*
2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
   (a) *f est un épimorphisme ;*
   (b) *le morphisme $Q(f) : Q(H) \to Q(K)$ de $\mathcal{E}_{gr}(k)$ est un épimorphisme (i.e. est surjectif) ;*

(c) f est surjectif (au sens usuel, i.e. son oubli dans $\mathcal{E}_{gr}(k)$ l'est).

3. Le foncteur $P : \mathcal{H}(k) \to \mathcal{E}_{gr}(k)$ est exact à gauche et Q est exact à droite.

En revanche, si l'on n'est pas en caractéristique nulle, les foncteurs P et Q ne sont pas exacts, ni fidèles. Cela est lié au morphisme de Frobenius qui est nul sur les indécomposables sans être nul.

Pour préciser cela, pour tout entier $i > 0$ et tout algèbre H dans $\mathcal{H}(k)$, notons $H(i)$ l'algèbre de Hopf obtenue en décalant multiplicativement les degrés par i : $H(i)_n := H_{n/i}$ si $i|n$, 0 sinon, les morphismes de structure étant induits par ceux de H. Si k est de caractéristique $p > 0$, le morphisme de Frobenius définit un morphisme naturel $H(p) \to {}_{\varphi}H$ de $\mathcal{H}(k)$, où ${}_{\varphi}H$ est la k-algèbre de Hopf dont le groupe abélien gradué sous-jacent est identique à celui de H, mais l'action des scalaires est tordue par le morphisme de Frobenius $\varphi : k \to k$ (avec les mêmes multiplication et diagonale). L'image de ce morphisme est une sous-algèbre de Hopf de ${}_{\varphi}H$, c'est aussi une sous-algèbre de Hopf de H lorsque k est un corps parfait ; en général on considère la sous-k-algèbre de Hopf qu'engendre cette image et on la note αH. On définit de manière duale un quotient βH de H.

On peut trouver la démonstration de la proposition suivante (qui n'est pas difficile) dans la section 4 de [MM65].

Proposition 1.2. *Notons $\lambda : P \to Q$ la transformation naturelle égale sur l'objet H de $\mathcal{H}(k)$ à la composition*

$$P(H) \hookrightarrow \bar{H} \twoheadrightarrow Q(H).$$

1. *Si k est de caractéristique nulle, alors λ est un isomorphisme.*
2. *Si k est de caractéristique $p > 0$, alors on dispose d'une suite exacte naturelle*

$$0 \to P(\alpha H) \to P(H) \xrightarrow{\lambda_H} Q(H) \to Q(\beta H) \to 0$$

(où les première et dernière flèches sont induites par l'inclusion $\alpha H \to H$ et la projection $H \twoheadrightarrow \beta H$ respectivement).

(La bicommutativité des algèbres de Hopf est ici essentielle.)

Corollaire 1.3. *Si k est de caractéristique nulle, le foncteur $P(\simeq Q) : \mathcal{H}(k) \to \mathcal{E}_{gr}(k)$ est une équivalence de catégories ; en particulier, $\mathcal{H}(k)$ est une catégorie abélienne semi-simple.*

Nous terminons cette section par la proposition suivante, qui montre qu'il n'y a nulle pathologie à craindre de la catégorie abélienne $\mathcal{H}(k)$ en matière de propriétés de finitude. La connexité des algèbres y joue un rôle essentiel.

Proposition 1.4. *1. Soit H un objet de $\mathcal{H}(k)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) H est de type fini comme objet de $\mathcal{H}(k)$;

(b) H est de type fini comme algèbre graduée ;

(c) $Q(H)$ est de dimension finie sur k (i.e. tous les $Q_n(H)$ sont des k-espaces vectoriels de dimension finie et seul un nombre fini d'entre eux sont non nuls).

