# Indépendance algébrique des classes de Morita-Mumford tordues en cohomologie des groupes de tresses, d'après Kawazumi (Notes d'exposé au groupe de travail de topologie algébrique Nantes-Angers)

Aurélien DJAMENT

18 décembre 2014

## 1 Notations et énoncés

Soient $n$ et $p$ des entiers naturels ($n$ sera fixé dans toute cette section). On s'intéresse à la classe

$$\bar{h}_p \in H^p(B_n; \Lambda^p H_{\mathbb{Q}}) \simeq H^p(P_n; \Lambda^p H_{\mathbb{Q}})^{\mathfrak{S}_n} \subset H^p(P_n; \Lambda^p H_{\mathbb{Q}})$$

où $H$ est l'abélianisation $\mathbb{Z}^n$ du groupe libre de rang $n$ $F_n$, l'action venant du monomorphisme de groupes $B_n \hookrightarrow \mathrm{Aut}(F_n)$ qu'on a étudié dans l'exposé de Victoria. L'indice $\mathbb{Q}$ indique la rationalisation. (On fera quelques rappels sur ces classes dans la section suivante.)

Pour tous entiers naturels $p$ et $t$, on note

$$\mathcal{P}_t(p) := \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t) \in \mathbb{N}^t \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_t \text{ et } \sum_{i=1}^{t} \lambda_t = p\}$$

l'ensemble des partitions de $p$ en au plus $t$ parts.

Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ est une partition de $p$, on note

$$\bar{h}_\lambda := \bar{h}_{\lambda_1} \bar{h}_{\lambda_2} \dots \bar{h}_{\lambda_t} \in H^p(B_n; \Lambda^p H_{\mathbb{Q}}) \simeq H^p(P_n; \Lambda^p H_{\mathbb{Q}})^{\mathfrak{S}_n} \subset H^p(P_n; \Lambda^p H_{\mathbb{Q}})$$

où le produit provient du produit de l'algèbre extérieure $\Lambda^* H_{\mathbb{Q}}$.

Pour $0 \leq q \leq n$ et $\lambda \in \mathcal{P}_{n-q}(q)$, on note $\iota_\lambda$ l'inclusion de groupes

$$P_\lambda := P_{\lambda_1+1} \times P_{\lambda_2+1} \times \dots \times P_{\lambda_{n-q}+1} \hookrightarrow P_n$$

déduite de la structure monoïdale sur les groupes de tresses (pures). On désigne par

$$\pi_k : P_\lambda \twoheadrightarrow P_{\lambda_k+1}$$

la projection.

**Théorème 1.1** (*Theorem* 3.1 de [Kaw08]). *Pour tout entier naturel $q \leq n$, les classes de cohomologie $\bar{h}_\lambda$ sont linéairement indépendantes dans $H^q(P_n; \Lambda^q H_\mathbb{Q})$ (ou $H^q(B_n; \Lambda^q H_\mathbb{Q})$) lorsque $\lambda$ parcourt $\mathcal{P}_{n-q}(q)$.*

**Corollaire 1.2** (*Theorem* 1 de [Kaw08]). *Les classes de cohomologie $\bar{h}_p$ sont algébriquement indépendantes dans $H^*(B_n; \Lambda^* H_\mathbb{Q})$ dans la zone de degré donnée par $p \leq n/2$.*

Le théorème 1.1 se déduit de la proposition suivante.

**Proposition 1.3.** *Soient $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_{n-q}(q)$.*

1. *L'élément $\iota_\lambda^* \bar{h}_\lambda$ de $H^q(P_\lambda; \Lambda^q H_\mathbb{Q})$ est non nul.*
2. *Si la partition $\mu$ est strictement supérieure à $\lambda$ pour l'ordre lexicographique, alors l'élément $\iota_\lambda^* \bar{h}_\mu$ de $H^q(P_\lambda; \Lambda^q H_\mathbb{Q})$ est nul.*

*Démonstration du théorème 1.1 à partir de la proposition 1.3.* Supposons qu'existe une relation de dépendance linéaire non triviale

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{n-q}(q)} a_\lambda \bar{h}_\lambda = 0.$$

Considérons le plus petit $\lambda$ (pour l'ordre lexicographique) tel quel $a_\lambda \neq 0$. En appliquant $\iota_\lambda^*$ à la relation et en appliquant la proposition, on obtient la contradiction recherchée. □

