Introduction à la théorie des représentations génériques

notes préparatoires à un mini-cours destiné aux doctorants représentationistes de l'université de Paderborn (Allemagne)

Aurélien DJAMENT

Mars 2007 (révision en avril 2007)

Table des matières

I Introduction et motivations **2**

1 Représentations des monoïdes finis, propriétés globales des représentations de familles de groupes finis et catégories de foncteurs **2**

2 Aperçu de quelques résultats fondamentaux **3**

3 Liens avec la topologie algébrique **4**

II Propriétés formelles des catégories de foncteurs **5**

4 Premières propriétés **5**

5 Foncteurs projectifs et injectifs standard **6**

6 Théorème de Morita-Freyd **9**

7 Adjonctions **9**

III Diagrammes de recollement, foncteurs simples et foncteurs polynomiaux **10**

8 Rappels sur les catégories abéliennes quotients et les diagrammes de recollement **11**

9 Première situation de recollement **12**

10 Deuxième situation de recollement : idempotents des monoïdes **14**

11 Troisième situation de recollement : foncteurs polynomiaux **15**

12 Comparaison des différentes situations **17**

IV Introduction aux méthodes de cohomologie fonctorielle 18

13 Arguments formels : adjonctions 18

14 Utilisation de foncteurs exponentiels 19

15 Exemples de calculs explicites 21

Première partie
Introduction et motivations

Dans son article [Mit72] sur les *anneaux à plusieurs objets*, B. Mitchell explique qu'il faut voir les catégories linéaires $\mathcal{A}$ (i.e. dont les ensembles de morphismes sont munis d'une structure naturelle de groupe abélien) comme une généralisation naturelle des anneaux, et considérer les foncteurs additifs (i.e. qui induisent des applications $\mathbb{Z}$-linéaires entre les ensembles de morphismes) de $\mathcal{A}$ vers la catégorie **Ab** des groupes abéliens comme des « modules » sur l'anneau à plusieurs objets $\mathcal{A}$.

Notre but consiste, dans cette optique, à étudier certaines catégories de foncteurs et leurs liens avec la théorie classique des représentations des groupes finis, en insistant sur les méthodes spécifiques à l'approche fonctorielle. Le terme de *représentations génériques* a été introduit par N. Kuhn dans ses trois articles [Kuh94a], [Kuh94b] et [Kuh95], où il s'intéresse surtout aux groupes linéaires et aux catégories de foncteurs entre espaces vectoriels (qui sera aussi le principal cas considéré dans cet exposé).

Précisément, notre cadre est le suivant. Soient k un corps commutatif et $\mathcal{C}$ une catégorie petite ou essentiellement petite, nous nous intéressons à la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C};k) = \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}_k)$ des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{E}_k$ des k-espaces vectoriels, notamment à ses objets simples et à ses propriétés homologiques. Nous supposerons souvent que les ensembles de morphismes de $\mathcal{C}$ sont *finis* (comme on n'impose aucune condition topologique, comme en théorie des représentations classiques, des pathologies adviennent sur des groupes non finis, ou ici sur des catégories ne vérifiant pas cette propriété). On considère tous les foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{E}_k$, mais on peut se ramener à la situation additive de Mitchell en linéarisant la catégorie $\mathcal{C}$.

L'un des cas les plus riches est celui de $\mathcal{F}(k) = \mathcal{F}(\mathcal{E}_k^f; k)$, où $\mathcal{E}_k^f$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}_k$ des espaces vectoriels de dimension finie, lorsque k est un corps *fini*.

1 Représentations des monoïdes finis, propriétés globales des représentations de familles de groupes finis et catégories de foncteurs

Un premier exemple fondamental est le suivant : supposons que $\mathcal{C}$ a un seul objet ; cette catégorie est alors déterminée par son monoïde d'endomorphismes M (on notera $\mathcal{C} = \underline{M}$), et $\mathcal{F}(\underline{M};k)$ s'identifie à la catégorie $k[M] - \mathbf{mod}$ des $k[M]$-modules à gauche, où $k[M]$ désigne l'algèbre de monoïde de M. Nous regarderons souvent cet exemple comme une brique élémentaire à laquelle on cherche à ramener le cas général, mais pour bien des situations de représentation des monoïdes, les méthodes fonctorielles possèdent un intérêt propre.

Exemple 1.1 (fondamental). Les k-représentations du monoïde de matrices $\mathcal{M}_n(k)$ se comprennent à partir des k-représentations des groupes linéaires $GL_i(k)$, pour $i \leq n$. Nous verrons (à la suite de Kuhn) qu'une manière efficace de le voir consiste à utiliser une catégorie de foncteurs auxiliaire équivalente à $k[\mathcal{M}_n(k)] - \mathbf{mod}$.

Même pour étudier certaines questions sur les représentations de *groupes* finis, les techniques fonctorielles ont montré leur efficacité. Supposons que l'on s'intéresse aux propriétés *globales* (ou *génériques*) de familles infinies de groupes, comme les groupes symétriques ou les groupes linéaires (sur un corps fini, disons). Il est souvent utile de disposer d'une catégorie unique qui permet d'exprimer de telles propriétés sur tous ces groupes, les catégories de foncteurs sont parfois très adaptées.

2 Aperçu de quelques résultats fondamentaux

Un premier exemple est la propriété de stabilisation suivante, établie dans [Dwy80].

On note que pour $F \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}(k)$, $F(k^n)$ est naturellement un $k[GL_n(k)]$-module ; les flèches évidentes $k^n \hookrightarrow k^{n+1}$ et $k^{n+1} \twoheadrightarrow k^n$ induisent des applications linéaires $F(k^n) \to F(k^{n+1})$ et $F(k^{n+1}) \to F(k^n)$ qui sont $GL_n(k)$-équivariantes. Les flèches de l'énoncé suivant en proviennent.

Théorème 2.1 (Dwyer, 1980)**.** *Supposons que F et G sont des objets polynomiaux*[1] *de $\mathcal{F}(k)$ (ce qui est le cas lorsque F et G sont de longueur finie, si k est fini). Alors pour tout entier i, le système*

$$\cdots \to \operatorname{Ext}^i_{k[GL_{n+1}(k)]}(F(k^{n+1}), G(k^{n+1})) \to \operatorname{Ext}^i_{k[GL_n(k)]}(F(k^n), G(k^n)) \to \cdots \tag{1}$$

stabilise.

