Résolution barre et algèbre homologique pour les foncteurs sur les groupes libres

Aurélien Djament*

27 novembre 2025

Résumé

Il s'agit des notes d'un exposé donné dans le cadre du groupe de travail organisé au sein de l'équipe de topologie algébrique du LAGA en novembre 2025 autour du travail d'Arone [1]. On y présente quelques résultats montrés ou mentionnés dans ledit travail, mais sans forcément suivre les mêmes méthodes.

Avertissement : ces notes d'exposé constituent davantage un aide-mémoire à l'intention de leur auteur qu'un texte facilement utilisable pour l'auditoire ; elles contiennent probablement de nombreuses coquilles, notations non définies etc.

1 Préliminaires

Notations et rappels : pour $\mathcal{C}$ catégorie (essentiellement) petite, on note $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ la catégorie des foncteurs $\mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$. Produit tensoriel extérieur $\boxtimes$: pour $F \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ et $G \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, $F \boxtimes G \in \mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ est défini par $(F \boxtimes G)(c,d) = F(c) \otimes G(d)$. On dispose de $- \underset{\mathcal{C}}{\otimes} - : \mathcal{F}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \times \mathcal{F}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Ab}$ (composé de $\boxtimes$: $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \times \mathcal{F}(\mathcal{C}) \to \mathcal{F}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C})$ et de Coend) et des dérivés à gauche $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{C}}$ de ce bifoncteur équilibré (on peut indifféremment dériver à gauche par rapport à l'un ou l'autre des arguments). On note $\mathbb{Z}[G]$ l'anneau d'un groupe G, $[a] \in \mathbb{Z}[G]$ pour $a \in G$ l'élément "de base" correspondant, et $\bar{\mathbb{Z}}[G]$ l'idéal d'augmentation.

Dualité Ext/Tor : pour $F \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$, $T \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ et $M \in \mathbf{Ab}$, on a un iso naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{C})}(T, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, M)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F \underset{\mathcal{C}}{\otimes} T, M)$$

qui se dérive en des suites exactes courtes scindées (non naturellement)

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Tor}^{\mathcal{C}}_{i-1}(F,T), M) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathcal{C})}(T, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F,M)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Tor}^{\mathcal{C}}_i(F,T), M) \to 0$$

si F est à valeurs dans les groupes abéliens libres.

Parfois, pour des raisons techniques, on préférera travailler avec des Tor que des Ext.

*CNRS, LAGA (UMR7539) ; djament@math.cnrs.fr.

2 Résolution barre dans $\mathcal{F}(\mathbf{gr})$ et premières conséquences

Si G est un groupe, on dispose d'un complexe de groupes abéliens naturel en G

$$\cdots \to \mathbb{Z}[G^{n+1}] \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z}[G^n] \to \cdots \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$$

où $d_n([g_1,\dots,g_{n+1}]) = [g_2,\dots,g_{n+1}]+\sum_{i=1}^n(-1)^i[g_1,\dots,g_{i-1},g_i.g_{i+1},g_{i+2},\dots,g_{n+1}]+(-1)^{n+1}[g_1,\dots,g_n]$ dont l'homologie est $H_*(G;\mathbb{Z})$.

Ce complexe, ici noté $\mathcal{B}(G)$, est le complexe de Moore d'un ensemble simplicial $B(G)$ naturel en G tel que $B(G)_n = G^n$. Le complexe normalisé associé sera noté $\bar{\mathcal{B}}(G)$; on a $\bar{\mathcal{B}}(G)_n = \bar{\mathbb{Z}}[G]^{\otimes n}$.

Comme l'homologie d'un groupe libre est concentrée en degrés 0 et 1, si l'on se restreint à $\mathbf{gr}$ (catégorie des groupes libres de rang fini), on obtient, en tronquant le degré 0 et en décalant de 1 le complexe $\mathcal{B}(G)$, une résolution projective dans $\mathcal{F}(\mathbf{gr})$ du foncteur d'abélianisation $\mathfrak{a} \in \mathcal{F}(\mathbf{gr})$ de la forme

