Groupe de travail sur la construction cubique de Mac Lane et ses applications en algèbre et topologie Notes de l'exposé d'introduction

Aurélien Djament

Strasbourg, 10 juin 2014

L'objectif de ce groupe de travail consiste à présenter la construction cubique de Mac Lane (introduite conjointement avec Eilenberg au début des années 1950 — voir [9], § 12) et ses interactions avec :

1. la topologie algébrique et l'algèbre homologique d'une manière générale, par l'intermédiaire de la notion de foncteur dérivé d'un foncteur non additif (due à Dold-Puppe [6] puis généralisée dans différents contextes) qui lui est étroitement liée. On s'attachera à comprendre d'une manière générale la notion d'objet cubique dans une catégorie donnée (dont la construction cubique de Mac Lane est un cas particulier typique, dont on saisit mieux la teneur par la considération générale de la catégorie cubique $\square$ et de ses variantes), le lien entre espaces topologiques, ensembles cubiques et ensembles simpliciaux et la situation abélienne (théorèmes de type Dold-Kan) ;
2. la théorie des catégories de foncteurs depuis une petite catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie des groupes abéliens (ou la catégorie des modules sur un anneau de base fixé), notée $\mathcal{C} - \mathbf{Mod}$, qui elle-même possède des liens profonds (y compris indépendants de la construction cubique) avec la topologie algébrique, l'homologie des groupes et la théorie des représentations. Les cas qui nous intéresseront le plus comme catégorie source seront ceux de la catégorie $\mathbf{P}(A)$ des A-modules à gauche projectifs de type fini sur un anneau A ou la catégorie Γ des ensembles finis pointés.

1 Construction cubique et homologie de Mac Lane

Soient A un groupe abélien et $n \in \mathbb{N}$. On note $C_n := \{0,1\}^n$ l'ensemble des sommets d'un cube de dimension n et $Q'_n(A) := \mathbb{Z}[A^{C_n}]$ le groupe abélien libre construit sur l'ensemble des fonctions de C_n dans A. Les cubes étant munis de « faces » $r_i, s_i : C_{n-1} \to C_n$ pour $1 \leq i \leq n$ où $r_i(x)$ (resp. $s_i(x)$) est obtenu en ajoutant à x un 0 (resp. 1) en position i, on définit sur $Q'(A)$ une structure de complexe de chaînes en posant

$$\delta_n([t]) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \big([P_i(t)] - [R_i(t)] - [S_i(t)]\big)$$

(pour $t \in A^{C_n}$) où $R_i(t) = t \circ r_i$, $S_i(t) = t \circ s_i$ et $P_i(t) = R_i(t) + S_i(t)$. Le complexe cubique $Q_*(A)$ s'obtient en prenant le quotient de $Q'_*(A)$ par un sous-complexe naturel explicite (composée de sortes de « dégénérescences » — mais attention, contrairement à ce qu'une certaine intuition simpliciale pourrait laisser penser, la projection $Q'(A) \twoheadrightarrow Q(A)$ n'est généralement pas un quasi-isomorphisme).

Une des conséquences du travail considérable accompli par Eilenberg et Mac Lane est que l'homologie de $Q(A)$ est naturellement isomorphe à l'homologie stable des espaces d'Eilenberg-Mac Lane $K(A,n)$:

$$H_i(Q_*(A)) \simeq H_{n+i}(K(A,n)) \quad \text{si } n > i$$

(le H du membre de droite désignant l'homologie singulière à coefficients entiers).

Dans son travail [17], Mac Lane montre que, lorsque A est un anneau, le complexe $Q(A)$ possède une structure naturelle d'algèbre différentielle graduée (qu'il nomme *produit de Dixmier*). Comme $H_0(Q(A)) \simeq A$, on dispose d'un morphisme d'algèbres différentielles graduées canonique $Q(A) \to A$ Cela permet de former la *construction bar* sur $Q(A)$; l'homologie du complexe obtenu s'appelle *homologie de Mac Lane* de A, on la note $HML_*(A;M)$ (qui possède un morphisme naturel vers l'homologie de Hochschild $HH_*(A;M)$, induit par $Q(A) \to A$), les coefficients sont naturellement pris dans un A-bimodule M. On a aussi une notion de cohomologie.

