LA CONJECTURE DE WHITEHEAD - LES GRANDES LIGNES DE LA (NOUVELLE) DÉMONSTRATION

GEOFFREY POWELL

TABLE DES MATIÈRES

1. RAPPELS

Remarque 1.1. Partout on travaille avec des espaces p-complets afin qu'on puisse détecter les équivalences faibles par l'homologie modulo p. On écrit $H_*(-)$ pour $H_*(-;\mathbb{F}_p)$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, l'espace $L_1(k)$ est le rétracte de l'espace de Thom $BE_k^{\rho_k}$ donné par l'idempotent de Steinberg. Puisque ρ_k contient la représentation triviale, $BE_k^{\rho_k}$ est une suspension et donc $L_1(k)$ est un co-H-espace.

Notation 1.2. $L_k := \tilde{H}_*(L_1(k))$, l'homologie réduite (modulo p) de $L_1(k)$.

Remarque 1.3. La connexité de L_k est connue :

$$(L_k)_* = \begin{cases} 0 & * < c(k) \\ \mathbb{F}_p & * = c(k), \end{cases}$$

où $c(k) = 2p^k - 1 - k$. (En particulier $c(k) \to \infty$ lorsque $k \to \infty$.)

Rappeler que $L(k)$ dénote le spectre $L(k) := \Sigma^{-k}\mathrm{SP}^{p^k}(S)/\mathrm{SP}^{p^{k-1}}(S)$ et qu'on a l'identification

$$\Sigma^\infty L_1(k) \simeq \Sigma L(k).$$

La conjecture de Whitehead concerne un diagramme de morphismes de la forme

$$\ldots \rightleftarrows QL_1(k+1) \underset{s_k}{\overset{d_k}{\rightleftarrows}} QL_1(k) \rightleftarrows \ldots,$$

où $Q = \Omega^\infty\Sigma^\infty$, donc $QL_1(k) \simeq Q\Sigma L(k)$ et d_k est un morphisme d'espaces des lacets infinis (est de la forme $\Omega^\infty\delta_k$ pour $\delta_k : \Sigma^\infty L_1(k+1) \to \Sigma^\infty L_1(k)$, une application stable de $L_1(k+1)$ vers $L_1(k)$).

Date: 18 décembre 2013.

Notes de l'exposé du 17/12/13, légèrement modifiées.

Remarque 1.4. Le résultat principal de Kuhn, [Kuh13, Theorem 1.1], fournit des hypothèses sur d_k, s_k ($\forall k$) qui garantissent que

$$d_k s_k + s_{k-1} d_{k-1} : QL_1(k) \to QL_1(k)$$

soit une équivalence d'homotopie.

De ce résultat on déduit la conjecture de Whitehead en exhibant de bonnes familles d'applications continues $\{d_k\}$, $\{s_k\}$. (Voir Section 6.)

On a utilisé le résultat suivant afin de nous amener à l'étude des primitifs en homologie (primitifs pour la structure naturelle de coalgèbre de $H_*(-)$ d'un espace).

Proposition 1.5. *Soit $f : X \to X$ une application continue, où X est un espace connexe de type fini. Alors $H_*(f)$ est un isomorphisme si et seulement si le morphisme $PH_*(f) : PH_*(X) \to PH_*(X)$ est un isomorphisme.*

Kuhn utilise une version homologique des *foncteurs de Singer* $R_n : \mathrm{Mod}_{\mathscr{A}} \to \mathrm{Mod}_{\mathscr{A}}$, $n \in \mathbb{N}$, où $\mathrm{Mod}_{\mathscr{A}}$ est la catégorie des $\mathscr{A}$-modules à droite.

Remarque 1.6. Il conviendrait de donner une définition cohérente des foncteurs R_n qui rendent limpide la relation avec la topologie.

Remarque 1.7. On dispose de transformations naturelles [1] ($\forall n, k \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{aligned} i_* &: R_n R_k \twoheadrightarrow R_{n+k} \\ \mathrm{tr} &: R_{n+k} \hookrightarrow R_n R_k \end{aligned}$$

Par [Kuh13, Proposition 2.5]), tr correspond au transfert lorsqu'on l'applique à un module de la forme $H_*(X)$, X un espace. En particulier, ces transformations montrent que $R_{n+k}M$ est facteur direct (dans $\mathrm{Mod}_{\mathscr{A}}$) de $R_n R_k M$, $\forall M \in \mathrm{Ob}\mathrm{Mod}_{\mathscr{A}}$.

