Dualité de Koszul des catégories différentielles graduées, d'après Keller (notes d'exposé au groupe de travail de topologie algébrique Nantes-Angers)

Aurélien DJAMENT

février/mai 2009

On suit dans cet exposé la section 10 de l'article [Kel94] de Keller, en présentant d'abord la notion de *relèvement (lift* en anglais) donnée dans sa section 7. De nombreuses démonstrations sont omises ; on peut les trouver dans [Kel94]. Elles sont essentiellement formelles.

L'exemple « historique » de dualité de Koszul semble être le suivant : les catégories dérivées des catégories des modules gradués sur l'algèbre symétrique et sur l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

Une référence plus originelle sur le sujet est [BGS88].

Table des matières

On se donne comme d'habitude un anneau (unitaire associatif) *commutatif* de base k ; toutes les catégories différentielles graduées (DG en abrégé) seront des k-catégories DG. Pour la dualité de Koszul nous aurons besoin de supposer que k est un corps (afin que le foncteur de dualité ordinaire des k-modules soit exact).

1 Quasi-foncteurs

Notation 1.1. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie DG.

1. On note $\underline{\mathcal{A}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{DA}$ formée des objets libres $A^\wedge$ (on rappelle que $A^\wedge$ désigne l'objet représentable $\mathcal{A}(-,A)$ de la catégorie DG $\mathrm{Dif}\,\mathcal{A}$ des foncteurs DG $\mathcal{A}^{op} \to \mathrm{Dif}\,k$).

2. Si $\mathcal{U}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{DA}$, on note $\mathbb{Z}\mathcal{U}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{DA}$ dont les objets sont les (dé)suspensions itérées $U[n]$ d'objets U de $\mathcal{U}$ (où $n \in \mathbb{Z}$).

Remarque 1.2. Étant donné des objets A et B de $\mathcal{A}$ et des entiers n et m, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\mathbb{Z}\underline{\mathcal{A}}(A^\wedge[n], B^\wedge[m]) \simeq H^{m-n}(\mathcal{A}(A,B)).$$

Dans la suite de cette section, on se donne deux petites catégorie DG $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

On s'intéresse aux $\mathcal{A}-\mathcal{B}$-bimodules X (i.e. aux $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}^{op}$-modules). Une manière très naturelle d'obtenir de tels objets est de partir d'un foncteur DG $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ (on rappelle que, par convention, les modules considérés sont des modules à *droite*) ; on définit alors un bimodule X_F par

$$X_F(A,B) = \mathcal{A}(A, FB).$$

L'association $F \mapsto X_F$ définit même un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des foncteurs DG $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ vers la catégorie des $\mathcal{A}-\mathcal{B}$-bimodules (exercice à partir du lemme de Yoneda).

L'image essentielle de ce foncteur, dont les objets pourraient être appelés bifoncteurs semi-représentables ou séparables (nous n'emploierons aucun de ces termes) est un objet très naturel quand on traite de bifoncteurs, mais ces considérations n'ont pas grand chose à voir avec les catégories DG : pour obtenir un analogue plus intéressant dans ce contexte, il convient d'en introduire une version dérivée.

Proposition et définition 1.3. *Soit X un $\mathcal{A}-\mathcal{B}$-bimodule. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *le foncteur $\mathbb{L}T_X : \mathcal{DB} \to \mathcal{DA}$ (on rappelle qu'il s'agit du foncteur dérivé à gauche du foncteur DG $T_X = X \underset{\mathcal{B}}{\otimes} -$) induit un foncteur (alors encore noté $\mathbb{L}T_X$) $\underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{A}}$;*
2. *pour tout objet B de $\mathcal{B}$, le foncteur $\mathcal{DA}(-, X(-,B)) : \mathcal{DA} \to k-$**mod** *est représentable par un objet de $\underline{\mathcal{A}}$;*
3. *pour tout objet B de $\mathcal{B}$, il existe un objet A de $\mathcal{A}$ et $x_B \in Z^0(X(A,B))$ tel que, pour tout $A' \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, le morphisme*

$$\mathcal{A}(A', A) \to X(A', B) \qquad f \mapsto X(f,B)(x_B)$$

soit un quasi-isomorphisme.