Le groupe abélien $HML^2(A;M)$ possède une interprétation concrète : il classifie les *extensions spéciales* de A par M, c'est-à-dire les morphismes surjectifs d'anneaux $f : B \twoheadrightarrow A$ dont le noyau est un idéal de carré nul dont la structure de A-bimodule (qu'induit sa structure d'idéal bilatère dans B compte-tenu de ce que $A^2 = 0$) est celle donnée sur M (rappelons que le problème analogue dans lequel on suppose de plus que l'épimorphisme f est scindé comme épimorphisme de groupes abéliens est classifié par la cohomologie de Hochschild $HH^2(A;M)$).

Alors qu'Eilenberg et Mac Lane (de même que Cartan, par des méthodes différentes) ont calculé entièrement l'homologie des complexes $Q_*(A)$, l'homologie de Mac Lane est longtemps restée inexplorée. De fait, même dans les cas les plus simples (hors du cas rationnel, qui est le seul clair : si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre, alors $Q(A) \to A$ est un quasi-isomorphisme, de sorte que l'homologie de Mac Lane n'est autre que l'homologie de Hochschild), comme l'anneau des entiers ou les corps finis, les calculs directs s'avèrent très compliqués [1]. Le regain d'intérêt pour l'homologie de Mac Lane est venu de son identification avec d'autres théories homologiques, dont on parlera un peu plus tard dans cet exposé, qui ont entre autre permis des calculs efficaces.

2 Les objets cubiques en algèbre et en topologie

Il est patent sur la définition du complexe Q qu'il s'agit d'un cas particulier d'une construction très générale de complexes à partir d'objets combinatoires vérifiant des identités analogues aux identités simpliciales.

Les ensembles cubiques (avec connexions) comme modèles pour le type d'homotopie des espaces Dans une série d'articles sur la formalisation abstraite de la théorie de l'homotopie, datant des années 1950, Kan commence par se placer dans le cadre des ensembles cubiques (cf. [15] et [16]), avant de préférer traiter d'ensembles simpliciaux, lesquels se sont ensuite largement imposés dans le domaine.

Dans un cas comme dans l'autre, il s'agit de modéliser les espaces topologiques « raisonnables » par des recollements d'espaces très simples (des cubes ou des simplexes) réalisés suivant des règles combinatoires simples (selon leurs bords). Cela est formalisé par les foncteurs de réalisation topologique des ensembles simpliciaux (préfaisceaux sur la catégorie simpliciale $\triangle$) ou cubiques (préfaisceaux sur la catégorie cubique $\square$) vers les espaces topologiques.

1. Le premier calcul de la cohomologie de Mac Lane des corps finis remonte à l'article de L. Breen de 1978 aux publications de l'IHES sur les *extensions du groupe additif* ; c'est un travail de plus de quatre-vingts pages qui utilise des techniques avancées.

Les cubes se prêtant davantage aux produits que les simplexes, Serre a utilisé (dans [29]) un modèle cubique plutôt que simplicial pour la suite spectrale qui porte son nom et généralise la formule de Künneth pour l'homologie d'un produit cartésien d'espaces topologiques.

La théorie générale des catégories de modèles, initiée et développée par Quillen (cf. [25]), et ses prolongements initiés par Grothendieck autour de la notion de *catégorie test* (cf. par exemple [18]), procure un cadre adapté pour comprendre les avantages et inconvénients des catégories d'ensembles simpliciaux ou cubiques pour modéliser le type d'homotopie des espaces. En fait, les structures cubiques ont connu un regain d'intérêt (du point de vue homotopique) depuis les années 1980-1990, dû entre autre à l'introduction par Brown et Higgins (cf. [3]) de la notion d'*ensemble cubique avec connexions* (ce sont en quelque sorte des ensembles cubiques avec des dégénérescences supplémentaires — il s'agit de préfaiscaux sur une catégorie $\square^c$ avec un peu plus de morphismes que $\square$) qui permet de conserver les bonnes propriétés des ensembles cubiques tout en palliant certains de leurs inconvénients que ne présentent pas les ensembles simpliciaux.