Pour l'énoncé suivant, on note que la catégorie $\mathcal{F}(k)$ est abélienne et qu'on peut y faire de l'algèbre homologique (nous y reviendrons).

Théorème 2.2 (Betley, Suslin, 1999)**.** *Supposons que k est un corps fini et que F et G sont deux objets de longueur finie de $\mathcal{F}(k)$. Alors la limite du système (1) est naturellement isomorphe à $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{F}(k)}(F, G)$.*

Ce résultat remarquable à plusieurs égards mérite quelques commentaires.

Remarque 2.3.

1. Dans le théorème 2.1, les catégories de foncteurs n'interviennent pratiquement que pour formuler le résultat ; pour établir le théorème 2.2, Suslin (voir l'appendice de [FFSS99]) emploie de façon essentielle un argument d'annulation en cohomologie fonctorielle qui ne se ramène à aucun résultat analogue dans un contexte représentationiste classique.

   L'approche de Betley (voir [Bet99]), indépendante de celle de Suslin, utilise plutôt les foncteurs *polynomiaux stricts*, que nous évoquerons un peu plus tard.
2. Le théorème 2.2 a été popularisé sous la forme

   $$\text{THH (homologie de Hochschild topologique)} = K - \text{théorie stable.}$$

   En effet, la limite du système (1) peut s'interpréter comme un groupe de K-théorie stable de k, tandis que les groupes $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{F}(k)}(F, G)$ sont isomorphes à des groupes d'homologie de Hochschild topologique d'après un résultat de Pirashvili et Waldhausen (cf. [PW92]). Cette identification est restée plusieurs années conjecturale.
3. Scorichenko a étendu, dans sa thèse de doctorat, l'isomorphisme entre K-théorie stable et cohomologie fonctorielle donnée par le théorème 2.2 à un anneau quelconque.
4. Le théorème 2.1 présente un intérêt significatif pour les calculs de cohomologie stabilisée des groupes linéaires sur les corps finis (limite du système (1)), a priori extrêmement difficile d'accès. En effet, nous verrons que l'on dispose de nombreux outils pour mener des calculs de groupes d'extension dans $\mathcal{F}(k)$.

L'identification de la cohomologie fonctorielle à des théories cohomologiques variées apparaissant dans d'autres contextes ne se limite pas aux cas de la K-théorie stable et de THH déjà mentionnés.

L'un des premiers exemples historiquement est celui de la *cohomologie de Mac Lane*, une théorie cohomologique sur les anneaux introduite par Mac Lane dans les années 50 (cf. [ML57]) à partir de considérations topologiques. Cette théorie a été peu étudiée jusqu'à ce que Jibladze et Pirashvili

[1] Cette notion sera définie précisément dans la suite de cet exposé.

ne l'identifient en 1991 (cf. [JP91]) comme un avatar de la cohomologie fonctorielle, beaucoup plus facile à calculer.

Un autre cas important est fourni par les Γ-*modules*, i.e. les objets de la catégorie $\mathcal{F}(\mathbf{Ens}_*^f, k)$, où $\mathbf{Ens}_*^f$ est la catégorie des ensembles finis pointés. Les Γ-modules sont reliés à différentes théories cohomologiques classiques comme la cohomologie de Hochschild (cf. [PR02]) et la cohomologie d'André-Quillen (cf. [Pir03]).

Signalons maintenant l'intérêt fondamental des *foncteurs polynomiaux stricts* : ce sont les objets d'une catégorie de foncteurs $\mathcal{P}(k)$ assez analogue à $\mathcal{F}(k)$, mais qui se ramène *exactement* à la théorie des représentations, en ce sens qu'elle se scinde en la somme directe de catégories de modules sur des *algèbres de Schur*. Pour autant, nombre des méthodes de calcul cohomologique dans $\mathcal{P}(k)$ reposent sur des méthodes tout-à-fait similaires à celles de $\mathcal{F}(k)$, donc extérieures à la théorie ordinaire des représentations.

Ces foncteurs ont été introduits par Friedlander et Suslin dans l'article [FS97], qui identifie les groupes d'extensions dans $\mathcal{P}(k)$ à des groupes de *cohomologie rationnelle*[2] du schéma en groupes GL_n. Le résultat majeur de ce papier est que la cohomologie rationnelle $H^*(G,k)$ d'un schéma en groupes fini G à coefficients dans k est une k-algèbre de type fini, et que la cohomologie rationnelle de G à coefficients dans un G-module rationnel de dimension finie est une algèbre de type fini sur $H^*(G,k)$.

Nous espérons maintenant l'auditoire convaincu de l'intérêt de la cohomologie fonctorielle. Signalons quelques résultats fondamentaux obtenus en la matière. Le premier est établi dans [FLS94], où il est donné sous une forme plus précise (la structure multiplicative est déterminée).

Théorème 2.4 (Franjou, Lannes, Schwartz, 1994)**.** *Supposons que k est un corps fini et notons* I *le foncteur d'inclusion $\mathcal{E}_k^f \to \mathcal{E}_k$.*

L'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(k)}(\mathrm{I},\mathrm{I})$ *est de dimension* 1 *si i est un entier naturel pair et est nul pour i impair.*

Dans l'article [FFSS99], Franjou, Friedlander, Scorichenko et Suslin effectuent des calculs encore plus élaborés, donnant notamment une description complète des groupes d'extensions entre deux puissances extérieures et entre deux puissances symétriques. Nous ne donnons pas le résultat complet, qui s'énonce de manière assez technique (les objets calculés sont décrits comme algèbres de Hopf tri-graduées), et nous contenterons d'énoncer un cas beaucoup plus élémentaire, obtenu un peu plus tôt dans [Fra96], que nous démontrerons à la fin de ce mini-cours.

Théorème 2.5 (Franjou, 1996)**.** *Les groupes d'extensions* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}$ *entre deux puissances extérieures sont donnés par* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^i,\Lambda^j) \simeq \mathbb{F}_2$ *si $|i-j| = 1$ et $i,j > 0$ et sont nuls sinon.*

Mentionnons pour terminer que l'article [FFSS99] établit des liens cohomologiques précis entre $\mathcal{F}(k)$ et $\mathcal{P}(k)$, et donne des résultats à la fois en termes de foncteurs usuels et de foncteurs strictement polynomiaux. Nous parlerons des méthodes utilisées pour effectuer ces calculs dans la dernière partie de cet exposé.