Lorsque ces propriétés sont satisfaites, on dit que X est un **quasi-foncteur** *de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$.*

Démonstration. Il s'agit encore d'une variation sur le lemme de Yoneda, qu'on explicite pour mémoire.

On rappelle qu'existe un isomorphisme canonique $T_X(B^\wedge) \simeq X(-,B)$ dans $\operatorname{Dif}\mathcal{A}$, d'où l'on déduit (puisque $B^\wedge$ vérifie la propriété (P)) $\mathbb{L}T_X(B^\wedge) \simeq X(-,B)$ dans $\mathcal{DA}$. Cela montre aussitôt que la première assertion entraîne la seconde.

Utilisons maintenant l'isomorphisme canonique

$$\mathcal{DA}(A^\wedge, X(-,B)) \simeq H^0(X(A,B)) :$$

si la seconde assertion est vérifiée, avec $\mathcal{DA}(-, X(-, B))$ représenté par $A^\wedge$, on prend pour x_B un représentant dans $Z^0(X(A, B))$ de l'élément de $\mathcal{DA}(A^\wedge, A^\wedge) \simeq \mathcal{DA}(A^\wedge, X(-, B)) \simeq H^0(X(A, B))$ correspondant à l'identité de $A^\wedge$, et l'on vérifie facilement la troisième assertion.

Si l'on note $F(B^\wedge) = A^\wedge$, en supposant la troisième assertion vérifiée, on constate que l'hypothèse donne un isomorphisme $\mathbb{L}T_X(B^\wedge) \simeq F(B^\wedge)$ (dans la catégorie $\mathcal{DA}$). On en déduit alors que la première condition est satisfaite. □

Les bimodules du type X_F (où $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ est un foncteur DG usuel) discutés plus haut constituent naturellement un cas particulier de quasi-foncteur $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Dans le cas où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont concentrées en degré 0 (i.e. cas non DG), les deux notions coïncident.

On en vient maintenant à la généralisation dans ce contexte dérivé des équivalences de catégories.

Proposition et définition 1.4. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *le foncteur $\mathbb{L}T_X : \mathcal{DB} \to \mathcal{DA}$ est une équivalence de catégories et induit une équivalence $\underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{A}}$;*
2. *le foncteur $\mathbb{L}T_X$ induit des équivalences $\mathbb{Z}\underline{\mathcal{B}} \to \mathbb{Z}\underline{\mathcal{A}}$ et $\underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{A}}$;*
3. *il existe un sous-ensemble D de $\operatorname{Ob}\mathcal{A} \times \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ tel que les restrictions des projections sur $\operatorname{Ob}\mathcal{A}$ et $\operatorname{Ob}\mathcal{B}$ à D soient surjectives et que pour tout $(A, B) \in D$ existe $x_{AB} \in Z^0(X(A, B))$ tel que pour tous $(A', B') \in \operatorname{Ob}\mathcal{A} \times \operatorname{Ob}\mathcal{B}$, les morphismes*

$$X(-, B)(x_{AB}) : \mathcal{A}(A', A) \to X(A', B)$$

et

$$X(A, -)(x_{AB}) : \mathcal{B}(B, B') \to X(A, B')$$

soient des quasi-isomorphismes.

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que X est une **quasi-équivalence** *de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$.*

Démonstration. Elle est analogue à celle de la proposition 1.3 ; il pourra être utile d'employer le lemme 4.2 de [Kel94] pour déduire la première assertion d'une des deux autres. Pour établir la troisième assertion à partir d'une des autres, on choisit D de la façon suivante : pour tout $B \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$, on choisit $F(B) \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ tel que $\mathbb{L}T_X(B^\wedge) \simeq F(B)^\wedge$ et on prend pour D l'ensemble des $(A, B) \in \operatorname{Ob}\mathcal{A} \times \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ tels que $A \simeq F(B)$ dans $\mathcal{DA}$. □

Remarque 1.5.
1. Un quasi-foncteur X_F venant d'un foncteur DG $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ est une quasi-équivalence si et seulement si $H^*F : H^*\mathcal{B} \to H^*\mathcal{A}$ est une équivalence.
2. La notion de quasi-équivalence se comporte bien seulement lorsque k est un corps (ou que l'on dispose de propriétés de platitude palliatives), hypothèse qui assure qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

2 Relèvements de catégories différentielles graduées

$\mathcal{A}$ désigne toujours une petite catégorie DG fixée.