(Beaucoup plus de détails viendront dans l'exposé n. 1, par Geoffrey Powell, à ce sujet.)

Groupes abéliens cubiques (avec connexions), groupes abéliens simpliciaux et complexes de chaînes L'homologie singulière d'un espace topologique s'obtient en linéarisant l'ensemble simplicial singulier associé pour en faire un groupe abélien simplicial. De façon analogue, l'homologie cubique s'obtient en linéarisant un ensemble cubique et en prenant un complexe naturellement associé.

La construction cubique de Mac Lane provient également de la structure de groupe abélien cubique de $(A^{C_n})_{n\in\mathbb{N}}$ (où A est un groupe abélien) ; noter toutefois que le complexe cubique n'est *pas* le complexe cubique associé à l'ensemble cubique sous-jacent à ce groupe abélien cubique (on utilise vraiment la structure de *groupe abélien* cubique).

La compréhension conceptuelle des complexes associés à un groupe abélien simplicial est liée au théorème de Dold-Kan. Il n'y a pas d'équivalent aussi simple dans le cadre cubique, mais, là encore, les groupes abéliens cubiques *avec connexions* se comportent en quelque sorte mieux (ils forment d'ailleurs une catégorie équivalente aux complexes de chaînes, comme les groupes abéliens simpliciaux). L'exposé n. 2, par Christine Vespa, présentera ces théorèmes de type Dold-Kan, qui interviennent dans des contextes variés, y compris utiles pour ce groupes de travail — notamment un résultat pour les Γ-modules dus à Pirashvili (cf. [22]).

Foncteurs dérivés non additifs à la Dold-Puppe La correspondance de Dold-Kan constitue également le fondement de la définition par Dold et Puppe ([6]) de la notion de foncteurs dérivés d'un foncteur *non additif* entre catégories abéliennes raisonnables. L'intérêt homotopique est assez évident dans la mesure où il est presque tautologique que l'homologie d'un espace d'Eilenberg-Mac Lane de groupe d'homotopie non nul A est la valeur sur A d'un foncteur dérivé à gauche à la Dold-Puppe du foncteur $\mathbb{Z}[-]$ de l'endofoncteur des groupes abéliens de linéarisation. Le théorème de Dold-Thom ([7] ; ce théorème fera l'objet de l'exposé n. 6, par Éric Hoffbeck) montre que c'est aussi isomorphe (mais de façon non fonctorielle en A) à la valeur sur A du foncteur algèbre symétrique (qui présente l'intérêt d'être la somme directe de foncteurs *polynomiaux*, une notion fondamentale dans la théorie et plus généralement dans ce groupe de travail, sur laquelle nous reviendrons). Une application spectaculaire des foncteurs dérivés à la Dold-Puppe (traitée dans l'exposé n. 5, par Alexandre Quesney) est la *suite spectrale de Curtis* (cf. [4], [5], [27]) dont la deuxième page est donnée par des valeurs des dérivés des foncteurs de Lie et qui converge vers l'homotopie des sphères.

L'exposé n. 3, par Serge Bouc, présentera de façon « concrète » le foncteur dérivé L_0 d'un foncteur non additif et montrera l'utilité de cette construction en théorie des représentations. L'exposé n. 4, par Andrea Cesaro, présentera les bases de la théorie et ses liens avec les notions d'effets croisés et de foncteurs polynomiaux, introduits justement par Eilenberg-Mac Lane (dans [8], chap. II) pour étudier l'homologie des espaces qui portent leur nom. Dans l'exposé n. 7, par Simon Covez, nous examinerons de façon plus générale la notion de foncteur dérivé non additif, en notant en particulier que l'on peut les construire indifféremment par une méthode simpliciale (approche de Dold et Puppe) ou cubique (approche introduite par Patchkoria dans [19], qui montre aussi l'équivalence des points de vue).