Ainsi, on dispose d'une extension

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_s M, R_t N) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_{n+s} M, R_{n+t} N) \tag{1}$$

qui associe à $\alpha : R_s M \to R_t N$ la composée

$$R_{n+s}M \longrightarrow R_n R_s M \xrightarrow{R_n \alpha} R_n R_t N \xrightarrow{i_*} R_{n+t} N,$$

ou bien $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_s M, R_t N) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_* M, R_* N)$.

La relation avec les primitifs de l'homologie d'un espace de la forme QZ (pour Z convenable) est expliquée par le résultat suivant.

Proposition 1.8. [Kuh13, Section 2.3] *Soit Z un co-H-espace connexe, alors*

$$PH_*(QZ) \cong R_* \tilde{H}_*(Z) := \bigoplus_{n \geq 0} R_n \tilde{H}_*(Z).$$

Ceci mène au problème de la compréhension de

$$PH_*(g) : PH_*(QZ_1) \to PH_*(QZ_2)$$

pour $g : QZ_1 \to QZ_2$ une application continue quelconque (pas nécessairement d'espaces des lacets infinis), où Z_1, Z_2 sont des co-H-espaces (et donc connexes).

1. L'existence dans le cadre algébrique a été expliqué dans l'exposé de Nguyen Dang Ho Hai.

2. CONSÉQUENCES DE LA DÉCOMPOSITION STABLE DE QZ

Soit X un espace connexe par arcs, alors on dispose de la décomposition stable :

$$\Sigma^\infty QX \simeq \bigvee_{r\geq 1} \Sigma^\infty D_r X \cong \Sigma^\infty \bigvee_{r\geq 1} D_r X.$$

Puisque Ω^∞ est un adjoint à droite, il envoie les produits de $\mathscr{SH}$ (la catégorie d'homotopie stable) sur les produits d'espaces topologiques. En raison de la connexité des $D_r X$, dans le cas actuel, $\bigvee_{r\geq 1} \Sigma^\infty D_r X$ est le produit dans $\mathscr{SH}$, ainsi l'unité de l'adjonction fournit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} QX \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\prod_r j_r"'] & QQX \arrow[d, "\simeq"] \\ & \prod_{r\geq 1} Q(D_r X). \end{tikzcd}$$

définissant ainsi les invariants de Hopf $j_r : QX \to Q(D_r X)$.

Soit $f : QX \to \Omega^\infty E$ une application continue (pas nécessairement d'espaces Ω^∞), l'adjoint $\tilde f : \Sigma^\infty QX \to E$ fournit les composantes stables $f(r) : \Sigma^\infty D_r(X) \to E$:

$$\begin{tikzcd} \Sigma^\infty QX \arrow[r, "\tilde f"] \arrow[d, "\simeq"'] & E \\ \bigvee_r \Sigma^\infty D_r(X). \arrow[ur, "\bigvee f(r)"'] & \end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur Ω^∞, on retrouve le morphisme f via le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} QX \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\prod j_r"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & QQX \arrow[r, "\Omega^\infty \tilde f"] \arrow[d, "\simeq"] & \Omega^\infty E \\ & \prod_r QD_r(X), \arrow[ur, "\sum \Omega^\infty f(r)"'] & \end{tikzcd}$$

ce qui fournit l'identification (voir [Kuh13, Lemma 2.1]) :

$$f \simeq \sum_{r\geq 1} \Omega^\infty f(r) \circ j_r$$

(Ici la somme $\sum$ des applications $\Omega^\infty f(r)$ est définie en utilisant le produit commutatif de $\Omega^\infty E$.)

Remarque 2.1. L'application continue f est un morphisme d'espaces Ω^∞ si et seulement si toutes les composantes $f(r)$ sont triviales pour $r > 1$ (voir [Kuh13, Remark 2.2]).

Lemme 2.2. *Pour $f_i : Y \to \Omega^\infty E$, $i \in \mathscr{I}$, un ensemble d'applications continues qui induisent l'application*

$$f := \sum_{i\in\mathscr{I}} f_i : Y \to \Omega^\infty E,$$

le morphisme sur les primitifs

$$PH_*(f) : PH_*(Y) \to PH_*(\Omega^\infty E)$$

est la somme des applications linéaires : $f = \sum_{i\in\mathscr{I}} PH_*(f_i)$.