3 Liens avec la topologie algébrique

La motivation initiale à l'étude systématique de la catégorie $\mathcal{F}(k)$ remonte aux travaux de Henn, Lannes et Schwartz du début des années 1990 (cf. [HLS93]) qui ont établi un lien fondamental entre $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$ (où p est un nombre premier) et la catégorie des *modules instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p*. Sans détailler ces résultats, rappelons que la cohomologie modulo p d'un espace topologique est naturellement un module (et même une algèbre) gradué sur l'algèbre de Steenrod modulo p, notée $\mathcal{A}_p$, qui possède une propriété additionnelle nommée *instabilité*. Les travaux de Lannes (cf. [Lan92]) ont montré que l'étude algébrique de la catégorie $\mathcal{U}_p$ des modules instables sur $\mathcal{A}_p$ possède des applications topologiques profondes.

[2] La définition de ce terme dépasse le cadre de cet exposé.

L'aspect purement algébrique des résultats de Henn, Lannes et Schwartz a été retravaillé par Kuhn, qui a montré dans [Kuh94a] comment construire l'algèbre de Steenrod et la catégorie $\mathcal{U}_p$ en partant simplement de $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$; Powell a généralisé ces considérations dans [Pow05]. Enfin, récemment Powell a calculé l'anneau d'endomorphismes de la cohomologie des espaces d'Eilenberg-Mac Lane associés aux groupes $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ dans la catégorie $\mathcal{U}_2$. Il a utilisé pour cela le travail de [HLS93] et des calculs fins dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)$.

Deuxième partie

Propriétés formelles des catégories de foncteurs

Dans cette partie, on donne quelques propriétés générales des catégories de foncteurs du type $\mathcal{F}(\mathcal{C}, k)$ qui se déduisent de résultats généraux de théorie des catégories. On pourra se reporter à [ML71], [Bor94], [Gro57], [Gab62] ou [Pop73].

Convention 3.1. Dans toute la suite de cet exposé, on se fixe une catégorie (essentiellement) petite $\mathcal{C}$.

L'hypothèse de petitesse permet d'assurer que les classes de morphismes dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ sont des ensembles (nous ferons cette hypothèse sur toutes les catégories).

4 Premières propriétés

Les résultats élémentaires qui suivent peuvent se trouver dans [ML71].

Proposition 4.1. *Soit $\mathcal{D}$ une catégorie. Si $\mathcal{D}$ possède des sommes, produits, limites ou colimites respectivement, alors il en est de même pour $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ et celles-ci se calculent au but : dans le cas des produits, par exemple, on a*

$$\Big(\prod_{i \in I} F_i\Big)(E) = \prod_{i \in I} F_i(E)$$

pour tout $E \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$.

On rappelle qu'une catégorie additive est une catégorie avec sommes et produits finis qui coïncident [3].

Corollaire 4.2. *Si $\mathcal{A}$ est une catégorie additive, alors $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est une catégorie additive.*

Proposition 4.3. *Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, alors $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est une catégorie abélienne ; de plus, l'exactitude se teste au but : une suite de foncteurs $F \to G \to H$ est exacte si et seulement si la suite $F(E) \to G(E) \to H(E)$ est exacte pour tout $E \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$.*

Corollaire 4.4. *La catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ est une catégorie abélienne possédant des limites et des colimites ; de plus, les colimites filtrantes y sont exactes.*

Autre structure sur $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ se calculant au but : le produit tensoriel, encore noté $\otimes$. Comme celui de $\mathcal{E}_k$, il définit une structure monoïdale symétrique sur $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$; ce bifoncteur est exact en chaque variable.

Notation 4.5. – Pour tout foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, nous noterons $F_* : \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \to \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ le foncteur de postcomposition par F, donné sur les objets par $F_*(G) = F \circ G$.

[3] Il faut également supposer l'existence d'un opposé aux morphismes identités pour assurer que les ensembles de morphismes sont naturellement non seulement des *monoïdes*, mais aussi des *groupes* abéliens — cf. [ML71].

– Pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, avec $\mathcal{D}$ (essentiellement) petite, et toute catégorie $\mathcal{A}$, nous noterons $F^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{A}) \to \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ le foncteur de précomposition par F, donné sur les objets par $F^*(G) = G \circ F$.

Remarque 4.6.

1. Intuitivement, le foncteur de postcomposition par F hérite des propriétés de régularité de F, mais pas plus. Si F est exact, par exemple, alors F_* est exact.
2. En revanche, les foncteurs de précomposition sont toujours très réguliers : la proposition 4.1 montre qu'ils commutent toujours aux limites et aux colimites, et la proposition 4.3 qu'ils sont exacts (si le but est abélien). Dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$, ils commutent également au produit tensoriel.

Proposition 4.7.

1. *Si le foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est adjoint à gauche à $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, alors $F_* : \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \to \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ est adjoint à gauche à G_*.*
2. *Si le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est adjoint à gauche à $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, alors $F^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{A}) \to \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est adjoint à droite à G^*.*

Définition 4.8 (Dualité entre $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}; k)$)**.** On note $D_{\mathcal{C},k}$ (ou D s'il n'y a pas d'ambiguïté) le foncteur $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)^{op} \to \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}; k)$ composé de l'identification canonique $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)^{op} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Fct}(\mathcal{C}^{op}, (\mathcal{E}_k)^{op})$ et du foncteur de postcomposition par le foncteur de dualité $d_k : (\mathcal{E}_k)^{op} \to \mathcal{E}_k \quad V \mapsto V^* = \hom_k(V, k)$.

Comme d_k est adjoint à droite à $d_k^{op} : \mathcal{E}_k \to \mathcal{E}_k^{op}$, la proposition 4.7 montre que $D_{\mathcal{C},k}$ est adjoint à droite à $\mathcal{D}^{op}_{\mathcal{C}^{op},k}$. L'exactitude de d_k entraîne celle de $D_{\mathcal{C},k}$.

Dans la catégorie $\mathcal{F}(k)$, on dispose d'un foncteur d'*auto-dualité*, car le foncteur d_k induit une équivalence de catégories $(\mathcal{E}_k^f)^{op} \to \mathcal{E}_k^f$ qui permet d'identifier $\mathcal{F}(k)$ à $\mathbf{Fct}((\mathcal{E}_k^f)^{op}, \mathcal{E}_k)$. On obtient ainsi un foncteur $D_k : \mathcal{F}(k)^{op} \to \mathcal{F}(k)$ tel que $D_k(F)(V) = F(V^*)^*$.