Définition 2.1. Soit $\mathcal{U}$ une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{DA}$. On appelle **relèvement** (**lift** en anglais) de $\mathcal{U}$ tout couple $(\mathcal{B}, X)$ où :

1. $\mathcal{B}$ est une petite catégorie DG ;
2. X est un $\mathcal{A}$–$\mathcal{B}$-bimodule tel que $\mathbb{L}T_X : \mathcal{DB} \to \mathcal{DA}$ induise des équivalences $\mathbb{Z}\underline{\mathcal{B}} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}\mathcal{U}$ et $\underline{\mathcal{B}} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{U}$.

Il existe toujours un tel relèvement : on peut prendre pour $\mathcal{B}$ la sous-catégorie pleine de $\operatorname{Dif}\mathcal{A}$ formée des objets pU, représentants de $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ dans $\mathcal{DA}$ vérifiant la propriété (P), et pour X la restriction du $\mathcal{A} - \operatorname{Dif}\mathcal{A}$-bimodule tautologique $(A, M) \mapsto M(A)$ (*relèvement standard* de $\mathcal{U}$).

Convention 2.2. Dans la suite de cette section, on se donne une petite sous-catégorie pleine $\mathcal{U}$ de $\mathcal{DA}$ et un relèvement $(\mathcal{B}, X)$ de $\mathcal{U}$ tel que $X(-, B) \in \operatorname{Ob}\operatorname{Dif}\mathcal{A}$ possède la propriété (P) pour tout objet B de $\mathcal{B}$.

Par ailleurs, on considère une petite catégorie DG $\mathcal{C}$ et un foncteur DG $F : \operatorname{Dif}\mathcal{C} \to \operatorname{Dif}\mathcal{A}$ tel que $\mathbb{L}F : \mathcal{DC} \to \mathcal{DA}$ induise un foncteur $\underline{\mathcal{C}} \to \mathcal{U}$. On peut ainsi former le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{DC} \arrow[d, "\mathbb{L}F"] & \underline{\mathcal{C}} \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathcal{DB} \arrow[r, "\mathbb{L}T_X"] & \mathcal{DA} & \mathcal{U} \arrow[l] \\
\underline{\mathcal{B}} \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{U}. \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

On considère le $\mathcal{B} - \mathcal{C}$-bimodule Y défini par $Y(B, C) = (H_X F C^\wedge)(B)$. (On rappelle que H_X est défini par $(H_X M)(B) = (\operatorname{Dif}\mathcal{A})(X(-, B), M)$.)

Proposition 2.3. *1. Y est un quasi-foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$. C'est une quasi-équivalence si $\mathbb{L}F$ induit une équivalence $\mathbb{Z}\underline{\mathcal{C}} \to \mathbb{Z}\mathcal{U}$.*

2. Il existe un morphisme naturel

$$\mathbb{L}T_X \mathbb{L}T_Y(M) \to \mathbb{L}FM$$

qui est un isomorphisme pour $M \in \operatorname{Ob}\mathcal{H}_p^b\mathcal{C}$. C'est donc un isomorphisme pour tout M si et seulement si $\mathbb{L}F$ commute aux sommes directes.

3. Si $(\mathcal{C}, Z)$ est un relèvement de $\mathcal{U}$ et que F égale T_Z, alors Y est une quasi-équivalence $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ et le morphisme naturel précédent est un isomorphisme. Si de plus Z_C possède la propriété (P) pour tout objet C de $\mathcal{C}$, alors $\mathbb{R}H_Y \mathbb{R}H_X \simeq \mathbb{R}H_Z$.