# 2 Rappels sur les classes $\bar{h}_p$

On rappelle que les classes $\bar{h}_p$ sont la restriction à $B_n$, pour le monomorphisme de groupes $B_n \hookrightarrow \mathrm{Aut}(F_n)$ que nous a présenté Victoria, de la rationalisation de classes déjà notées $\bar{h}_p$ vivant dans $H^p(\mathrm{Aut}(F_n); H^{\otimes p})$. Celles-ci s'obtiennent en contractant des classes $h_p \in H^p(\mathrm{Aut}(F_n); H^* \otimes H^{\otimes(p+1)})$, i.e. en utilisant le morphisme $\mathrm{Aut}(F_n)$-équivariant

$$H^* \otimes H^{\otimes(p+1)} = (H^* \otimes H) \otimes H^{\otimes p} \to H^{\otimes p}$$

obtenu en tensoriant la trace sur $H^* \otimes H$ avec l'identité de $H^{\otimes p}$.

L'action tautologique du groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$ sur ces classes est simplement la signature, de sorte que, lorsqu'on rationalise, elles vivent dans la cohomologie à coefficients dans $\Lambda^p H_\mathbb{Q}$ (qui est facteur direct naturel de la cohomologie à coefficients dans $H^{\otimes p}$). Toutes ces classes dépendent bien sûr de l'entier $n$ ; par commodité, nous ne le ferons toutefois jamais apparaître dans les notations.

Rappelons un résultat présenté dans l'exposé de Friedrich (qui provient d'un résultat analogue sur les classes $h_p$) :

**Proposition 2.1.** *Soient $n_1, n_2$ et $n := n_1 + n_2$ des entiers naturels. Notons $\iota : \mathrm{Aut}(F_{n_1}) \times \mathrm{Aut}(F_{n_2}) \to \mathrm{Aut}(F_n)$ le monomorphisme de groupes évident et $\pi_i : \mathrm{Aut}(F_{n_1}) \times \mathrm{Aut}(F_{n_2}) \to \mathrm{Aut}(F_{n_i})$ la projection ($i \in \{1, 2\}$). Alors*

$$\iota^* \bar{h}_p = \pi_1^* \bar{h}_p + \pi_2^* \bar{h}_p \in H^p(\mathrm{Aut}(F_{n_1}) \times \mathrm{Aut}(F_{n_2}); H^{\otimes p})$$

*pour tout $p \in \mathbb{N}$.*

L'autre résultat dont nous aurons besoin se déduit de l'exposé de Vincent :

**Proposition 2.2.** *La classe*

$$\bar{h}_{n-1} \in H^{n-1}(B_n; \Lambda^{n-1} H_{\mathbb{Q}}) \subset H^{n-1}(P_n; \Lambda^{n-1} H_{\mathbb{Q}})$$

*est non nulle.*

# 3 Démonstration de la proposition 1.3

*Démonstration de la première assertion de la proposition 1.3.* Notons

$$\bar{h}_{p,k} := \pi_k^* \bar{h}_p \in H^p(P_\lambda, \Lambda^p H_{\mathbb{Q}}).$$

Cette classe de cohomologie est nulle si $p > \lambda_k$, puisque $P_{\lambda_k+1}$ est de dimension cohomologique $\lambda_k$. De même, $\bar{h}_{\lambda_k,k}\bar{h}_{p,k}$ est nulle pour $p > 0$ puisque cette classe vit dans $H^{\lambda_k+p}(P_{\lambda_k+1}; \Lambda^{\lambda_k+p} H_{\mathbb{Q}}) = 0$.

Par la proposition 2.1, on a

$$\iota_\lambda^* \bar{h}_p = \sum_{k=1}^{n-q} \bar{h}_{p,k} \in H^p(P_\lambda; \Lambda^p H_{\mathbb{Q}}).$$

Développons le produit

$$\iota_\lambda^* \bar{h}_\lambda = \prod_{i=1}^{n-q} \Big( \sum_{k=1}^{n-q} \bar{h}_{\lambda_i,k} \Big) :$$

le terme

$$\prod_{i=1}^{n-q} \bar{h}_{\lambda_i,k_i}$$

ne peut être non nul que si l'on a $\lambda_i \leq \lambda_{k_i}$ et les $k_i$ deux à deux distincts pour les valeurs de $i$ telles que $\lambda_i > 0$, à cause des observations précédentes (et de la commutativité au sens gradué de ces classes) ; comme $\lambda$ est une suite décroissante cela force à avoir $\lambda_{k_i} = \lambda_i$ pour tout $i$.

On en déduit que $\iota_\lambda^* \bar{h}_\lambda$ est, à un coefficient multiplicatif dans $\mathbb{N}^*$ près, égal à $\prod_{k=1}^{n-q} \bar{h}_{\lambda_k,k}$. La non-nullité de cette classe découle de la proposition 2.2 et de la formule de Künneth, d'où notre assertion. □

*Démonstration de la deuxième assertion de la proposition 1.3.* Elle repose sur les mêmes relations d'annulation et de décomposition que la démonstration de la première partie.