2. *Une algèbre de Hopf de type fini de $\mathcal{H}(k)$ est réflexive.*
3. *La catégorie $\mathcal{H}(k)$ est localement noethérienne.*

Esquisse de démonstration. Il est facile de voir qu'une algèbre de Hopf H telle que $Q(H)$ soit de dimension finie est réflexive (raisonner par récurrence en utilisant la connexité) et noethérienne (elle l'est comme k-algèbre, donc a fortiori comme objet de $\mathcal{H}(k)$). Le point crucial est de voir que toute algèbre de Hopf H de $\mathcal{H}(k)$ est engendrée par ses sous-algèbres de Hopf K telles que $Q(K)$ soit de dimension finie. En effet, si V est un sous-espace vectoriel gradué de dimension finie de $Q(H)$, relevons des générateurs homogènes en nombre fini de V en des éléments homogènes $x_1, \dots, x_r$ de H. On considère les images de ces éléments par toutes les applications linéaires

$$H_n \to H_{i_1} \otimes \cdots \otimes H_{i_r}$$

composantes de coproduits itérés avec $i_1, \dots, i_r > 0$ et $\sum_t i_t = n$ (lesquelles sont en nombre fini à n fixé), qu'on écrit comme somme de tenseurs décomposés, et l'on recommence avec les termes de ces tenseurs décomposés en prenant leurs diagonales itérées (le processus s'arrête car le degré décroît strictement à chaque étape), on obtient un ensemble fini d'éléments homogènes de H qui engendre un sous-espace vectoriel gradué K de dimension finie de H tel que $K \hookrightarrow H \xrightarrow{\Delta} H \otimes H$ arrive dans $K \otimes K$. Comme Δ est un morphisme d'algèbres, on en déduit que la sous-algèbre graduée L qu'engendre K est une sous-algèbre de Hopf de H, et $Q(L)$ a une dimension au plus égale à celle de K, donc finie. □

Comme les algèbres de Hopf réflexives forment une sous-catégorie essentiellement petite de $\mathcal{H}(k)$, on voit aussi, comme corollaire de la proposition précédente, que $\mathcal{H}(k)$ est une *catégorie de Grothendieck* (i.e. catégorie abélienne avec colimites filtrantes exactes et un générateur). En particulier, elle possède des enveloppes injectives (cf. par exemple [Gab62]). Dans la suite, on va étudier sommairement les objets simples et les objets injectifs indécomposables de la catégorie $\mathcal{H}(k)$.

2 Objets simples et scindage de la catégorie $\mathcal{H}(k)$

On note $\mathcal{H}^+$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}$ des algèbres de Hopf H telles que $H_n = 0$ pour n impair, et $\mathcal{H}^-$ celle des algèbres H telles que $Q(H)_n = 0$ pour n pair.

Exemple 2.1. Notons $S(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'algèbre symétrique au sens gradué sur un générateur primitif x_n de degré n (autrement dit, c'est une algèbre symétrique usuelle si n est paire, et c'est une algèbre extérieure si n est impair, au moins en caractéristique différente de 2). Alors $S(n)$ appartient à $\mathcal{H}^+$ si n est pair, et à $\mathcal{H}^-$ (au moins en caractéristique différente de 2) si n est impair.

Si k est de caractéristique positive p, on note $\bar{S}(n)$ le quotient de $S(n)$ par l'idéal engendré par x_n^p ; la diagonale de $S(n)$ passe au quotient, de sorte qu'on obtient un objet $\bar{S}(n)$ de $\mathcal{H}^+$ pour n pair, tandis que $\bar{S}(n) = S(n)$ pour n impair (au moins si $p \neq 2$).

Lemme 2.2. *Soit H un objet de $\mathcal{H}$. On suppose que H est engendrée par un élément homogène x de degré $n > 0$ minimal.*

1. *L'élément x de H est primitif.*
2. *si n est impair et k de caractéristique différente de 2, alors H est l'algèbre extérieure sur x, i.e. isomorphe à $S(n)$;*
3. *si n est pair et k de caractéristique nulle, alors H est l'algèbre symétrique sur x, i.e. isomorphe à $S(n)$;*
4. *si k est de caractéristique $p > 0$ et que p ou n est pair, alors H est isomorphe à $k[x]$ ou à $k[x]/(x^{p^r})$ pour un entier $r > 0$.*