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1$$

où $P_i(G) := \mathbb{Z}[\mathbf{gr}(\mathbb{Z}^{*i}, -)]$ est projectif, ou, en utilisant $\bar{\mathcal{B}}(G)$,

$$\cdots \to \bar{P}^{\otimes n} \to \bar{P}^{\otimes(n-1)} \to \cdots \to \bar{P}.$$

En particulier, pour $F \in \mathcal{F}(\mathbf{gr}^{\mathrm{op}})$ et $n \in \mathbb{N}$, on obtient un isomorphisme naturel $\mathrm{Tor}_n^{\mathbf{gr}}(F,\mathfrak{a}) \simeq \pi_{n+1}(\mathrm{B}_*(F))$, où $\mathrm{B}_*(F)$ est un groupe abélien simplicial naturel en F tel quel $\mathrm{B}(F)_n = F(\mathbb{Z}^{*n})$ ou, dualement, pour $F \in \mathcal{F}(\mathbf{gr})$, $\mathrm{Ext}^n(\mathfrak{a},F) \simeq \pi^{n+1}(\mathrm{B}^*(F))$, où $\mathrm{B}^*(F)$ est un groupe abélien cosimplicial naturel en F tel quel $\mathrm{B}(F)^n = F(\mathbb{Z}^{*n})$. Ici, la structure (co)simpliciale provient simplement de la post-composition par F du groupe cosimplicial (libre de rang fini en chaque degré) $\Delta \hookrightarrow \mathbf{Ens}^f \xrightarrow{\Phi} \mathbf{gr}$, où $\Phi(E) := \mathrm{Ker}(\mathbb{Z}^{*E} \to \mathbb{Z})$ (foncteur défini formellement à partir du fait que $*$ est un coproduit catégorique dans $\mathbf{gr}$). Cet énoncé est essentiellement la proposition 5.1 de [5]. Cette interprétation "topologique" est manifestement équivalente au théorème C de [1] lorsque le foncteur à la source est $\mathfrak{a}$.

On note que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbf{gr})}(P_n,F) \simeq F(\mathbb{Z}^{*n})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbf{gr})}(\bar{P}^{\otimes n},F) \simeq cr_n(F)(\mathbb{Z},\dots,\mathbb{Z})$. En particulier :

Proposition 2.1. *Si $F \in \mathcal{F}(\mathbf{gr})$ est polynomial de degré d, alors $\mathrm{Ext}^n(\mathfrak{a},F) = 0$ pour $n \geq d$.*

Un calcul direct qu'on peut faire à partir de la résolution barre normalisée est le suivant :

Proposition 2.2. *Le groupe abélien $\mathrm{Ext}^i(\mathfrak{a},\Lambda^n(\mathfrak{a}))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ pour $i = n-1$ et est nul sinon.*

Une autre conséquence facile mais utile de cette résolution barre est la formule de Künneth suivante (cf. [9, lm 1.4]) :

Proposition 2.3. *Pour $F, G \in \mathcal{F}(\mathbf{gr}^{\mathrm{op}})$ réduits (i.e. nuls sur le groupe trivial), avec F ou G à valeurs sans torsion (sur $\mathbb{Z}$), et $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'une suite exacte naturelle scindée*

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}_i^{\mathbf{gr}}(F,\mathfrak{a}) \otimes \mathrm{Tor}_j^{\mathbf{gr}}(G,\mathfrak{a}) \to \mathrm{Tor}_n^{\mathbf{gr}}(F \otimes G,\mathfrak{a}) \to \bigoplus_{i+j=n-2} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathrm{Tor}_i^{\mathbf{gr}}(F,\mathfrak{a}),\mathrm{Tor}_j^{\mathbf{gr}}(G,\mathfrak{a})) \to 0.$$

Pour $F, G \in \mathcal{F}(\mathbf{gr})$ réduits, avec F ou G à valeurs sans torsion, et $n \in \mathbb{N}$ on a une suite exacte naturelle scindée

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n-1} \mathrm{Ext}^i(\mathfrak{a}, F) \otimes \mathrm{Ext}^j(\mathfrak{a}, G) \to \mathrm{Ext}^n(\mathfrak{a}, F \otimes G) \to \bigoplus_{i+j=n-2} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathrm{Ext}^i(\mathfrak{a}, F), \mathrm{Ext}^j(\mathfrak{a}, G)) \to 0.$$

En combinant ce qui précède, on obtient :

Proposition 2.4. *([9, prop. 1.3]) Le groupe abélien* $\mathrm{Ext}^i(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{\otimes n})$ *est isomorphe à $\mathbb{Z}$ si $i = n-1$ et nul sinon.*

Exemple 2.5. La classe de la suite exacte courte $0 \to \mathfrak{a}^{\otimes 2} \to \mathrm{Pa}_2 \to \mathfrak{a} \to 0$ (où Pa_n désigne le n-ième foncteur de Passi) engendre $\mathrm{Ext}^1(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{\otimes 2})$.