Remarque 2.4. Supposons que F, T_X et T_Y préservent l'acyclicité (de sorte que leurs foncteurs dérivés se calculent de façon transparente). Alors le morphisme de l'assertion *2.* est la composée

$$T_X T_Y \xrightarrow{T_X \alpha} T_X H_X F \to F,$$

où la dernière flèche est la coünité de l'adjonction entre T_X et H_X et $\alpha : T_Y \to H_X F$ est le morphisme canonique.

3 Définition de la dualité de Koszul

Hypothèse 3.1. On suppose à partir de maintenant que l'anneau commutatif de base k est un corps.

Définition 3.2.

1. On note $D : (\mathrm{Dif}\, k)^{op} \to \mathrm{Dif}\, k$ le foncteur $(\mathrm{Dif}\, k)(-, k)$, où l'on note encore k le complexe constitué de k concentré en degré 0.
2. Pour toute petite catégorie DG $\mathcal{A}$ et tout objet A de $\mathcal{A}$, on note $A^\vee$ le $\mathcal{A}$-module
$$A^\vee = D\mathcal{A}(A, -)$$
(à ne pas confondre avec le $\mathcal{A}$-module libre $A^\wedge = \mathcal{A}(-, A)$).

La propriété suivante est une conséquence du lemme de Yoneda et d'un argument de dualité (ordinaire, i.e. d'auto-adjonction du foncteur D).

Proposition 3.3. *Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie DG, A un objet de $\mathcal{A}$ et M un objet de* $\mathrm{Dif}\,\mathcal{A}$. *Il existe un isomorphisme naturel*
$$(\mathrm{Dif}\,\mathcal{A})(M, A^\vee) \simeq DM(A).$$

Hypothèse 3.4. Désormais, on suppose que $\mathcal{A}$ est une catégorie différentielle graduée *augmentée*, i.e. munie de la structure suivante : pour tout objet A de $\mathcal{A}$ est donné un objet $\bar{A}$ de $\mathrm{Dif}\,\mathcal{A}$ tel que $H^*\bar{A}$ soit nul sur tout objet B de $\mathcal{A}$ distinct de A et de dimension 1 sur A, concentré en degré 0 (ce qui implique en particulier que $\mathcal{A}$ est squelettique).

Convention 3.5. Dans la suite, on se donne un relèvement $(\mathcal{A}^*, X)$ de la sous-catégorie $\{\bar{A} \mid A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}\}$ de $\mathrm{Dif}\,\mathcal{A}$.

On peut supposer donnée une bijection $A \mapsto A^*$ de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ sur $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^*$ telle que $\mathbb{L}T_X(A^{*\wedge}) \simeq \bar{A}$. On peut également supposer que X vérifie la propriété (P), ce qui assure que les fonteurs T_X et H_X induisent une adjonction entre les catégories $\mathcal{D}\mathcal{A}^*$ et $\mathcal{D}\mathcal{A}$.

La catégorie DG $\mathcal{A}^*$ est elle-même augmentée : si l'on pose $\bar{A}^* = H_X(A^\vee)$, on a
$$\begin{aligned} H^n\bar{A}^*(B) &\simeq (\mathcal{D}\mathcal{A}^*)(B^{*\wedge}, \bar{A}^*[n]) = (\mathcal{D}\mathcal{A}^*)(B^{*\wedge}, H_X(A^\vee)[n]) \\ &\simeq (\mathcal{D}\mathcal{A})(T_X(B^{*\wedge}), A^\vee[n]) \simeq (\mathcal{D}\mathcal{A})(\bar{B}, A^\vee[n]) \\ &\simeq H^n(D\bar{B}(A)) \simeq \mathrm{Hom}_k(H^{-n}(\bar{B}(A)), k). \end{aligned}$$

Définition 3.6. La catégorie différentielle graduée augmentée $\mathcal{A}^*$ ainsi définie est appelée *duale de Koszul* de $\mathcal{A}$.

Le dual de Koszul est bien défini à quasi-équivalence *augmentée* près.

Exemple 3.7.

1. Soient L une algèbre de Lie et A son algèbre enveloppante. La construction étudiée dans l'exposé sur la cohomologie des algèbres de Lie-Rinehart fournit le dual de Koszul de A (vue comme catégorie DG à un seul objet concentrée en degré nul).