Esquisse de démonstration. Le premier point est évident (H est connexe et $H_i = 0$ pour $0 < i < n$) mais crucial : il montre que H est entièrement déterminée par sa structure d'algèbre, et que H est engendrée *comme algèbre* par x, c'est-à-dire est un quotient de l'algèbre symétrique au sens gradué sur x. Pour le reste, il suffit donc de vérifier que les seuls idéaux homogènes I non nuls de $k[x]$ tels que la diagonale de $k[x]$ passe au quotient sur $k[x]/I$ sont les (x^{p^r}) lorsque k est de caractéristique p. C'est une conséquence facile de ce que p divise tous les coefficients binomiaux C_n^i pour $0 < i < n$ si et seulement si n est une puissance de p. □

Proposition 2.3.
1. *Si k est de caractéristique nulle, alors les $S(n)$, $n \in \mathbb{N}$, forment un système complet de représentants des objets simples de $\mathcal{H}(k)$.*
2. *Si k est de caractéristique $p > 0$, alors :*
   (a) *tout objet noethérien de $\mathcal{H}(k)$ possède une suite de composition finie dont les sous-quotients sont isomorphes à des objets du type $S(n)$ ou $\bar{S}(n)$;*
   (b) *les objets $\bar{S}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, forment un système complet de représentants des objets simples de $\mathcal{H}(k)$;*
   (c) *la catégorie $\mathcal{H}(k)$ est de dimension de Krull 1.*

Esquisse de démonstration. Compte-tenu du lemme précédent, il suffit de noter la chose suivante : pour $\mathrm{car}(k) = p > 0$, l'algèbre de Hopf monogène $k[x]/(x^{p^r})$ (x homogène de degré n, avec n ou p pair) possède une suite de composition finie dont les sous-quotients sont isomorphes à $\bar{S}(n.p^i)$ pour $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$; quant à $k[x]$, c'est un objet unisériel dont les seuls sous-objets sont les sous-algèbres dont l'idéal d'augmentation est (x^{p^r}), avec $r \in \mathbb{N}$, cet objet est donc de dimension de Krull 1 (il est simple dans le quotient de $\mathcal{H}$ par la sous-catégorie des objets localement finis) et les sous-quotients de la filtration sont isomorphes à $\bar{S}(np^r)$ ($r \in \mathbb{N}$). □

Cette proposition nous permettra de montrer des résultats de scindage ou d'injectivité de façon commode en utilisant le résultat d'algèbre homologique classique suivant (rappelé par Schoeller dans [Sch70], § 1.6) :

Proposition 2.4. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck localement noethérienne et $\mathcal{T}$ un ensemble d'objets noethériens de $\mathcal{A}$ tel que tout objet noethérien de $\mathcal{A}$ possède une suite de composition finie dont les sous-quotients sont isomorphes à un élément de $\mathcal{T}$.*

1. *Tout objet I de $\mathcal{A}$ tel que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(T, I) = 0$ pour tout $T \in \mathcal{T}$ est injectif;*

2. *Supposons que $\mathcal{T}$ soit la réunion de deux sous-ensembles $\mathcal{T}^+$ et $\mathcal{T}^-$ tels que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(T,T') = 0$ pour $i \in \{0,1\}$ et $(T,T') \in \mathcal{T}^+ \times \mathcal{T}^-$ ou $(T,T') \in \mathcal{T}^- \times \mathcal{T}^+$. Notons $\mathcal{A}^+$ (resp. $\mathcal{A}^-$) la plus petite sous-catégorie épaisse stable par colimites de $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{T}^+$ (resp. $\mathcal{T}^-$). Alors le foncteur évident $\mathcal{A}^+ \times \mathcal{A}^- \to \mathcal{A}$ est une équivalence de catégories.*
3. *Si $\mathrm{Ext}^m_{\mathcal{A}}(T,T') = 0$ pour tout $(T,T') \in \mathcal{T}^2$ et tout entier $m > n$, alors $\mathcal{A}$ est de dimension homologique au plus n.*

Proposition 2.5 ([Sch70], prop. 1.5 et 1.7)**.** *Si k est de caractéristique différente de 2, alors le foncteur évident*

$$\mathcal{H}^+ \times \mathcal{H}^- \to \mathcal{H}$$

est une équivalence de catégories. De plus, la catégorie $\mathcal{H}^-$ est semi-simple.