Proposition 2.6. *([1, cor. 11.14]) Le groupe abélien* $\mathrm{Ext}^i(\mathfrak{a}, \mathrm{Pa}_n)$ *est isomorphe à $\mathbb{Z}$ si $i = n-1$ et que n est impair et est nul sinon.*

Esquisse de démonstration. On procède par récurrence sur n en utilisant les suites exactes courtes $0 \to \mathfrak{a}^{\otimes n} \to \mathrm{Pa}_n \to \mathrm{Pa}_{n-1} \to 0$ et la proposition 2.4. Il faut vérifier pour conclure, dans le cas où n est pair, que le morphisme de liaison $\mathbb{Z} \simeq \mathrm{Ext}^{n-2}(\mathfrak{a}, \mathrm{Pa}_{n-1}) \to \mathrm{Ext}^{n-1}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{\otimes n}) \simeq \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. Dans le cas $n = 2$, c'est l'observation de l'exemple 2.5, le cas général est analogue (et nécessite un examen explicite de l'isomorphisme de la proposition 2.4). □

3 Adjonction somme/diagonale et conséquences

Si l'on souhaite calculer tous les groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^i(\mathfrak{a}^{\otimes n}), \mathfrak{a}^{\otimes m})$ par une méthode "algébrique", suivant [9, § 2], on peut tout déduire de la proposition 2.4 et d'une autre "formule de Künneth", qu'on va maintenant présenter.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $*_n : \mathbf{gr}^n \to \mathbf{gr}$ le foncteur "produit libre n-itéré" et $\delta_n : \mathbf{gr} \to \mathbf{gr}^n$ la diagonale n-itérée. Le fait que $*$ soit une somme catégorique signifie exactement que $*_n$ est adjoint à gauche à δ_n. Il s'ensuit que le foncteur $- \circ *_n : \mathcal{F}(\mathbf{gr}) \to \mathcal{F}(\mathbf{gr}^n)$ est adjoint à *droite* à $- \circ \delta_n : \mathcal{F}(\mathbf{gr}^n) \to \mathcal{F}(\mathbf{gr})$. Comme un foncteur de précomposition est toujours exact, cette adjonction s'étend directement aux groupes d'extensions (on a aussi une variante pour les groupes de torsion) : si F est un foncteur de $\mathcal{F}(\mathbf{gr})$ et X un foncteur de $\mathcal{F}(\mathbf{gr}^n)$, on a un iso naturel

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbf{gr})}(X \circ \delta_n, F) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbf{gr}^n)}(X, F \circ *_n)$$

de groupes abéliens gradués.

En particulier, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbf{gr})}(\mathfrak{a}^{\otimes n}, F) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbf{gr}^n)}(\mathfrak{a}^{\boxtimes n}, F \circ *_n)$. On peut alors utiliser une formule de Künneth pour les produits tensoriels extérieurs de foncteurs (qui marche avec moins d'hypothèses en Tor qu'en Ext) :

Proposition 3.1. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des petites catégories, $F, G \in \mathcal{F}(\mathcal{C}), T, U \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ des foncteurs. On suppose que F et T possèdent une résolution projective dont chaque terme est de type fini et que G ou U est à valeurs sans torsion sur $\mathbb{Z}$. Alors il existe une suite exacte courte naturelle scindée*

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathcal{C})}(F, G) \otimes \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{F}(\mathcal{D})}(T, U) \to \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{D})}(F \boxtimes T, G \boxtimes U) \dots$$

$$\to \bigoplus_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathcal{C})}(F, G), \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{F}(\mathcal{D})}(T, U)) \to 0\,.$$