3 Catégories de foncteurs

Rappelons que la catégorie $\mathcal{C}-\mathbf{Mod}$ des foncteurs depuis une petite catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathbf{Ab}$ (ou une catégorie de modules) hérite de la plupart des bonnes propriétés de la catégorie but : elle possède des limites et des colimites (qui se calculent au but), c'est une catégorie abélienne (l'exactitude se testant au but). Grâce au lemme de Yoneda, les foncteurs $P^{\mathcal{C}}_c := \mathbb{Z}[\mathcal{C}(c,-)]$ représentent l'évaluation en $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, ils constituent donc un ensemble de *générateurs projectifs* de $\mathcal{C}-\mathbf{Mod}$ (cette catégorie possède également assez d'injectifs). On peut donc y faire de l'algèbre homologique.

Outre les bifoncteurs *Ext* qu'on peut donc définir, on dispose de groupes de torsions ; les bifoncteurs

$$\mathrm{Tor}^{\mathcal{C}}_i : (\mathbf{Mod}-\mathcal{C}) \times (\mathcal{C}-\mathbf{Mod}) \to \mathbf{Ab},$$

où $\mathbf{Mod}-\mathcal{C} := \mathcal{C}^{op}-\mathbf{Mod}$, s'obtient comme les foncteurs Tor sur un anneau en dérivant relativement à l'un ou l'autre des deux arguments le produit tensoriel au-dessus de $\mathcal{C}$, donné par

$$F \underset{\mathcal{C}}{\otimes} G := \mathrm{Coker}\Big(\bigoplus_{f:b\to a} F(a)\otimes G(b) \to \bigoplus_{c} F(c)\otimes G(c)\Big)$$

où la première somme est prise sur toutes les flèches de $\mathcal{C}$, la seconde sur tous ses objets, et la flèche est définie par la différence usuelle des applications obtenues en faisant opérer le morphisme f sur la variable covariante ou contravariante.

L'homologie (resp. cohomologie) de la catégorie $\mathcal{C}$ à coefficients dans un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ est $H_*(\mathcal{C}; F) := \mathrm{Tor}^{\mathcal{C}}_*(\mathbb{Z}, F)$ (resp. $H^*(\mathcal{C}; F) := \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{C}-\mathbf{Mod}}(\mathbb{Z}, F)$). Ces notions fondamentales généralisent celles d'homologie et de cohomologie des groupes (prendre $\mathcal{C}$ à un seul objet).

Rappelons la notion d'*extension de Kan* à gauche d'un foncteur $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre petites catégories : c'est l'adjoint à gauche $\varphi_! : \mathcal{C}-\mathbf{Mod} \to \mathcal{D}-\mathbf{Mod}$ de la précomposition φ^* par φ. Une variation autour du lemme de Yoneda montre que ses dérivés sont donnés explicitement par

$$\mathbf{L}_j\varphi_!(X)(d) = \mathrm{Tor}^{\mathcal{C}}_j(\varphi^* P^{\mathcal{D}^{op}}_d, X) \;;$$

ils donnent lieu à une suite spectrale de Grothendieck

$$E^2_{i,j} = \mathrm{Tor}^{\mathcal{D}}_i(Y, \mathbf{L}_j\varphi_!(X)) \Rightarrow \mathrm{Tor}^{\mathcal{C}}_{i+j}(\varphi^* Y, X).$$

Lien entre homologie de Mac Lane et homologie des foncteurs

Soient A un anneau, $\mathbf{P}(A)$ la catégorie des A-modules à gauche projectifs de type fini (ou plutôt un squelette de celle-ci ; on peut aussi se restreindre aux modules libres de rang fini) et $\mathcal{F}(A)$ la catégorie des foncteurs de $\mathbf{P}(A)$ vers les A-modules à gauche. Dans l'article [14], Jibladze et Pirashvili montrent l'existence d'un isomorphisme

$$HML^*(A;M) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(A)}(\mathrm{I}, M \underset{A}{\otimes} -) \tag{1}$$

naturel en A et en le A-bimodule M, où I désigne le foncteur d'inclusion.