2. Soient V un k-espace vectoriel de dimension finie, $A = \Lambda(DV)$ l'algèbre extérieure sur le dual de V et $B = SV$ l'algèbre symétrique sur V. On voit A et B comme des algèbres DG sans différentielle, A étant concentrée en degré 0 et B graduée de manière usuelle. Ces algèbres sont augmentées de la façon ordinaire.

   Considérons le A-B-bimodule gradué $X = SV \otimes \Lambda V$, où $B = SV$ agit par multiplication à gauche sur le facteur SV et A à droite sur le facteur ΛV, l'action étant caractérisée par

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n).l = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} l(v_i) v_1 \wedge \ldots \hat{v}_i \cdots \wedge v_n \quad (v_1, \ldots, v_n \in V, l \in DV)$$

   (le chapeau indique que le terme correspondant du produit extérieur doit être omis), que l'on munit de la différentielle

$$d : X^p \to X^{p+1} \qquad x \mapsto (-1)^p \sum_{i=1}^{n} v_i.x.v_i^*,$$

   où $(v_i)_{1 \le i \le n}$ est une base de V et $(v_i^*)_{1 \le i \le n}$ la base duale. Alors (B, X) est un relèvement du A-module trivial k (cela provient essentiellement de l'exactitude du complexe de Koszul sur V) ; par conséquent, B est un dual de Koszul de A.

4 Propriétés de la dualité de Koszul

Bidual de Koszul Notons $\mathcal{A}^\vee$ la sous-catégorie pleine de $\operatorname{Dif} \mathcal{A}$ formée des $A^\vee$ pour $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$. Comme

$$(\operatorname{Dif} \mathcal{A})(A^\vee, B^\vee) \simeq DD\mathcal{A}(A, B),$$

cette catégorie DG est quasi-équivalente à $\mathcal{A}$ si $H^n\mathcal{A}(A, B)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie pour tous $A, B \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Notation 4.1. On note $X_\vee$ le $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}^\vee$-bimodule $(A, B^\vee) \mapsto B^\vee(A)$

Lemme 4.2. *Le couple $(\mathcal{A}^\vee, X_\vee)$ est un relèvement de l'image de $\mathcal{A}^\vee$ dans $\mathcal{D}\mathcal{A}$.*

Le foncteur composé

$$\underline{\mathcal{A}}^\vee \to \mathcal{D}\mathcal{A}^\vee \xrightarrow{T_{X_\vee}} \mathcal{D}\mathcal{A} \xrightarrow{H_X} \mathcal{D}\mathcal{A}^*$$

prend ses valeurs dans $\{\bar{A}^* \mid A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}\}$, il définit donc un quasi-foncteur $Y : \mathcal{A}^\vee \to \mathcal{A}^{**}$. C'est une quasi-équivalence si et seulement si la restriction à $\mathbb{Z}\underline{\mathcal{A}}^\vee$ de $H_X : \mathcal{D}\mathcal{A} \to \mathcal{D}\mathcal{A}^*$ est pleinement fidèle.

On définit une augmentation sur $\mathcal{A}^\vee$ en posant

$$\bar{A}^\vee(B^\vee) = D(\operatorname{Dif} \mathcal{A})(\bar{A}, B^\vee)(\simeq DD\bar{A}(B)).$$

Lemme 4.3. *Le quasi-foncteur $Y : \mathcal{A}^\vee \to \mathcal{A}^{**}$ est compatible aux augmentations.*

Dimensions Trois notions de *dimension* d'un $\mathcal{A}$-module DG M interviennent ici (les deux premières s'appliquent dans une catégorie DG $\mathcal{A}$ quelconque, pour la dernière il faut que $\mathcal{A}$ soit augmentée) : les dimensions *projective*, *injective* et *semi-simple*, notées respectivement $p\dim M$, $i\dim M$ et $s\dim M$, caractérisées par $p\dim M \leq n$ (resp. $i\dim M \leq n$; $s\dim M \leq n$) si et seulement s'il existe une suite de morphismes de $\mathcal{DA}$