Corollaire 3.2. *(Cf. [9, lm 2.2]) Soient $F_1, \dots, F_n$ des foncteurs de $\mathcal{F}(\mathbf{gr})$. On suppose que les valeurs des F_i et les $\mathrm{Ext}^r(\mathfrak{a}, F_i)$ sont sans torsion. Alors*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbf{gr}^n)}(\mathfrak{a}^{\boxtimes n}, F_1 \boxtimes \cdots \boxtimes F_n) \simeq \bigotimes_{i=1}^{n} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbf{gr})}(\mathfrak{a}, F_i).$$

On peut maintenant retrouver le calcul complet des $\mathrm{Ext}^i(\mathfrak{a}^{\otimes n}, \mathfrak{a}^{\otimes m})$ à partir de la proposition 2.4 et de l'isomorphisme

$$\mathfrak{a}^{\otimes m} \circ *_n \simeq \bigoplus_{i_1+\cdots+i_n=m} (\mathfrak{a}^{\otimes i_1} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathfrak{a}^{\otimes i_n}) \uparrow^{\Sigma_m}_{\Sigma_{i_1}\times\cdots\times\Sigma_{i_n}} .$$

4 Un critère d'annulation (co)homologique

Proposition 4.1. *([3, prop. 4.4]) Soit $X \in \mathcal{F}(\mathbf{gr}^{op})$ un foncteur tel qu'existe, pour tous objets A et T de $\mathbf{gr}$, une application linéaire $\xi(A,T) : X(A) \to X(T * A)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *pour tous $\varphi : A \to B$ et T dans $\mathbf{gr}$, les composées*

   $$X(B) \xrightarrow{X(\varphi)} X(A) \xrightarrow{\xi(A,T)} X(T * A)$$

   et

   $$X(B) \xrightarrow{\xi(B,T)} X(T * B) \xrightarrow{X(T*\varphi)} X(T * A)$$

   coïncident ;
2. *la composée*

   $$X(A) \xrightarrow{\xi(A,T)} X(T * A) \xrightarrow{X(u(A,T))} X(A)$$

   est l'identité, où $u(A,T) : A \to T * A$ est l'inclusion canonique ;
3. *étant donnés $\varphi : A \to B$, T et $\tau : T \to T * B$ dans $\mathbf{gr}$ de sorte que le morphisme $\theta : T * B \to T * B$ égal à l'identité sur B et à τ sur T soit un isomorphisme, si l'on note $\psi : T * A \to T * B$ le morphisme de composantes $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{u(B,T)} T * B$ et $T \xrightarrow{\tau} T * B$, alors les composées*

   $$X(B) \xrightarrow{X(\varphi)} X(A) \xrightarrow{\xi(A,T)} X(T * A)$$

   et

   $$X(B) \xrightarrow{\xi(B,T)} X(T * B) \xrightarrow{X(\psi)} X(T * A)$$

   coïncident.

Alors $\mathrm{Tor}^{\mathbf{gr}}_*(X, \mathfrak{a} \otimes P_r) = 0$ pour tout entier r.

(La première propriété est un cas particulier de la troisième, mais il sera commode pour la suite de les différencier.)

Démonstration. Pour tout entier $n > 0$, posons

$$h_n = \xi(\mathbb{Z}^{*n+r}, \mathbb{Z}) : X(n+r) \to X(n+r+1).$$

Il suffit de prouver la relation d'homotopie $d_n h_n + h_{n-1} d_{n-1} = Id_{X(n+r)}$ pour tout entier $n > 0$ (à lire $d_1 h_1 = Id$ pour $n = 1$), où d_n est la différentielle du complexe barre (non normalisé). Celle-ci découle des identités suivantes :