Démonstration. Soit $n > 0$ un entier impair. On a $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(S(n), H) = 0$ pour H dans $\mathcal{H}^+$, car si $0 \to H \to K \xrightarrow{\pi} S(n) \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{H}$, tout relèvement $\tilde{x}$ dans K est nécessairement primitif car H est nul en degrés impairs, et $\tilde{x}^2 = 0$ car $\tilde{x}$ est de degré n impair (et $\mathrm{car}(k) \neq 2$), de sorte que $\tilde{x}$ permet de définir une section de π. On a également $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(S(n), S(m)) = 0$ pour m impair : par dualité on peut supposer $n \leq m$; si $0 \to S(m) \to H \to S(n) \to 0$ est un suite exacte de $\mathcal{H}$, tout relèvement $\tilde{x}$ dans H du générateur x de $S(n)$ est primitif, car de degré non nul minimal, de sorte que la suite exacte est encore scindée. Par la proposition 2.4 et par autodualité des $S(n)$, on en déduit que ces objets de $\mathcal{H}$ sont projectifs et injectifs. Pour terminer la démonstration, il suffit (en utilisant encore la même proposition) de voir qu'il n'y a aucun morphisme entre un $S(n)$, pour n impair, et un objet de $\mathcal{H}^+$, ce qui est évident pour des raisons de degré. □

Remarque 2.6. Dans [Sch70], Schoeller ne distingue pas la caractéristique 2 — peut-être parce qu'elle adopte implicitement une définition différente de la commutativité au sens gradué dans ce cas ? Quoi qu'il en soit, avec les conventions usuelles sur la commutativité au sens gradué (voir par exemple la première section de [GLM93] pour les changements cosmétiques liés à la caractéristique 2), la catégorie $\mathcal{H}$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{H}^+$ si k est de caractéristique 2 (multiplier les degrés par 2), de sorte que seule la structure de la catégorie $\mathcal{H}^+$ importe dans ce cas.

On s'intéresse donc maintenant à la structure de la catégorie $\mathcal{H}^+$ pour k de caractéristique $p > 0$. Si n est un entier premier à p, on note $\mathcal{H}_n$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}^+$ constituée des algèbres H telles que $Q(H)$ soit nul dans tous les degrés qui ne sont pas de le forme $2p^i.n$. On voit que c'est aussi la sous-catégorie épaisse stable par colimites engendrée par $S(2n)$ et que c'est aussi la sous-catégorie pleine des algèbres H telles que $P(H)$ soit nul avec la même condition de degré (l'équivalence entre les conditions sur P et Q découle de la proposition 1.2, ce qui permet de voir que $\mathcal{H}_n$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{H}$ puisque P est exact à gauche et Q à droite).

Proposition 2.7 ([Sch70], section 2, théorème)**.** *La catégorie $\mathcal{H}^+$ est produit direct des sous-catégories $\mathcal{H}_n$ lorsque n parcourt l'ensemble des entiers naturels premiers à p.*

(Là il n'y a pas lieu d'écarter le cas $p = 2$).

On omet la démonstration (donnée dans [Sch70]), qui repose encore sur la proposition 2.4 et un examen direct de suites exactes courtes qui permet de conclure qu'elles doivent se scinder.

L'homothétie de rapport n sur les degrés définit une équivalence entre les catégories $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_n$, pour n premier à p. On se borne donc dans la suite à étudier $\mathcal{H}_1$.

3 Générateurs projectifs de la catégorie $\mathcal{H}_1(k)$

Convention 3.1. Dans toute la suite, on suppose que k est un corps *parfait* de caractéristique $p > 0$.