On en déduit :

Proposition 2.3. *Soit $f : QX \to \Omega^\infty E$ une application continue, alors le morphisme induit sur les primitifs se décrit comme :*

$$PH_*(f) = \sum_{r \geq 1} PH_*(\Omega^\infty f(r)) \circ PH_*(j_r).$$

L'identification de $PH_*(j_r)$ dans les cas qui nous intéressent découle du résultat suivant :

Proposition 2.4. [Kuh13, Proposition 2.3] *Pour Z un co-H-espace, la composante de $\Sigma^\infty j_t$ par rapport aux décompositions stables de QZ et QD_tZ :*

$$\Sigma^\infty D_r Z \to \Sigma^\infty QZ \xrightarrow{\Sigma^\infty j_t} \Sigma^\infty QD_tZ \to \Sigma^\infty D_s D_t Z$$

est triviale si $r \neq st$; lorsque $r = st$, elle est le transfert associé à $\mathfrak{S}_s \wr \mathfrak{S}_t \subset \mathfrak{S}_{st}$.

Rappeler que, si Z est un co-H-espace, on a $PH_*(QZ) = R_*\tilde{H}_*(Z)$, donc pour une application continue $f : QZ_1 \to QZ_2$ (Z_1, Z_2 des co-H-espaces) fournit les contributions

$$PH_*(\Omega^\infty f(r)) \circ PH_*(j_r) : R_*\tilde{H}_*(Z_1) \to R_*\tilde{H}_*(Z_2).$$

La contribution de $f(r)$ est non-triviale si et seulement si $r = p^m$, pour $0 \leq m \in \mathbb{Z}$.

Notation 2.5. On dénote par $\tilde{f}(r) : D_r(X) \to \Omega^\infty E$ l'adjoint à $f(r) : \Sigma^\infty D_r(X) \to E$.

Proposition 2.6. [Kuh13, Theorem 2.7] *Soit $f : QZ_1 \to QZ_2$ une application continue, où Z_1, Z_2 sont des co-H-espaces. Alors, pour $0 \leq m \in \mathbb{Z}$, $PH_*(\Omega^\infty f(p^m)) \circ PH_*(j_{p^m}) : R_*\tilde{H}_*(Z_1) \to R_*\tilde{H}_*(Z_2)$ est l'extension (cf. (1)) du morphisme supérieur du diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
R_m\tilde{H}_*(Z_1) \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[rr, bend left] & PH_*(QZ_2) \arrow[r, "\cong"'] \arrow[d, hook] & R_*\tilde{H}_*(Z_2) \\
H_*(D_{p^m}Z_1) \arrow[r, "H_*(\tilde{f}(p^m))"] & H_*(QZ_2).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Une conséquence directe de la Proposition 2.4, en utilisant l'identification de $R_{n+k} \dashrightarrow R_nR_k$ à l'aide du transfert (voir [Kuh13, Proposition 2.5]). □

Remarque 2.7.

(1) Pour $m = 0$, le morphisme est induit par

$$\tilde{H}_*(Z_1) \to R_*\tilde{H}_*(Z_2).$$

Même lorsque f est une application Ω^∞, ce morphisme n'est pas en général de la forme $\tilde{H}_*(Z_1) \to \tilde{H}_*(Z_2) \subset R_*\tilde{H}_*(Z_2)$. (Par exemple, considérer les morphismes d_k !)

(2) Dans le cas général, on se ramène au problème de l'identification des morphismes

$$R_m\tilde{H}_*(Z_1) \to R_*\tilde{H}_*(Z_2).$$

En général ceci est extrêmement difficile ; pour les espaces $L_1(k)$ la structure de $\mathscr{A}$-module fournit des restrictions fortes sur les morphismes possibles.

3. Rigidité algébrique

Rappelons les ingrédients algébriques principaux :

(1) [Kuh13, Lemma 3.1] :
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(L_{k+1}, L_k) = 0.$$

(2) [Kuh13, Lemmas 3.3 et 3.8] :
$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(L_{k+1}, R_1 L_k) &= \mathbb{F}_p \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_1 L_k, L_{k+1}) &= \mathbb{F}_p \end{aligned}$$

(3) [Kuh13, Theorem 6.2] :
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_m L_j, R_n L_k) = 0$$
if $m + j < n + k$.