1. $X(a^{n,r})h_n = Id_{X(n+r)}$;
2. $X(b_1^{n,r})h_n = h_{n-1}X(a^{n-1,r})$;
3. $X(b_{i+1}^{n,r})h_n = h_{n-1}X(b_i^{n-1,r})$ pour $1 \le i \le n-1$;
4. $X(c^{n,r})h_n = h_{n-1}X(c^{n-1,r})$

qu'on montre maintenant, les morphismes $a^{n,r}, b_i^{n,r}, c^{n,r} : \mathbb{Z}^{*r+n} \to \mathbb{Z}^{*r+n+1}$ étant définis, via l'identification $\mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(\mathbb{Z}^{*r+n}, \mathbb{Z}^{*r+n+1}) \simeq (\mathbb{Z}^{*r+n+1})^{n+r}$, par :

$$a^{n,r} = (e_2, \dots, e_{n+r+1})$$

$$b_i^{n,r} = (e_1, \dots, e_{i-1}, e_i e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_{n+r+1})$$
$$c^{n,r} = (e_1, \dots, e_n, e_{n+2}, \dots, e_{n+r+1})$$

où $(e_1, \dots, e_{n+r+1})$ désigne la « base » tautologique de $\mathbb{Z}^{*r+n+1}$.

La première égalité provient de la deuxième hypothèse sur les morphismes ξ, du fait que $a^{n,r} = u(\mathbb{Z}^{*n+r}, \mathbb{Z})$.

La troisième (resp. quatrième) égalité provient de la première hypothèse sur les morphismes ξ, puisque $b_{i+1}^{n,r} = \mathbb{Z} * b_i^{n,r}$ (resp. $c^{n,r} = \mathbb{Z} * c^{n-1,r}$).

Pour la deuxième égalité, on applique la troisième hypothèse sur les ξ avec $\varphi = a^{n-1,r} = u(\mathbb{Z}^{*n+r-1}, \mathbb{Z}) : \mathbb{Z}^{*n+r-1} \to \mathbb{Z}^{*n+r}$ et $T = \mathbb{Z}$, en prenant pour $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} * \mathbb{Z}^{*n+r} = \mathbb{Z}^{*n+r+1}$ le morphisme donné par l'élément e_1e_2 du but. La condition d'inversibilité de θ est clairement vérifiée (c'est un générateur canonique du groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}^{*n+r+1}$), et ψ n'est autre que $b_1^{n,r}$. Cela termine la démonstration. $\square$

5 Application à l'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres

Soit $\mathcal{G}$ la catégorie ayant les mêmes objets que **gr** et dont les morphismes $G \to H$ sont les couples (u, K) constitués d'un morphisme de groupes injectif $u : G \hookrightarrow H$ et d'un sous-groupe K de H tels que $H = u(G) * K$. On note que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(F_n, F_m)$ est vide si $n > m$ et s'identifie à $\mathrm{Aut}(F_n)/\mathrm{Aut}(F_{n-m})$ sinon. Le produit libre induit une structure monoïdale symétrique sur $\mathcal{G}$. Avec la terminlogie de [8], $\mathcal{G}$ est la *catégorie homogène* associée aux groupes d'automorphismes des groupes libres. Il suit de tout cela et d'un résultat général de [2] que :

Proposition 5.1. *Pour tout foncteur X de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ l'homologie stable $H_*^{st}(X) := \operatorname{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*(\mathrm{Aut}(F_n); X(F_n))$ est naturellement isomorphe à $H_*(\operatorname{colim}_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Aut}(F_n); H_*(\mathcal{G}; X))$.*

Par un résultat profond de Galatius [4], on peut remplacer $\operatorname{colim}_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Aut}(F_n)$ par le groupe symétrique infini $\Sigma_\infty := \operatorname{colim}_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$.

On dispose d'un foncteur $i : \mathcal{G} \to \mathbf{gr}$ qui est l'identité sur les objets et donné par $(u, H) \mapsto u$ sur les morphismes ; noter que i est monoïdal symétrique (au sens fort).

Théorème 5.2. *([3, th. 5.4]) Si $F \in \mathcal{F}(\mathbf{gr})$ est un foncteur polynomial réduit et $T \in \mathcal{F}(\mathbf{gr})$ un foncteur arbitraire, on a $H_*(\mathcal{G}; (F \otimes T) \circ i) = 0$, et donc $H_*^{st}((F \otimes T) \circ i) = 0$.*

On va maintenant tenter d'expliquer la stratégie de la démonstration de ce résultat.

Remarque 5.3. Randal-Williams [7, th. A (i)] a obtenu, par des méthodes topologiques indépendantes, un résultat d'annulation essentiellement équivalent au théorème précédent. J'ignore si l'on peut trouver des liens entre son approche et celle d'Arone [1] (qui ne traite toutefois pas directement d'homologie stable).