Proposition 3.2. *Dans l'anneau $A = \mathbb{Z}[x_0, x_1, \dots, x_n, \dots]$ des polynômes à coefficients entiers sur une infinité dénombrable d'indéterminées, définissons les* polynômes de Witt

$$w_n := \sum_{i=0}^{n} p^i . x_i^{p^{n-i}}.$$

Alors il existe un et un seul coproduit (cocommutatif, coassociatif et coünitaire pour l'augmentation) sur A, compatible avec sa structure d'anneau, pour lequel les éléments w_n sont primitifs pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'unicité est claire ; l'existence l'est sur $A \otimes \mathbb{Z}[1/p]$: il y a une vérification combinatoire à effectuer pour s'assurer que les coefficients obtenus pour $\Delta(x_n)$ (pour lesquels on a aussitôt une formule de récurrence, dans $A \otimes \mathbb{Z}[1/p]$ — voir le début de la section 3 de [Sch70]) sont bien des entiers. On ne le fera pas ici (on renvoie par exemple à [Ser68], chap. II, § 6). On note que A représente le foncteur des anneaux commutatifs vers les groupes abéliens associant à un anneau le groupe additif sous-jacent à l'anneau de ses p-vecteurs de Witt.

Remarque 3.3. L'élément $\Delta(x_n)$ coïncide modulo $(x_0, \dots, x_{n-2})$ avec

$$1 \otimes x_n + x_n \otimes 1 - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p} C_p^i \, x_{n-1}^i \otimes x_{n-1}^{p-i}.$$

On peut graduer l'algèbre de Hopf (sur $\mathbb{Z}$) A de la proposition en attribuant le degré p^i à x_i. En tensorisant par k, on obtient un objet de $\mathcal{H}_1(k)$ noté $\mathcal{W}$. Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{W}_{(n)}$ la sous-algèbre de $\mathcal{W}$ engendrée par les x_i avec $i \leq n$ — c'est un sous-objet de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{H}$ — et $\mathcal{W}^{(n)}$ le quotient de $\mathcal{W}$ par l'idéal engendré par les $x_i^{p^{n+1}}$ (pour tout $i \in \mathbb{N}$) ; c'est un quotient de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{H}$.

On vérifie aussitôt qu'on dispose de suites exactes

$$0 \to \mathcal{W}_{(n-1)} \to \mathcal{W}_{(n)} \to S(2p^n) \to 0 \qquad (1)$$

dans $\mathcal{H}_1$ (ces suites exactes proviennent de suites exactes d'algèbres de Hopf entières).

Le théorème suivant est le résultat principal de la section 3 de [Sch70].

Théorème 3.4 (Schoeller)**.** *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les objets $\mathcal{W}_{(n)}$ et $\mathcal{W}^{(n)}$ de $\mathcal{H}_1$ sont duaux ; $\mathcal{W}_{(n)}$ est la couverture projective de $\bar{S}(2p^n)$ et $\mathcal{W}^{(n)}$ son enveloppe injective.*

L'algèbre de Hopf $\mathcal{W}$ est auto-duale ; c'est l'enveloppe injective de $S(2)$ et la couverture projective de $S(2)^*$.

Comme la catégorie $\mathcal{H}_1$ est de dimension de Krull 1 et que $S(1)^*$ est l'unique objet simple (à isomorphisme près) de $\mathcal{H}_1$ modulo les objets localement finis de cette catégorie, on voit que le théorème décrit tous les injectifs indécomposables de $\mathcal{H}_1$ — et l'on a donc une description de tous les injectifs indécomposables de $\mathcal{H}$ en utilisant la section 2. (On rappelle au passage que, dans une catégorie de Grothendieck localement noethérienne, les injectifs sont les sommes directes d'injectifs indécomposables et qu'il y a unicité de la décomposition à ordre des facteurs et isomorphisme près — cf. [Gab62].)

Nous ne donnerons pas la démonstration de l'ensemble des assertions du théorème 3.4 (qu'on peut trouver en détail dans [Sch70]) ; nous nous bornerons à expliquer rapidement comment on peut établir que $\mathcal{W}^*_{(n)}$ est l'enveloppe injective de $\bar{S}(2p^n)$ (dont on déduit aisément par un argument de dualité que $\mathcal{W}_{(n)}$ est la couverture projective de $\bar{S}(2p^n)$). On le fait par récurrence sur n, on suppose donc que $\mathcal{W}^*_{(n-1)}$ est l'enveloppe injective de $\bar{S}(2p^{n-1})$.