Exemple 4.9.

1. Soit $T^n \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{F}(k)$ le foncteur n-ième puissance tensorielle : $T^n(V) = V^{\otimes n}$. Alors T^n est auto-dual : $D(T^n) \simeq T^n$ (en fait la condition d'auto-dualité est une condition un peu plus forte — cf. [PS98] — mais cette subtilité sera sans incidence pour nous).
2. Soit S^n le foncteur n-ième puissance symétrique et $\Gamma^n(V)$ le foncteur n-ième puissance divisée : S^n (resp. Γ^n) s'obtient en prenant le quotient (resp. les invariants) de T^n par l'action naturelle du groupe symétrique Σ_n par permutation des facteurs. Alors S^n et Γ^n sont duaux : $D(S^n) \simeq \Gamma^n$ et $D(\Gamma^n) \simeq S^n$.
3. Soit Λ^n le foncteur n-ième puissance extérieure. Ce foncteur est auto-dual : $D(\Lambda^n) \simeq \Lambda^n$.

Exemple 4.10. On dispose dans $\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)$ d'une suite exacte non scindée

$$0 \to S^1 \to S^2 \to \Lambda^2 \to 0$$

dont la première flèche est le morphisme de Frobenius et la seconde la projection canonique.

5 Foncteurs projectifs et injectifs standard

Pour $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ on définit un objet $P_C^{\mathcal{C}}$ (noté simplement P_C si l'on est dans $\mathcal{F}(k)$) de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ comme le foncteur composé

$$P_C^{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \xrightarrow{\hom_{\mathcal{C}}(C,-)} \mathbf{Ens} \xrightarrow{k[-]} \mathcal{E}_k.$$

Ici $k[-]$ désigne le foncteur de *k-linéarisation* : $k[E] = k^{\oplus E}$; ce foncteur est adjoint à gauche au foncteur d'oubli $\mathcal{E}_k \to \mathbf{Ens}$. On notera également $[e]$, si e est un élément d'un ensemble E, l'élément de la base canonique de $k[E]$ correspondant à e.

Proposition 5.1 (Lemme de Yoneda)**.**

– ensembliste *: il existe une bijection naturelle*

$$\hom_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathbf{Ens})}(\hom_{\mathcal{C}}(C, -), F) \simeq F(C)$$

pour tous $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ et $F \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens})$.

– k-linéaire *: il existe une bijection naturelle*

$$\hom_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(P_C^{\mathcal{C}}, F) \simeq F(C)$$

pour tous $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ *et* $F \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$.

Démonstration. Pour le cas ensembliste classique, on rappelle simplement comment s'obtient la bijection :

$$\hom_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathbf{Ens})}(\hom_{\mathcal{C}}(C,-), F) \to F(C) \qquad u \mapsto u_C(id_C)$$

dans un sens et

$$F(C) \to \hom_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathbf{Ens})}(\hom_{\mathcal{C}}(C,-), F) \qquad c \mapsto (f \in \hom_{\mathcal{C}}(C,D) \mapsto F(f)(c) \in F(D))_{D \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$$

dans l'autre.

Le cas k-linéaire s'en déduit par un argument d'adjonction : comme $k[-]$ est adjoint à gauche à l'oubli $O : \mathbf{Ens} \to \mathcal{E}_k$, la postcomposition $k[-]_* : \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens}) \to \mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ est adjointe à gauche à la postcomposition O_*. Ainsi, on a des isomorphismes naturels

$$\hom_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(P_C^{\mathcal{C}}, F) = \hom_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(k[-]_*(\hom_{\mathcal{C}}(C,-)), F) \simeq \hom_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathbf{Ens})}(\hom_{\mathcal{C}}(C,-), O_*(F))$$
$$\simeq O_*(F)(C) = F(C).$$

□

Cette proposition et son corollaire suivant constituent l'outil de base le plus important dans l'étude de la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$.

Corollaire 5.2. *1. Pour tout* $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$*, le foncteur* $P_C^{\mathcal{C}}$ *est un objet projectif de* $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$.

2. *Lorsque C parcourt un squelette* $\operatorname{Sql}(\mathcal{C})$ *de* $\mathcal{C}$*, les* $P_C^{\mathcal{C}}$ *décrivent un ensemble de générateurs de la catégorie* $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ *; plus précisément, pour tout* $F \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$*, le morphisme tautologique*

$$\bigoplus_{\substack{C \in \operatorname{Sql}(\mathcal{C}) \\ c \in F(C)}} P_C^{\mathcal{C}} \to F$$

(dont la composante $P_C^{\mathcal{C}} \to F$ *indexée par* $c \in F(C)$ *est le morphisme correspondant à c par l'isomorphisme de Yoneda) est surjectif.*

3. *La catégorie* $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ *est une* catégorie de Grothendieck*, i.e. une catégorie abélienne avec colimites exactes et un générateur.*

On rappelle qu'un ensemble E d'objets projectifs d'une catégorie abélienne avec sommes $\mathcal{A}$ est générateur s'il existe un épimorphisme d'une somme directe convenable d'objets de E sur tout objet de $\mathcal{A}$.

Les foncteurs $P_C^{\mathcal{C}}$ sont appelés foncteurs *projectifs standard* de $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$.

Exemple 5.3 (Produit tensoriel de foncteurs projectifs standard). Supposons que la catégorie $\mathcal{C}$ possède des coproduits finis. On a alors un isomorphisme canonique $P^{\mathcal{C}}_{C \coprod D} \simeq P_C^{\mathcal{C}} \otimes P_D^{\mathcal{C}}$ (cela vaut en particulier dans $\mathcal{F}(k)$). On en déduit facilement que le produit tensoriel de deux objets projectifs de $\mathcal{F}(\mathcal{C}, k)$ est alors encore projectif. Ce n'est en général pas le cas lorsque $\mathcal{C}$ ne possède pas de coproduits finis (exercice).

Corollaire 5.4. *Soient C et D deux objets de $\mathcal{C}$.*

1. *Le k-espace vectoriel* $\hom_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(P_C^{\mathcal{C}}, P_D^{\mathcal{C}})$ *est naturellement isomorphe à* $k[\hom_{\mathcal{C}}(D, C)]$.
2. *La k-algèbre* $\operatorname{End}_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(P_C^{\mathcal{C}})$ *est naturellement isomorphe à l'algèbre opposée à la k-algèbre* $k[\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(C)]$ *du monoïde* $\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(C)$.