D'autres identifications entre la (co)homologie des foncteurs et des théories (co)-homologiques variées (comme l'homologie de Hochschild topologique THH — cf. [24] ou la K-théorie stable K^s — cf. [1] ou l'appendice de [10] pour les corps finis et [28] pour le cas général) ont également été mises en évidence depuis la fin des années 1980.

L'un des exposés de votre serviteur présentera une petite partie de cette histoire — qui doit beaucoup à Pirashvili — , notamment l'isomorphisme (1) qui en constitue le commencement.

Γ-modules et foncteurs dérivés stables à la Dold-Puppe

Outre les catégories $\mathbf{P}(A)$, la catégorie Γ des ensembles finis pointés (ou plutôt le squelette constitués des $\mathbf{n} := \{0, \dots, n\}$ pointés par 0) constitue une catégorie source de catégories de foncteurs particulièrement intéressante. On en trouvera plusieurs illustrations dans [23].

En suivant Pirashvili [21] et Richter [26], vous verrons, dans les exposés n. 8 et 9, par Tuan Pham et Georg Biedermann respectivement, comment on peut interpréter la construction cubique mais aussi les foncteurs dérivés stables à la Dold-Puppe d'un foncteur arbitraire en termes d'algèbre homologique dans $\Gamma - \mathbf{Mod}$, en donner des généralisations et calculer de manière simple (suivant Betley [2]) la structure additive de l'algèbre de Steenrod à partir de ce point de vue.

Nous verrons en particulier la formule suivante :

$$D(F)(a) \simeq t \overset{\mathbf{L}}{\underset{\Gamma}{\otimes}} \left(F \circ (a \otimes \bar{\mathbb{Z}}[-])\right)$$

où D désigne la stabilisation de Dold-Puppe, F est un foncteur d'une catégorie additive vers les groupes abéliens (ou une autre catégorie abélienne), t est le Γ-module à droite envoyant un ensemble fini pointé E sur le groupe abélien des foncteurs ensemblistes $E \to \mathbb{Z}$ nulles sur le point de base, et $\bar{\mathbb{Z}}[-]$ désigne le foncteur de linéarisation réduit (associant à un ensemble fini pointé E le quotient du groupe abélien libre sur E par le sous-groupe engendré par son point de base).

Foncteurs polynomiaux

Supposons que la petite catégorie $\mathcal{C}$ est pointée, i.e. qu'elle possède un objet nul 0 (initial et final), et qu'elle possède des sommes finies (notées +). On dispose alors d'une notion de *foncteur polynomial* de degré au plus $d \in \mathbb{N}$ pour un foncteur F de $\mathcal{C}$ dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Elle repose sur la notion d'*effets croisés* ; ceux-ci sont des foncteurs exacts $cr_d : \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \to \mathbf{Fct}(\mathcal{C}^d, \mathcal{A})$ tels qu'existent des isomorphismes fonctoriels

$$F(c_1 + \dots + c_d) \simeq \bigoplus_{1 \le i_1 < \dots < i_r \le d} cr_r(F)(c_{i_1}, \dots, c_{i_r}).$$

Le foncteur F est polynomial de degré au plus d si et seulement si $cr_{d+1}(F) = 0$ (exemple : la d-ème puissance tensorielle est un objet polynomial de degré d dans

$\mathcal{F}(A)$ pour tout anneau A). Les effets croisés et les foncteurs polynomiaux jouent un rôle fondamental dans la théorie des foncteurs dérivés de Dold-Puppe (il y a du reste des interactions dans les deux sens entre les catégories de foncteurs et la théorie de Dold-Puppe — cf. infra).