Pour montrer que $\mathcal{W}^*_{(n)}$ est injectif, il suffit de voir que $\mathrm{Ext}^1(S(2p^m), \mathcal{W}^*_{(n)}) = 0$ et $\mathrm{Ext}^1(\bar{S}(2p^m), \mathcal{W}^*_{(n)}) = 0$ pour tout entier m (cf. propositions 2.4 et 2.3). Nous admettrons ici la première annulation (qui n'est pas la plus difficile) pour nous concentrer sur la deuxième.

La suite exacte

$$0 \to S(2p^{m+1}) \to S(2p^m) \to \bar{S}(2p^m) \to 0$$

(où la première flèche envoie le générateur de $S(2p^{m+1})$ sur la puissance p-ème du générateur de $S(2p^m)$) et l'annulation que nous avons admise fournissent une suite exacte

$$\begin{aligned}0 \to \mathrm{Hom}(\bar{S}(2p^m), \mathcal{W}^*_{(n)}) \to \mathrm{Hom}(S(2p^m), \mathcal{W}^*_{(n)}) \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}(S(2p^{m+1}), \mathcal{W}^*_{(n)})\\ \to \mathrm{Ext}^1(\bar{S}(2p^m), \mathcal{W}^*_{(n)}) \to 0.\end{aligned}$$

Le morphisme u s'identifie au morphisme $f : P_{2p^m}(H) \to P_{2p^{m+1}}(H)$ qu'induit le Frobenius ; il s'agit de vérifier qu'il est injectif. Cela se déduit du lemme 3.6 ci-après.

Il suffit maintenant de vérifier que $\bar{S}(2p^n)$ est le socle de $\mathcal{W}^*_{(n)}$ (cette algèbre de Hopf est localement finie), ou encore que $\mathrm{Hom}\,(\bar{S}(2p^i), \mathcal{W}^*_{(n)}) = 0$, ce qui équivaut à $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{W}_{(n)}, \bar{S}(2p^i)) = 0$, pour $i \neq n$. Pour $i \notin \{n, n-1\}$, on utilise l'hypothèse de récurrence et la suite exacte (1). Pour $i = n-1$ on procède comme suit :

Lemme 3.5. *Pour tout entier $n > 0$, on a*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{W}_{(n)}, \bar{S}(2p^{n-1})) = 0.$$

Démonstration. Un morphisme $\mathcal{W}_{(n)} \to \bar{S}(2p^{n-1})$ est caractérisé par les images $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ des générateurs $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $\mathcal{W}_{(n)}$. Pour des raisons de degré, seul ξ_{n-1} est peut-être non nul. Mais la remarque 3.3 montre que cela implique aussi $\xi_{n-1} = 0$. □

Lemme 3.6. *Le k-espace vectoriel gradué $Q(\mathcal{W}_{(n)})$ est concentré en degrés $2p^i$ pour $0 \leq i \leq n$; en ce degré, c'est la droite engendrée par la classe de x_i. De plus, l'application de Verschiebung $Q_{2p^i}(\mathcal{W}_{(n)}) \to Q_{2p^{i-1}}(\mathcal{W}_{(n)})$ envoie, pour $0 < i \leq n$, la classe de x_i sur la classe de x_{i-1}.*

Par conséquent, la Verschiebung $Q_{2p^i}(\mathcal{W}_{(n)}) \to Q_{2p^{i-1}}(\mathcal{W}_{(n)})$ est injective pour tout $i > 0$.

Démonstration. La première assertion est évidente. Pour celle relative à la Verschiebung, on note que la remarque 3.3 montre que, modulo les éléments décomposable, elle envoie x_i sur

$$-\sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{p} C_p^j \, j!(p-j)! \, x_{i-1} = -(p-1)! \, x_{i-1} = x_{i-1}$$

modulo p.