La dernière assertion montre que le problème de décomposer $P_C^{\mathcal{C}}$ en somme directe de foncteurs projectifs indécomposables revient à celui de décomposer l'algèbre $k[\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C)]$ en somme directe de $k[\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C)]$-modules projectifs indécomposables. *C'est donc purement un problème de k-représentations du monoïde* $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C)$. Lorsque ce monoïde est fini (en particulier, si l'on suppose que les ensembles de morphismes dans $\mathcal{C}$ sont finis), le problème a une solution : $P_C^{\mathcal{C}}$ se décompose en somme directe finie de foncteurs projectifs indécomposables, qui sont de plus uniques à isomorphisme et à l'ordre des facteurs près.

Un exemple de présentation projective explicite dans $\mathcal{F}(k)$. On considère le foncteur $\mathrm{I}(\simeq \Lambda^1 \simeq T^1...)$ de l'introduction. La suite

$$k^\times \otimes P_{k^2} \xrightarrow{g} P_k \xrightarrow{f} \mathrm{I} \to 0$$

où f correspond à l'élément 1 de $k = \mathrm{I}(k) \simeq \hom_{\mathcal{F}(k)}(P_k, \mathrm{I})$ et g à l'élément $\lambda \mapsto [(\lambda,1)] - \lambda[(1,0)] - [(0,1)]$ de $k[k^2]^{k^\times} \simeq \hom_{\mathcal{F}(k)}(k^\times \otimes P_{k^2}, P_k)$ est exacte.

Explicitement, on a $f([v]) = v$ et $g([v,w]) = [\lambda v + w] - \lambda[v] - [w]$ pour $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_k^f$ et $v, w \in V$.

Si le corps k est premier, on dispose d'une présentation projective

$$P_{k^2} \to P_k \xrightarrow{f} \mathrm{I} \to 0$$

(il suffit de ne conserver que le cas $\lambda = 1$ dans ce qui précède).

Les foncteurs injectifs standard de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$. C'est la situation duale de la précédente : pour $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{op}$, on pose

$$I_C^{\mathcal{C}} = D_{\mathcal{C}^{op},k}(P_C^{\mathcal{C}^{op}}).$$

Dans $\mathcal{F}(k)$, on note simplement I_V ces foncteurs.

Explicitement, on a

$$I_C^{\mathcal{C}}(A) = k^{\hom_{\mathcal{C}}(A,C)}$$

car le dual de l'espace vectoriel $k[E]$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel k^E des fonctions de E dans k.

Exemple 5.5. Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède des produits finis et que ses ensembles de morphismes sont finis, on a $I_{C\times D}^{\mathcal{C}} \simeq I_C^{\mathcal{C}} \otimes I_D^{\mathcal{C}}$. C'est notamment le cas dans $\mathcal{F}(k)$ si le corps k est fini.

Par adjonction, on a des isomorphismes naturels

$$\hom_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(F, I_C^{\mathcal{C}}) \simeq \hom_{\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op};k)}(P_C^{\mathcal{C}^{op}}, D(F)) \simeq D(F)(C) = F(C)^*.$$

On en déduit :

Proposition 5.6. *1. Les foncteurs $I_C^{\mathcal{C}}$ sont des objets injectifs de $\mathcal{F}(C; k)$. On les appelle* injectifs standard *de $\mathcal{F}(C; k)$.*

2. Ils constituent une famille de cogénérateurs de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ lorsque C décrit un squelette de $\mathcal{C}$.

Exemple 5.7 (fondamental). Considérons le morphisme $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S^n \to I_k$ de $\mathcal{F}(k)$ dont la composante $S^n \to I_k$ correspond à $1 \in k \simeq S^n(k)^* \simeq \hom_{\mathcal{F}(k)}(S^n, I_k)$. Sur un espace vectoriel V, il est donné par la fonction $S^*(V) \to k^{V^*}$ qui à un élément de $S^*(V)$, qui s'identifie canoniquement à un polynôme sur V^*, associe l'application polynomiale $V^* \to k$ qu'il induit (c'est donc un morphisme de k-algèbres). Ainsi, ce morphisme est injectif si k est infini et surjectif si k est fini. Nous reviendrons ultérieurement sur cet exemple.

6 Théorème de Morita-Freyd

Théorème 6.1. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne k-linéaire (i.e. dont les ensembles de morphismes sont munis d'une structure de k-espace vectoriel naturelle) possédant des sommes directes quelconques et $\mathcal{P}$ un ensemble de générateurs projectifs* petits *de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire tels que les foncteurs* $\hom_{\mathcal{A}}(P,-)$ *commutent aux sommes directes (arbitraires).*

Alors $\mathcal{A}$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ des foncteurs k-linéaires (i.e. induisant des fonctions k-linéaires entre les ensembles de morphismes) de $\mathcal{P}^{op}$ (où l'on voit $\mathcal{P}$ comme une sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$) vers $\mathcal{E}_k$.

Esquisse de démonstration. On définit un foncteur $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ en associant à un objet A la restriction du foncteur $\hom_{\mathcal{A}}(-,A)$. Le lemme de Yoneda et le fait que $\mathcal{P}$ est un ensemble de générateurs de $\mathcal{A}$ impliquent que α est un foncteur pleinement fidèle.

L'hypothèse que les éléments de $\mathcal{P}$ sont projectifs et petits implique que le foncteur α commute aux colimites. Pour vérifier que α est essentiellement surjectif, il suffit donc de démontrer (puisqu'on sait déjà qu'il est pleinement fidèle), qu'il atteint un ensemble de générateurs de la catégorie but $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$. Pour cela, on constate que les éléments de $\mathcal{P}$ s'envoient par α sur les générateurs projectifs standard de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ déduits du lemme de Yoneda. □

Remarque 6.2.
- Le théorème classique de Morita s'obtient lorsque $\mathcal{A}$ est une catégorie de modules et que $\mathcal{P}$ a un élément. La version précédente est due à Freyd.
- Si l'on prend pour $\mathcal{A}$ la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C},k)$ et pour $\mathcal{P}$ l'ensemble des générateurs projectifs standard de $\mathcal{C}$ (se restreindre à un squelette), qui sont bien petits, le corollaire 5.4 montre que les foncteurs k-linéaires de $\mathcal{P}^{op}$ vers $\mathcal{E}_k$ s'identifient aux foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{E}_k$.
- Si $\mathcal{P}$ a un seul élément P, alors la catégorie $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ est équivalente à la catégorie des $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P)$-modules à droite.
- Lorsque $\mathcal{P}$ est fini, on peut se ramener au cas à un seul élément en considérant la somme directe de ses éléments. Par conséquent, on voit en considérant les générateurs projectifs standard que $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ est équivalente à une catégorie de modules lorsque $\mathcal{C}$ a un squelette fini.