On obtient directement :

Proposition 3.1. *Soit $f : QL_1(k) \to QL_1(k-1)$ un morphisme Ω^∞. Alors $PH_*(f) : R_* L_k \to R_* L_{k-1}$ est l'extension d'un morphisme $\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(L_k, R_1 L_{k-1})$, donc est déterminé par un élément de $\mathbb{F}_p$.*

Démonstration. Puisque f est un morphisme Ω^∞, $f(r)$ est trivial pour $r > 1$ (cf. Remarque 2.1) et Proposition 2.6 montre que $PH_*(f)$ est l'extension d'un morphisme $L_k \to R_* L_{k-1}$. Les résultats d'annulation que la seule contribution potentiellement non-triviale provient de $L_k \to R_1 L_{k-1}$. □

Remarque 3.2. Il n'est pas difficile de donner un critère pour que $PH_*(f)$ soit non-trivial (cf. les hypothèses de [Kuh13, Theorem 1.1]).

On peut également considérer une application continue $g : QL_1(k-1) \to QL_1(k)$ de la même manière. Par la Proposition 2.6, la composante $g(p^m)$ donnerait une contribution induite par un morphisme de $\mathscr{A}$-modules :
$$R_m L_{k-1} \to \bigoplus_{t \le m-1} R_t L_k.$$
Par exemple, pour $m = 0$ la contribution est triviale, et on obtient le résultat suivant :

Proposition 3.3. *Soit $g : QL_1(k-1) \to QL_1(k)$ une application continue.*

(1) Si g est une morphisme Ω^∞, alors $PH_*(g) = 0$.

(2) Si le morphisme induit par $g(p^m)$, $R_m L_{k-1} \to \bigoplus_{t \le m-1} R_t L_k$, est trivial $\forall m > 1$, alors $PH_*(g)$ est induit par un morphisme $\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(R_1 L_{k-1}, L_k)$, donc est déterminé par un élément de $\mathbb{F}_p$.

Remarque 3.4. Le point difficile est de montrer que les morphismes $R_m L_{k-1} \to \bigoplus_{t \le m-1} R_t L_k$ sont triviaux ($m > 1$). (Au fait, pour la démonstration, il suffirait de montrer que la composante $R_m L_{k-1} \to R_{m-1} L_k$ est trivial.)

Une fois ceci établi, on peut donner un critère élémentaire pour que $PH_*(g) \neq 0$.

Remarque 3.5. La composante $g(p^m)$ est un morphisme stable de la forme :
$$\Sigma^\infty D_m L_1(k-1) \to \Sigma^\infty L_1(k).$$
A priori, il n'y a aucune raison pour que ceci soit trivial (pour $m > 1$). Pour contourner ce problème l'idée de Kuhn est d'utiliser le calcul de Goodwillie-Weiss orthogonal pour montrer qu'un tel morphisme est trivial. (Voir la Proposition 4.5 ci-dessous.)

4. CALCUL DE GOODWILLIE-WEISS ORTHOGONAL

Soit $\mathscr{V}_{\mathbb{C}}$ la catégorie des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels muni d'une forme[2] et, pour morphismes, les isométries. Dans la version du calcul de Goodwillie-Weiss orthogonal utilisé ici, on considère des foncteurs

$$\mathscr{V}_{\mathbb{C}} \to \mathscr{SH}.$$

Il y a une notion de foncteur polynomial de degré $d \in \mathbb{N}$ et de foncteur polynomial *homogène*.

L'ingrédient essential (et boîte noire pour nous) est le suivant (sans citation dans le texte) :

Proposition 4.1. [Kuh13, Section 3.2] *Il n'existe aucune transformation naturelle non-triviale d'un foncteur homogène de degré d vers un foncteur polynomial de degré $< d$.*

Définition 4.2. Pour $V \in \mathrm{Ob}\mathscr{V}_{\mathbb{C}}$, soit $L_1(k, V) := e_k BE_k^{(\mathbb{R}\oplus V)\otimes_{\mathbb{R}}\rho_k}$, où l'idempotent de Steinberg e_k agit par l'action de $GL_k(\mathbb{F}_p)$ sur l'espace de Thom $BE_k^{(\mathbb{R}\oplus V)\otimes_{\mathbb{R}}\rho_k}$ (qui est une suspension).