Il existe par hypothèse un entier $r$ tel que $\mu_r > \lambda_r$ et $\mu_i = \lambda_i$ pour $i < r$. En raisonnant comme dans la démonstration précédente, on voit que $\iota_\lambda^*(\bar{h}_{\mu_1} \dots \bar{h}_{\mu_{r-1}})$ est un multiple de $\bar{h}_{\mu_1,1} \dots \bar{h}_{\mu_{r-1},r-1}$. Par ailleurs, comme $\mu_r > \lambda_r \geq \lambda_i$ pour $i \geq r$, on a

$$\iota_\lambda^* \bar{h}_{\mu_r} = \sum_{i=1}^{r-1} \bar{h}_{\mu_r,i}.$$

Or ce qui précède montre que $\iota_\lambda^*(\bar{h}_{\mu_1} \dots \bar{h}_{\mu_{r-1}}).\bar{h}_{\mu_r,i}$ est nul pour $i < r$ (car $\bar{h}_{\mu_i,i}\bar{h}_{\mu_r,i} = 0$), ce qui achève la démonstration. □

# 4 Quelques remarques additionnelles (suivant [Kaw08], § 4)

L'usage des groupes $B_n$ et $P_n$ pour donner des renseignements sur la cohomologie des groupes $\mathrm{Aut}(F_n)$, très difficile d'accès, conduit au problème de l'étude cohomologique du sous-groupe $IA_n$ de $\mathrm{Aut}(F_n)$ noyau de l'épimorphisme de groupes évident vers $GL_n(\mathbb{Z})$ (qui s'avère encore plus ardue que celle de $\mathrm{Aut}(F_n)$). Une première observation, qui se déduit de ce qu'on a vu dans les exposés de Vincent (engendrement de $H^1(P_n;\mathbb{Z})$ en degré 1), de Jacques (détermination explicite de $H_1(IA_n)$) et de Victoria, est la suivante :

**Proposition 4.1** (*Corollary 4.1* de [Kaw08])**.** *Le morphisme*

$$H^*(IA_n;\mathbb{Z}) \to H^*(P_n;\mathbb{Z})$$

*qu'induit le monomorphisme de groupes $P_n \hookrightarrow IA_n$ est surjectif.*

En effet, en degré cohomologique 1, ce morphisme (ou plutôt son dual) a été décrit explicitement dans l'exposé de Victoria (cf. le lemme 2.2 de [Kaw08]). Noter que $H^1(IA_n;\mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre de rang $n^2(n-1)/2$ tandis que $H^1(P_n;\mathbb{Z})$ est libre de rang $n(n-1)/2$, donc beaucoup plus petit. En degré supérieur, il paraît raisonnable de s'attendre encore à ce que la cohomologie de $IA_n$ soit « beaucoup plus grosse » que celle de $P_n$ (tout en restant polynomiale), mais dans quelle proportion ? Cette question semble totalement ouverte.

Comme le note Kawazumi, si $M$ est un $\mathbb{Q}[GL_n(\mathbb{Z})]$-module, il est difficile de donner des propriétés de

$$H^*(\mathrm{Aut}(F_n);M) \to H^*(B_n;M)$$

(la surjectivité n'a aucune raison de persister puisque $GL_n(\mathbb{Z})$ est strictement plus gros que $\mathfrak{S}_n$), de sorte que la méthode de l'article semble malheureusement peu apte à donner des renseignements sur $H^*(\mathrm{Aut}(F_n);M)$. Kawazumi énonce la conjecture suivante :

**Conjecture 4.2** ([Kaw08], 4.2)**.** *Si $M$ est un $\mathbb{Q}[GL_n(\mathbb{Z})]$-module de $\mathbb{Q}$-dimension finie, alors l'application naturelle*

$$\big((\Lambda^* H^1(IA_n;\mathbb{Q}))\otimes M\big)^{GL_n(\mathbb{Z})} \to H^*(\mathrm{Aut}(F_n);M)$$

*est surjective, au moins stablement (i.e. pour $n$ assez grand par rapport au degré cohomologique, ce qui suppose que $M$ est l'évaluation d'un foncteur raisonnable sur les groupes abéliens libres de rang fini).*

## Références


[Kaw08] N. Kawazumi – « Twisted Morita-Mumford classes on braid groups », in *Groups, homotopy and configuration spaces*, Geom. Topol. Monogr., vol. 13, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2008, p. 293–306.