Exemple 6.3 (fondamental). Considérons la catégorie « tronquée » $\mathcal{E}_k^{\leq n}$ des k-espaces vectoriels de dimension au plus n. La catégorie de foncteurs $\mathcal{F}(\mathcal{E}_k^{\leq n};k)$ est engendrée par le foncteur projectif $P_{k^n}^{\mathcal{E}_k^{\leq n}}$ — en effet, pour V de dimension au plus n, V est facteur direct de k^n, donc $P_V^{\mathcal{E}_k^{\leq n}}$ est facteur direct de $P_{k^n}^{\mathcal{E}_k^{\leq n}}$. Comme l'anneau d'endomorphismes de $P_{k^n}^{\mathcal{E}_k^{\leq n}}$ est isomorphe à l'anneau opposé à $k[\mathcal{M}_n(k)]$, on déduit du théorème de Freyd-Morita que $\mathcal{F}(\mathcal{E}_k^{\leq n};k)$ est équivalente à $k[\mathcal{M}_n(k)]-\mathbf{mod}$.

7 Adjonctions

Le résultat suivant est un corollaire du théorème des foncteurs adjoints de Freyd.

Théorème 7.1. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck et $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque. Tout foncteur $\mathcal{A} \to \mathcal{C}$ qui commute aux limites (resp. aux colimites) possède un adjoint à gauche (resp. à droite).*

Dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$, on en déduit l'utile corollaire suivant.

Corollaire 7.2.
1. *Pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (où $\mathcal{D}$ est essentiellement petite), le foncteur de précomposition $F^* : \mathcal{F}(\mathcal{D};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ possède un adjoint à droite et un adjoint à gauche.*
2. *Soit A un objet de $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$. L'endofoncteur $-\otimes A$ de $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ possède un adjoint à droite. Si A prend des valeurs de dimension finie, il possède également un adjoint à gauche.*

Nous allons maintenant nous intéresser à des cas (duaux) où un foncteur de précomposition et foncteur produit tensoriel sont adjoints.

Proposition 7.3. *Soient F un endofoncteur de $\mathcal{C}$ et T un objet de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathbf{Ens})$ tels qu'il existe une bijection*

$$\hom_{\mathcal{C}}(F(V),W)\simeq\hom_{\mathcal{C}}(V,W)\times T(W)$$

naturelle en les objets V et W de $\mathcal{C}$.

Alors l'endofoncteur F^* de $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ est adjoint à droite à $-\otimes k[T]$.

Démonstration. L'hypothèse fournit, en linéarisant, un isomorphisme naturel

$$P_V^{\mathcal{C}}\otimes k[T]\simeq P_{F(V)}^{\mathcal{C}}.$$

Soit G l'adjoint à droite à $-\otimes k[T]$. Pour tous $V\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}$, A, $B\in\operatorname{Ob}\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$, on a des isomorphismes naturels

$$G(A)(V)\simeq\hom_{\mathcal{F}(C;k)}(P_V^{\mathcal{C}},G(A))\simeq\hom_{\mathcal{F}(C;k)}(P_V^{\mathcal{C}}\otimes k[T],A)$$

$$\simeq\hom_{\mathcal{F}(C;k)}(P_{F(V)}^{\mathcal{C}},A)\simeq A(F(V))=F^*(A)(V),$$

d'où la conclusion. □

Un cas particulier fondamental de cette proposition est celui où l'on suppose que $\mathcal{C}$ admet des coproduits finis : les foncteurs $F=-\coprod C$ et $T=\hom_{\mathcal{C}}(C,-)$ conviennent alors pour tout $C\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

La proposition suivante est la variante duale de la proposition 7.3 ; elle se démontre de façon analogue.

Proposition 7.4. *Soient F un endofoncteur de $\mathcal{C}$ et T un objet de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}^{op},\mathbf{Ens}^f)$ (où $\mathbf{Ens}^f$ désigne la catégorie des ensembles finis) tels qu'il existe une bijection*

$$\hom_{\mathcal{C}}(V,F(W))\simeq\hom_{\mathcal{C}}(V,W)\times T(V)$$

naturelle en les objets V et W de $\mathcal{C}$.

Alors le foncteur F^* est adjoint à gauche à $-\otimes k^T$.

Un cas fondamental est celui où $\mathcal{C}$ admet des produits finis et a des ensembles de morphismes finis : les foncteurs $F=-\times C$ et $T=\hom_{\mathcal{C}}(-,C)$ conviennent alors.

Foncteurs de décalage. Supposons que $\mathcal{C}$ est une catégorie *additive* et que ses ensembles de morphismes sont finis (c'est notamment le cas de $\mathcal{E}_k^f$ si k est un corps *fini*). Définissons, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, le *foncteur de décalage* $\Delta_A^{\mathcal{C}}$ (ou simplement Δ_A) comme la précomposition par $-\oplus A$. Les propositions précédentes montrent que $\Delta_A^{\mathcal{C}}$ est adjoint à droite à $-\otimes P_A^{\mathcal{C}}$ et à gauche à $-\otimes I_A^{\mathcal{C}}$.

Foncteur différence. Dans la situation précédente, l'association $A\mapsto\Delta_A^{\mathcal{C}}$ est fonctorielle. Comme la composée $0\to A\to 0$ est l'identité, on en déduit une composition $id\simeq\Delta\to\Delta_A\to id$ égale à l'identité, soit un scindement $\Delta_A^{\mathcal{C}}\simeq id\oplus\bar{\Delta}_A^{\mathcal{C}}$. Le foncteur $\bar{\Delta}_A^{\mathcal{C}}$ est adjoint à droite à $-\otimes\bar{P}_A^{\mathcal{C}}$ et à gauche à $-\otimes\bar{I}_A^{\mathcal{C}}$, où $\bar{P}_A^{\mathcal{C}}$ et $\bar{I}_A^{\mathcal{C}}$ sont définis par les scindements $P_A^{\mathcal{C}}\simeq k\oplus\bar{P}_A^{\mathcal{C}}$ et $I_A^{\mathcal{C}}\simeq k\oplus\bar{I}_A^{\mathcal{C}}$.