On s'intéressera en particulier à la sous-catégorie pleine $\mathcal{F}_d(A)$ de $\mathcal{F}(A)$ constituée des foncteurs polynomiaux de degré au plus d ; c'est une belle sous-catégorie abélienne (elle est épaisse, stable par limites et colimites). La classification des foncteurs polynomiaux est intimement liée à la théorie des représentations des groupes symétriques ; nous n'aborderons toutefois pas directement cet aspect des choses.

Un exemple d'utilisation de la construction cubique pour établir des propriétés qualitatives des foncteurs polynomiaux

Proposition 1. *Supposons que A est un anneau noethérien à droite. Alors tout foncteur polynomial et de type fini F de $\mathbf{P}(A)-\mathbf{Mod}$ est de type pf_∞ dans cette catégorie, c'est-à-dire qu'il possède une résolution projective dont tous les termes sont de type fini.*

Cette propriété s'établit facilement en utilisant la construction cubique et des propriétés qualitatives de base de l'homologie stable des espaces d'Eilenberg-Mac Lane, mais elle n'est pas aisée à démontrer directement. Elle n'est d'ailleurs pas valable sans aucune hypothèse sur l'anneau A.

Calculs de groupes d'extensions ou de torsion dans $\mathcal{F}(A)$ et $\mathcal{F}_d(A)$ L'un des moyens les plus simples (quoiqu'absolument pas immédiat) pour calculer la (co)-homologie de Mac Lane de $\mathbb{Z}$ ou d'un corps fini est d'utiliser l'identification à de la (co)homologie des foncteurs susmentionnée — le calcul de cohomologie des foncteurs est effectué par Franjou et Pirashvili dans [12] pour l'anneau des entiers, et par Franjou, Lannes et Schwartz dans [11] pour les corps finis.

Les calculs d'algèbre homologique dans les catégories $\mathcal{F}_d(A)$ ont donné lieu à beaucoup moins de développements, ils constituent toutefois des problèmes très naturels ; il s'agit d'un des buts de ce groupe de travail.

Dans l'exposé de Vincent Franjou, nous verrons comment on peut calculer explicitement certains groupes d'extensions dans ces catégories. C'est lié au processus de stabilisation de Dold-Puppe d'un foncteur simplicial.

La question suivante s'impose : si F et G sont deux foncteurs de $\mathcal{F}_d(A)$, la flèche naturelle $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}_d(A)}(F,G) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(A)}(F,G)$ est-elle un isomorphisme ? La réponse n'est presque jamais positive pour tous F et G, sauf si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre ; toutefois, la réponse devient positive si A est un anneau raisonnable et que l'on s'autorise à faire croître d. Un premier résultat important (lorsque le groupe abélien sous-jacent à A est sans torsion) a été obtenu par Pirashvili dans [20] ; dans l'exposé que je donnerai en fin de groupe de travail, j'expliquerai pour quels anneaux on doit s'attendre à ce que le même phénomène se produise. Les deux approches utilisent, entre autre, la construction cubique.

Les foncteurs polynomiaux stricts À côté des catégories de foncteurs polynomiaux $\mathcal{F}_d(A)$, on dispose de catégories de foncteurs *polynomiaux stricts* de degré d sur A (introduites par Friedlander et Suslin sur un corps, dans [13] ; il convient ici de supposer A commutatif). Ils forment une belle catégorie abélienne $\mathcal{P}_d(A)$ (que l'on ne définira pas ici) munie d'un foncteur exact vers $\mathcal{F}_d(A)$ qui constitue une sorte d'analogue fonctoriel de l'application associant à un polynôme homogène de degré d sur A la fonction polynôme correspondante. Ces catégories sont liées aux représentations des groupes linéaires *algébriques* sur A. Antoine Touzé a récemment mis en évidence des liens entre ces foncteurs et les dérivés non additifs à la Dold-Puppe (cf. [30]). Il nous en présentera quelques aspects dans son exposé.