On commence par relier l'homologie de $\mathcal{G}$ à celle de $\mathbf{gr}$ à l'aide d'une suite spectrale : notons $i_! : \mathcal{F}(\mathcal{G}^{\mathrm{op}}) \to \mathcal{F}(\mathbf{gr}^{\mathrm{op}})$ l'extension de Kan à gauche le long du foncteur $i^{\mathrm{op}} : \mathcal{G}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{gr}^{\mathrm{op}}$ (i.e. l'adjoint à gauche à la précomposition par i^{op}). Il donne lieu à un isomorphisme $i_!(X) \underset{\mathbf{gr}}{\otimes} F \simeq X \underset{\mathcal{G}}{\otimes} (F \circ i)$ naturel en $X \in \mathcal{F}(\mathcal{G}^{\mathrm{op}})$ et $F \in \mathcal{F}(\mathbf{gr})$. Celui-ci se dérive en une suite spectrale de foncteurs composés

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}^{\mathbf{gr}}_p(\mathbf{L}_q(i_!)(X), F) \Rightarrow \mathrm{Tor}^{\mathcal{G}}_{p+q}(X, F \circ i).$$

En particulier, prenant X constant, on a une suite spectrale

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}^{\mathbf{gr}}_p(L_q, F) \Rightarrow H_{p+q}(\mathcal{G}; F \circ i)$$

où $L_q = \mathbf{L}_q(i_!)(\mathbb{Z})$ peut être décrit par $L_q(A) = H_q(\mathcal{G}[A])$ où $\mathcal{G}[A]$ est la catégorie définie comme suit.

Définition 5.4. Soit $A \in \mathbf{gr}$. On note $\mathcal{G}[A]$ la catégorie dont les objets sont les couples (B, f) formés d'un objet B de $\mathcal{G}$ et d'un élément f de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(A, i(B))$, les morphismes $(B, f) \to (B', f')$ étant les morphismes $u : B \to B'$ de $\mathcal{G}$ tels que $f' = i(u) \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(A, i(B'))$.

On montre que les foncteurs L_q vérifient l'hypothèse de la proposition 4.1. Cela suffit à conclure grâce à la suite spectrale et à l'observation (non triviale, mais pas très difficile non plus —- cf. [3, prop. 5.3]) que l'annulation de $\mathrm{Tor}^{\mathbf{gr}}_*(L_q, \mathfrak{a} \otimes P_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ implique aussi celle de $\mathrm{Tor}^{\mathbf{gr}}_*(L_q, F \otimes T)$ pour tous foncteurs F et T de $\mathcal{F}(\mathbf{gr})$ avec F polynomial réduit.

On considère pour cela les applications linéaires

$$\xi(A, T) : L_\bullet(A) \to L_\bullet(T * A)$$

induites en homologie par les foncteurs $\mathcal{G}[A] \xrightarrow{T*-} \mathcal{G}[T * A]$ et l'on vérifie les trois conditions de la proposition 4.1.

La première propriété provient de ce que les morphismes

$$L_\bullet(B) \xrightarrow{L_\bullet(\varphi)} L_\bullet(A) \xrightarrow{\xi(A,T)} L_\bullet(T * A)$$

et

$$L_\bullet(B) \xrightarrow{\xi(B,T)} L_\bullet(T * B) \xrightarrow{L_\bullet(T*\varphi)} L_\bullet(T * A)$$

sont induits par les foncteurs $\mathcal{G}[B] \to \mathcal{G}[T * A]$

$$\big(G \in \mathcal{G}, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(B, iG)\big) \mapsto \big(T * G, T * (A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{f} iG)\big)$$

et

$$\big(G \in \mathcal{G}, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(B, iG)\big) \mapsto \big(T * G, T * A \xrightarrow{T*\varphi} T * B \xrightarrow{T*f} T * iG\big)$$

respectivement, qui sont égaux.