Dans $\mathcal{F}(k)$, le foncteur $\bar{\Delta}_k$ est noté simplement Δ et est appelé *foncteur différence* ; c'est l'un des principaux outils pour étudier cette catégorie.

Troisième partie

Diagrammes de recollement, foncteurs simples et foncteurs polynomiaux

Le but de cette partie consiste à décrire quelques méthodes pour classifier les objets simples des catégories de foncteurs $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ et de les appliquer notamment à $\mathcal{F}(k)$.

8 Rappels sur les catégories abéliennes quotients et les diagrammes de recollement

Dans cette section, $\mathcal{A}$ désigne une catégorie abélienne.

Définition 8.1. Une *sous-catégorie épaisse* de $\mathcal{A}$ est une sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ qui contient 0 et telle que pour toute suite exacte $0 \to B \to A \to C \to 0$ de $\mathcal{A}$, A appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si B et C appartiennent à $\mathcal{C}$.

On constate que si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un foncteur *exact* de $\mathcal{A}$ dans une autre catégorie abélienne, alors le noyau de F (i.e. la sous-catégorie pleine des objets de $\mathcal{A}$ envoyés sur 0 par F) est épaisse. La réciproque est donnée par la notion de catégorie quotient : si $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{A}$ (à supposer *localement petite*, i.e. telle que les sous-objets d'un objet forment un ensemble — c'est le cas d'une catégorie de Grothendieck, par exemple), la catégorie $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ a les mêmes objets que $\mathcal{A}$ et ses morphismes sont donnés par

$$\hom_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(X,Y) = \operatorname*{colim}_{\substack{X' \subset X, X/X' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \\ Y' \subset Y, Y' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}} \hom_{\mathcal{A}}(X', Y/Y').$$

La composition des morphismes de $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ est induite par celle de $\mathcal{A}$ en un sens convenable, de sorte qu'il existe un foncteur $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$, appelé *foncteur canonique*, égal à l'identité sur les objets et à l'application canonique sur les morphismes.

On montre que $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne, que le foncteur canonique est exact et a pour noyau $\mathcal{C}$; de plus, tout foncteur exact de $\mathcal{A}$ vers une autre catégorie abélienne dont le noyau contient $\mathcal{C}$ se factorise de manière unique en un foncteur exact de source $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ par le foncteur canonique.

Définition 8.2 (Recollements)**.** Un *diagramme de recollement* est un diagramme du type

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "i" description] & \mathcal{A} \arrow[l, bend right, "q"'] \arrow[l, bend left, "p"] \arrow[r, "e" description] & \mathcal{B} \arrow[l, bend right, "l"'] \arrow[l, bend left, "r"] \end{tikzcd}$$

dans lequel :
- $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des catégories abéliennes.
- Le foncteur l est adjoint à gauche à e et e est adjoint à gauche à r (en particulier, e est exact).
- L'unité $id_{\mathcal{B}} \to el$ et la coünité $er \to id_{\mathcal{B}}$ sont des isomorphismes.
- Le foncteur q est adjoint à gauche à i et i est adjoint à gauche à p (en particulier, i est exact).
- L'unité $id_{\mathcal{C}} \to pi$ et la coünité $qi \to id_{\mathcal{C}}$ sont des isomorphismes.
- Le foncteur i est un plongement pleinement fidèle d'image $ker\, e$ (en particulier, i identifie $\mathcal{C}$ à une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{A}$).

On vérifie aisément que dans cette situation, le foncteur e induit une équivalence $\mathcal{A}/\mathcal{C} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{B}$.

La notion de recollement a été introduite par les géomètres algébristes dans le contexte plus général des catégories triangulées.

Dans la suite de cette section, nous supposons donné un diagramme de recollement comme dans la définition précédente et allons donner la description des objets *simples* (i.e. non nuls et sans sous-objet non trivial) de $\mathcal{A}$ à partir de ceux de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{C}$.

Définition 8.3. On appelle *prolongement* d'un objet X de $\mathcal{B}$ la donnée d'un objet A de $\mathcal{A}$ et d'un isomorphisme $e(A) \xrightarrow{\simeq} X$.

L'isomorphisme sera souvent omis lorsqu'il est évident.

Exemple 8.4. Les objets $l(X)$ et $r(X)$ sont des prolongements de X.

Proposition et définition 8.5 (Prolongement intermédiaire)**.** *Soit X un objet de $\mathcal{B}$; notons $\gamma_X : l(X) \to r(X)$ le morphisme adjoint à l'inverse de la coünité $er(X) \xrightarrow{\simeq} X$ et $c(X)$ l'image de γ_X. Noter que l'on a ainsi défini un foncteur $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$.*

1. *Le morphisme $ec(X) \to er(X) \simeq X$, dont la première flèche est induite par l'inclusion $c(X) \to r(X)$, fait de $c(X)$ un prolongement naturel de X. On l'appelle* prolongement intermédiaire *de X.*
2. *Le prolongement intermédiaire d'un objet simple de $\mathcal{B}$ est un objet simple de $\mathcal{A}$.*
3. *L'image par le foncteur i d'un objet simple de $\mathcal{C}$ est un objet simple de $\mathcal{A}$.*
4. *Les deux points précédents définissent une bijection*

$$\big(\{\textit{objets simples de } \mathcal{B}\}/\simeq\big) \coprod \big(\{\textit{objets simples de } \mathcal{C}\}/\simeq\big) \simeq \big(\{\textit{objets simples de } \mathcal{A}\}/\simeq\big).$$

9 Première situation de recollement

Proposition 9.1. *Soit $i : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un foncteur pleinement fidèle. Notons G et H les foncteurs $\mathcal{F}(\mathcal{D};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ adjoints respectivement à gauche et à droite au foncteur de restriction $i^* : \mathcal{F}(\mathcal{C};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{D};k)$.*