Références

[1] Stanislaw Betley. Stable K-theory of finite fields. *K-Theory*, 17(2) :103–111, 1999.

[2] Stanisław Betley. Stable derived functors, the Steenrod algebra and homological algebra in the category of functors. *Fund. Math.*, 168(3) :279–293, 2001.

[3] Ronald Brown and Philip J. Higgins. On the algebra of cubes. *J. Pure Appl. Algebra*, 21(3) :233–260, 1981.

[4] Edward Curtis. Lower central series of semi-simplicial complexes. *Topology*, 2 :159–171, 1963.

[5] Edward B. Curtis. Some relations between homotopy and homology. *Ann. of Math. (2)*, 82 :386–413, 1965.

[6] Albrecht Dold and Dieter Puppe. Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 11 :201–312, 1961.

[7] Albrecht Dold and René Thom. Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. *Ann. of Math. (2)*, 67 :239–281, 1958.

[8] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation. *Ann. of Math. (2)*, 60 :49–139, 1954.

[9] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane. Homology theories for multiplicative systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 71 :294–330, 1951.

[10] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Alexander Scorichenko, and Andrei Suslin. General linear and functor cohomology over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 150(2) :663–728, 1999.

[11] Vincent Franjou, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis. *Invent. Math.*, 115(3) :513–538, 1994.

[12] Vincent Franjou and Teimuraz Pirashvili. On the Mac Lane cohomology for the ring of integers. *Topology*, 37(1) :109–114, 1998.

[13] Eric M. Friedlander and Andrei Suslin. Cohomology of finite group schemes over a field. *Invent. Math.*, 127(2) :209–270, 1997.

[14] Mamuka Jibladze and Teimuraz Pirashvili. Cohomology of algebraic theories. *J. Algebra*, 137(2) :253–296, 1991.

[15] Daniel M. Kan. Abstract homotopy. I. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 41 :1092–1096, 1955.

[16] Daniel M. Kan. Abstract homotopy. II. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 42 :255–258, 1956.

[17] Saunders Mac Lane. Homologie des anneaux et des modules. In *Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956*, pages 55–80. Georges Thone, Liège ; Masson & Cie, Paris, 1957.

[18] Georges Maltsiniotis. La catégorie cubique avec connexions est une catégorie test stricte. *Homology, Homotopy Appl.*, 11(2) :309–326, 2009.

[19] Irakli Patchkoria. Cubical approach to derived functors. *Homology Homotopy Appl.*, 14(1) :133–158, 2012.

[20] Teimuraz Pirashvili. Polynomial approximation of Ext and Tor groups in functor categories. *Comm. Algebra*, 21(5) :1705–1719, 1993.

[21] Teimuraz Pirashvili. Kan extension and stable homology of Eilenberg-Mac Lane spaces. *Topology*, 35(4) :883–886, 1996.

[22] Teimuraz Pirashvili. Dold-Kan type theorem for Γ-groups. *Math. Ann.*, 318(2) :277–298, 2000.

[23] Teimuraz Pirashvili. Hodge decomposition for higher order Hochschild homology. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 33(2) :151–179, 2000.

[24] Teimuraz Pirashvili and Friedhelm Waldhausen. Mac Lane homology and topological Hochschild homology. *J. Pure Appl. Algebra*, 82(1) :81–98, 1992.

[25] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra.* Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[26] Birgit Richter. Symmetry properties of the Dold-Kan correspondence. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 134(1) :95–102, 2003.

[27] James W. Schlesinger. The semi-simplicial free Lie ring. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 122 :436–442, 1966.

[28] Alexander Scorichenko. *Stable K-theory and functor homology over a ring.* PhD thesis, Evanston, 2000.

[29] Jean-Pierre Serre. Homologie singulière des espaces fibrés. Applications. *Ann. of Math. (2)*, 54 :425–505, 1951.

[30] Antoine Touzé. Ringel duality and derivatives of non-additive functors. *J. Pure Appl. Algebra*, 217(9) :1642–1673, 2013.