Pour la deuxième, on note que la composée

$$L_\bullet(A) \xrightarrow{\xi(A,T)} L_\bullet(T*A) \xrightarrow{L_\bullet(u(A,T))} L_\bullet(A)$$

est induite par l'endofoncteur

$$\big(G \in \mathcal{G}, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(A, iG)\big) \mapsto \big(T*G, A \xrightarrow{u(A,T)} T*A \xrightarrow{T*f} T*iG)\big)$$

de $\mathcal{G}[A]$. Comme le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u(A,T)"] \arrow[d, "f"'] & T*A \arrow[d, "T*f"] \\ iG \arrow[r, "u(iG,T)"] & T*iG \end{tikzcd}$$

commute, le morphisme naturel $G \to T*G$ de $\mathcal{G}$ induit une transformation naturelle de l'identité de $\mathcal{G}[A]$ vers ce foncteur. Par conséquent (cf. [6]), celui-ci induit l'identité en homologie.

Venons-en à la dernière propriété. Les composées

$$L_\bullet(B) \xrightarrow{X(\varphi)} L_\bullet(A) \xrightarrow{\xi(A,T)} L_\bullet(T*A)$$

et

$$L_\bullet(B) \xrightarrow{\xi(B,T)} L_\bullet(T*B) \xrightarrow{L_\bullet(\psi)} L_\bullet(T*A)$$

qui nous intéressent sont induites par les foncteurs $\mathcal{G}[B] \to \mathcal{G}[T*A]$

$$\big(G \in \mathcal{G}, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(B, iG)\big) \mapsto \big(T*G, T*A \xrightarrow{T*\varphi} T*B \xrightarrow{T*f} T*iG)\big)$$

et

$$\big(G \in \mathcal{G}, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(B, iG)\big) \mapsto \big(T*G, T*A \xrightarrow{\psi} T*B \xrightarrow{T*f} T*iG\big)$$

respectivement. Le morphisme de groupes $T*G \to T*G$ dont les composantes sont $T \xrightarrow{\tau} T*B \xrightarrow{T*f} T*G$ et $G \xrightarrow{u(G,T)} T*G$ est un isomorphisme (son inverse est le morphisme de composantes $T \xrightarrow{\tau'} T*B \xrightarrow{T*f} T*G$, où τ' est la composante $T \to T*B$ de l'inverse de l'automorphisme θ, et $u(G,T)$), c'est donc aussi un automorphisme de $T*G$ *dans la catégorie* $\mathcal{G}$, automorphisme que nous noterons γ_G. La conclusion provient alors des deux observations suivantes :

1. le morphisme γ_G est naturel en $G \in \mathcal{G}$ (il suffit pour le voir d'écrire ce que sont les morphismes dans $\mathcal{G}[B]$) ;
2. il fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} T*A \arrow[r, "T*\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & T*B \arrow[r, "T*f"] \arrow[d, "\theta"] & T*G \arrow[d, "\gamma_G"] \\ & T*B \arrow[r, "T*f"] & T*G \end{tikzcd}$$

de $\mathbf{gr}$, de sorte qu'il définit une transformation naturelle entre nos deux foncteurs $\mathcal{G}[B] \to \mathcal{G}[T*A]$, qui induisent donc la même application en homologie.

Références

[1] Gregory Arone. Polynomial functors from free groups to a stable infinity-category. arXiv :2504.04114v2, 2025.

[2] Aurélien Djament and Christine Vespa. Sur l'homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 43(3) :395–459, 2010.

[3] Aurélien Djament and Christine Vespa. Sur l'homologie des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients polynomiaux. *Comment. Math. Helv.*, 90(1) :33–58, 2015.

[4] Søren Galatius. Stable homology of automorphism groups of free groups. *Ann. of Math. (2)*, 173(2) :705–768, 2011.

[5] Mamuka Jibladze and Teimuraz Pirashvili. Cohomology of algebraic theories. *J. Algebra*, 137(2) :253–296, 1991.

[6] Daniel Quillen. Higher algebraic K-theory. I. In *Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, pages 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341. Springer, Berlin, 1973.

[7] Oscar Randal-Williams. Cohomology of automorphism groups of free groups with twisted coefficients. *Selecta Math. (N.S.)*, 24(2) :1453–1478, 2018.

[8] Oscar Randal-Williams and Nathalie Wahl. Homological stability for automorphism groups. *Adv. Math.*, 318 :534–626, 2017.

[9] Christine Vespa. Extensions between functors from free groups. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 50(3) :401–419, 2018.