$$0 = M_{-1} \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_n = M$$

telle que, pour tout $0 \leq i \leq n$, existe un triangle distingué

$$M_{i-1} \to M_i \to Q_i \to M_{i-1}[1]$$

dans lequel Q_i est isomorphe à une somme directe finie de modules du type [1] $A^\wedge[j]$ (resp. $A^\vee[j]$; $\bar{A}[j]$), où $j \in \mathbb{Z}$ dépend de i. ($p\dim$ et $i\dim$ sont des analogues dérivés des dimensions homologique et cohomologique, respectivement, dans les catégories abéliennes ; $s\dim$ présente des similitudes avec la longueur de Loewy.)

Proposition 4.4. *Pour tout objet A de $\mathcal{A}$, on a :*

$$p\dim \bar{A}^* \leq s\dim A^\vee, \qquad s\dim A^{*\wedge} \leq i\dim \bar{A},$$

$$i\dim \bar{A}^* \leq s\dim A^\wedge, \qquad s\dim A^{*\vee} \leq p\dim \bar{A}.$$

Quelques cas de bon comportement dérivé

Proposition 4.5. *Supposons que $p\dim \bar{A}$ et $s\dim A^\wedge$ sont finis pour tout $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.*

1. *$s\dim A^{*\vee}$ et $i\dim \bar{A}^*$ sont finis pour tout A.*
2. *T_X et H_X sont des quasi-équivalences entre $\mathcal{DA}^*$ et $\mathcal{DA}$.*
3. *$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^\vee$ et $\mathcal{A}^{**}$ sont canoniquement quasi-équivalentes.*

Proposition 4.6. *Supposons que $s\dim A^\wedge$ et $s\dim A^\vee$ sont finis pour tout $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.*

1. *$p\dim \bar{A}^*$ et $i\dim \bar{A}^*$ sont finis pour tout A.*
2. *T_X et H_X induisent des quasi-équivalences entre $\mathcal{H}_p^b\mathcal{A}^*$ et la sous-catégorie triangulée de $\mathcal{DA}$ engendrée par les $\bar{A}$.*
3. *$T_{X^T} : \mathcal{DA} \to \mathcal{DA}^*$ est pleinement fidèle. (On rappelle que X^T désigne le $\mathcal{B}$-$\mathcal{A}$-bimodule défini par $X^T(B, A) = (\operatorname{Dif}\mathcal{A})(X(-, B), A^\wedge)$.)*
4. *$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^\vee$ et $\mathcal{A}^{**}$ sont canoniquement quasi-équivalentes.*

Cette proposition s'applique notamment à l'algèbre extérieure sur un k-espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 4.7. *Supposons que $p\dim \bar{A}$ et $i\dim \bar{A}$ sont finis pour tout $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.*

[1] On reproduit ici la définition de [Kel94], mais il serait peut-être plus pertinent de demander que les Q_i soient isomorphes à une somme directe finie de *facteurs directs* de modules du type indiqué.

1. *$s\dim A^{*\wedge}$ et $s\dim A^{*\vee}$ sont finis pour tout A.*
2. *T_X et H_X induisent des quasi-équivalences entre $\mathcal{H}_p^b\mathcal{A}^*$ et la sous-catégorie triangulée de $\mathcal{DA}$ engendrée par les $\bar{A}$.*
3. *$T_X : \mathcal{DA}^* \to \mathcal{DA}$ est pleinement fidèle.*
4. *Si tout $B^\vee$ (pour $B \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$) appartient à la sous-catégorie triangulée stable par sommes directes de $\mathcal{DA}$ engendrée par les $\bar{A}$, alors $\mathcal{A}^\vee$ est quasi-équivalente à $\mathcal{A}^{**}$.*

Cette proposition s'applique notamment à l'algèbre enveloppante d'une k-algèbre de Lie de dimension finie.

Références

[BGS88] A. A. Beĭlinson, V. A. Ginsburg & V. V. Schechtman – « Koszul duality », *J. Geom. Phys.* **5** (1988), no. 3, p. 317–350.

[Kel94] B. Keller – « Deriving DG categories », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **27** (1994), no. 1, p. 63–102.