Remarque 4.3. Pour $V = 0$ on a $L_1(k, 0) = L_1(k)$.

Lemme 4.4. *Le foncteur $V \mapsto \Sigma^\infty D_r L_1(k, V)$ est polynomial homogène de degré rp^k.*

On en déduit, en appliquant la Proposition 4.1, le résultat suivant :

Proposition 4.5. [Kuh13, Lemma 2.5] *Si $s_k : QL_1(k) \to QL_1(k+1)$ étend en une transformation naturelle*

$$s_{k,V} : QL_1(k, V) \to QL_1(k+1, V),$$

alors $s_k(r) \simeq *$ pour $r > p$.

5. LE THÉORÈME DE KUHN ET PRIDDY

L'ingrédient algébrique principal de la démonstration du [Kuh13, Theorem 1.1] semble être déjà dans [KP85].

Théorème 5.1. *Pour $j \in k, k+1$, soient*

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{j-1} & : & L_j \to R_1 L_{j-1} \\ \beta_{j-1} & : & R_1 L_{j-1} \to L_j \end{array}$$

morphismes $\mathscr{A}$-linéaires et non-triviaux et

$$\begin{array}{rcl} \alpha^R_{j-1} & : & R_* L_j \to R_* L_{j-1} \\ \beta^R_{j-1} & : & R_* L_{j-1} \to R_* L_j \end{array}$$

leurs extensions (cf. (1)).

Alors, le morphisme

$$\beta^R_{k-1}\alpha^R_{k-1} + \alpha^R_k \beta^R_k : R_* L_k \to R_* L_k$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Voir [Kuh13, Section 6.1]. □

2. Voir [ADL08] pour des définitions.

6. Conclusion

Le résultat principal, [Kuh13, Theorem 1.1] se déduit du théorème 5.1.

Démonstration du Théorème. A l'aide des Propositions 3.1, 4.5 et Proposition 4.1, on se ramène à la situation du théorème 5.1. Il ne reste que à vérifier que les morphismes $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ soient tous non-triviaux. Ceci se déduit facilement des hypothèses que

$$PH_*(d_j)$$
$$PH_*(s_j)$$

soient non-triviaux en degré $c(j+1)$. □

Pour en déduire la conjecture de Whitehead, il faut fournir les morphismes $\{d_k\}$, $\{s_k\}$.

(1) Les d_k ont déjà été introduits ; voir [Kuh13, Lemma 1.6] pour la vérification de la non-trivialité. (L'approche originale de Kuhn et Priddy [KP85] a utilisé le transfert pour construire ces morphismes - voir [Kuh13, Remark 1.8]).

(2) Une famille convenable $\{s_k\}$ est fournie par les travaux de Arone, Dwyer et Lesh [ADL08], dans leur étude de la tour de Goodwillie de l'identité. En considérant cette tour, on identifie les fibres :

$$\mathrm{hofib}\{P_{p^k}(V) \to P_{p^{k-1}}(V)\} \simeq \Omega^k QL_1(k, V).$$

Un des résultats principaux de Arone, Dwyer et Lesh est que les morphismes connectants de la tour

$$\Omega^k QL_1(k, V) \to \Omega^k QL_1(k+1, V)$$

peuvent être *délacés* k fois. Ainsi, on obtient

$$s_{k,V} : QL_1(k, V) \to QL_1(k+1, V).$$

Kuhn démontre (voir [Kuh13, Lemma 1.9]) que cette famille convient.

(3) Dans [Kuh13, Remark 1.12], Kuhn propose une deuxième famille (toujours fonctorielle). Ensuite il affirme dans [Kuh13, Remark 3.10] qu'on peut contourner l'utilisation de la Proposition 4.1 dans ce cas.

Références

[ADL08] Gregory Z. Arone, William G. Dwyer, and Kathryn Lesh, *Loop structures in Taylor towers*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), no. 1, 173–210. MR 2377281 (2008m :55025)

[KP85] Nicholas J. Kuhn and Stewart B. Priddy, *The transfer and Whitehead's conjecture*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **98** (1985), no. 3, 459–480. MR 803606 (87g :55030)

[Kuh13] N. J. Kuhn, *The Whitehead Conjecture, the Tower of S^1 Conjecture, and Hecke algebras of type A*, ArXiv e-prints (2013).