La dernière assertion découle de ce calcul et de ce que k est un *corps parfait*. □

Terminons cette section en mentionnant sans démonstration une conséquence du théorème 3.4

Théorème 3.7 (Schoeller, [Sch70], 3.3)**.** *La dimension homologique de la catégorie $\mathcal{H}_1$ (et donc de $\mathcal{H}$) est 2.*

4 Modules de Dieudonné

Ce qui précède que les objets $\mathcal{W}_{(n)}$ de $\mathcal{H}_1$ (toujours sur un corps parfait de caractéristique p) forment, lorsque n parcourt $\mathbb{N}$, un ensemble de générateurs projectifs de type fini de cette catégorie abélienne. Par un théorème classique (et élémentaire), dû à Gabriel, Popescu, Freyd... (?), on en déduit que $\mathcal{H}_1$ est équivalente à la catégorie des foncteurs additifs depuis$\mathcal{D}^{op}$ vers les groupes abéliens, où $\mathcal{D}$ désigne la sous-catégorie pleine (qui est donc préadditive) de $\mathcal{H}_1$ constituée des $\mathcal{W}_{(n)}$.

Remarque 4.1. En revanche, la catégorie $\mathcal{H}_1$ n'est *pas* équivalente à une catégorie de modules (contrairement à ce que la terminologie de *modules de Dieudonné* pourrait laisser croire...). En effet, si c'était le cas, elle posséderait un générateur projectif de type fini. Comme $\mathcal{W}_{(n)}$ est la couverture projective du simple $\bar{S}(2p^n)$, un tel générateur devrait avoir la somme directe de tous les $\mathcal{W}_{(n)}$, qui n'est pas de type fini, pour facteur direct.

Pour mieux comprendre cette catégorie de foncteurs, il faut décrire les morphismes entre $\mathcal{W}_{(n)}$ et $\mathcal{W}_{(m)}$.

Nous ne donnerons pas les détails, on pourra se référer à la section 5 de l'article [Sch70] de Schoeller ; mentionnons simplement le résultat.

On note $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k ; c'est la limite sur l'entier naturel n des quotients $W_n(k)$ (anneau des vecteurs de Witt de longueur n). Lorsque $k = \mathbb{F}_p$, rappelons que $W(k)$ est l'anneau $\mathbb{Z}_p^\wedge$ des entiers p-adiques, tandis que $W_n(\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}/p^n$.

On montre que l'anneau $\mathrm{End}(\mathcal{W}_{(n)})$ est isomorphe à $W_{n+1}(k)$. On peut ensuite déterminer explicitement les $(W_{n+1}(k), W_{m+1}(k))$-bimodules $\mathrm{Hom}(\mathcal{W}_{(n)}, \mathcal{W}_{(m)})$.

On obtient alors la description concrète d'un foncteur $\mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Ab}$: c'est un $W(k)$-module gradué $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où M_n est annulé par p^{n+1} (c'est un $W_{n+1}(k)$-module), muni d'applications linéaires $F : M_i \to M_{i+1}$ (pour *Frobenius*) et $V : M_{i+1} \to M_i$ (pour *Verschiebung*) telles que FV et VF soient la multiplication par p.

Pour $k = \mathbb{F}_p$, on note que $\mathcal{D}$ (et aussi $\mathcal{D}^{op}$) est équivalente à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ab}$ constituée des $\mathbb{Z}/p^i$ pour $i \in \mathbb{N}^*$.

Références

[Gab62] P. Gabriel – « Des catégories abéliennes », *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), p. 323–448.

[GLM93] P. Goerss, J. Lannes & F. Morel – « Hopf algebras, Witt vectors, and Brown-Gitler spectra », in *Algebraic topology (Oaxtepec, 1991)*, Contemp. Math., vol. 146, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, p. 111–128.

[MM65] J. W. Milnor & J. C. Moore – « On the structure of Hopf algebras », *Ann. of Math. (2)* **81** (1965), p. 211–264.

[Sch70] C. Schoeller – « Étude de la catégorie des algèbres de Hopf commutatives connexes sur un corps », *Manuscripta Math.* **3** (1970), p. 133–155.

[Ser68] J.-P. Serre – *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968, Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.