1. *L'unité $id \to i^*G$ de la première adjonction et la coünité $i^*H \to id$ de la seconde sont des isomorphismes.*
2. *Le foncteur i^* est essentiellement surjectif.*
3. *Le foncteur i^* transforme un objet simple de $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ en un objet nul ou simple de $\mathcal{F}(\mathcal{D};k)$.*

Démonstration. Pour tout objet E de $\mathcal{D}$, on a des isomorphismes

$$\hom_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(G(P^{\mathcal{D}}_E), X) \simeq \hom_{\mathcal{F}(\mathcal{D};k)}(P^{\mathcal{D}}_E, i^*X)$$
$$\simeq (i^*X)(E) = X(i(E)) \simeq \hom_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(P^{\mathcal{C}}_{i(E)}, X)$$

naturels en l'objet X de $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$, d'où par le lemme de Yoneda $G(P^{\mathcal{D}}_E) \simeq P^{\mathcal{C}}_{i(E)}$. La pleine fidélité de i fournit d'autre part un isomorphisme canonique $i^*P^{\mathcal{C}}_{i(E)} \simeq P^{\mathcal{D}}_E$, ce qui montre que l'unité $X \to i^*G(X)$ est un isomorphisme lorsque X est un projectif standard de $\mathcal{F}(\mathcal{D};k)$. Comme les foncteurs i^* et G commutent à toutes les colimites et que les projectifs standard engendrent $\mathcal{F}(\mathcal{D};k)$, on en déduit la première assertion (utiliser une présentation de X par des sommes directes de projectifs standard et le lemme des cinq).

L'assertion relative à l'adjoint à droite H se montre de façon analogue en utilisant les cogénérateurs injectifs standard.

Comme i^* a un inverse à gauche, il est essentiellement surjectif. Si S est un objet simple de $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ et $X \to i^*S$ un monomorphisme de $\mathcal{F}(\mathcal{D};k)$, avec X non nul, l'adjoint $G(X) \to S$ est surjectif car non nul, donc en appliquant le foncteur exact i^*, on en déduit un épimorphisme $i^*G(X) \twoheadrightarrow i^*(S)$, qui via l'isomorphisme $X \simeq i^*G(X)$ s'identifie au morphisme initial. Cela prouve que i^*S est soit nul soit simple. □

Corollaire 9.2. *Pour tout objet E de $\mathcal{C}$, le foncteur d'évaluation $\mathcal{F}(\mathcal{C};k) \to k[\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(E)] - \mathbf{mod}$ est essentiellement surjectif et envoie un foncteur simple sur une représentation nulle ou simple du monoïde $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(E)$.*

C'est le cas particulier du plongement pleinement fidèle $\underline{\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(E)} \hookrightarrow \mathcal{C}$ d'image E dans l'énoncé précédent.

On constate que la proposition 9.1 fournit la « moitié droite » d'un diagramme de recollement.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(\mathcal{C};k) \arrow[r, "i^*"] & \mathcal{F}(\mathcal{D};k) \arrow[l, bend right, "G"'] \arrow[l, bend left, "H"] \end{tikzcd}$$

Nous présentons maintenant des cas où l'on peut obtenir à partir de là un diagramme de recollement complet.

Proposition et définition 9.3. *Soit $\mathcal{D}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$.*

1. *Supposons que si A et B sont deux objets de $\mathcal{D}$ et X un objet de $\mathcal{C}$ tels que* $\hom_{\mathcal{C}}(A,X) \neq \varnothing$ *et* $\hom_{\mathcal{C}}(X,B) \neq \varnothing$*, alors X est objet de $\mathcal{D}$. On peut alors définir un foncteur $\mathcal{P} : \mathcal{F}(\mathcal{D};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{C};k)$, appelé* prolongement par zéro*, par $\mathcal{P}(F)(X) = F(X)$ si $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}(F)(X) = 0$ sinon ; l'action sur les morphismes est définie de façon analogue. Ce foncteur de prolongement par zéro est exact ; il commute même à toutes les limites et colimites.*
2. *Nous dirons que $\mathcal{D}$ est une* sous-catégorie complète à gauche *de $\mathcal{C}$ si pour tout objet E de $\mathcal{C}$, E est objet de $\mathcal{D}$ dès que* $\hom_{\mathcal{C}}(E,X) \neq \varnothing$ *pour un objet X de $\mathcal{D}$. D'après le point précédent, on peut alors définir le prolongement par zéro $\mathcal{P} : \mathcal{F}(\mathcal{D};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{C};k)$. Il est adjoint à droite au foncteur de restriction $\mathcal{R} : \mathcal{F}(\mathcal{C};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{D};k)$.*
3. *Nous dirons que $\mathcal{D}$ est une* sous-catégorie complète à droite *de $\mathcal{C}$ si pour tout objet E de $\mathcal{C}$, E est objet de $\mathcal{D}$ dès que* $\hom_{\mathcal{C}}(X,E) \neq \varnothing$ *pour un objet X de $\mathcal{D}$. D'après le premier point, on peut alors définir le prolongement par zéro $\mathcal{P} : \mathcal{F}(\mathcal{D};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{C};k)$. Il est adjoint à gauche au foncteur de restriction $\mathcal{R} : \mathcal{F}(\mathcal{C};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{D};k)$.*

Cette propriété se vérifie par inspection. Le corollaire suivant est un exercice à partir des résultats précédents.

Corollaire 9.4. *Soit $\mathcal{D}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ définie par* $\operatorname{Ob}\mathcal{D}' = \operatorname{Ob}\mathcal{C} \setminus \operatorname{Ob}\mathcal{D}$.

1. *Supposons la sous-catégorie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ est complète à gauche ; $\mathcal{D}'$ est alors complète à droite. Il existe un diagramme de recollement*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(\mathcal{D};k) \arrow[r, "\mathcal{P}" description] & \mathcal{F}(\mathcal{C};k) \arrow[l, shift right=2ex, "\mathcal{R}"'] \arrow[l, shift left=2ex] \arrow[r, "\mathcal{R}" description] & \mathcal{F}(\mathcal{D}';k) \arrow[l, shift right=2ex, "\mathcal{P}"'] \arrow[l, shift left=2ex] \end{tikzcd}$$

2. *Supposons la sous-catégorie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ est complète à droite ; $\mathcal{D}'$ est alors complète à gauche. Il existe un diagramme de recollement*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(\mathcal{D};k) \arrow[r, "\mathcal{P}" description] & \mathcal{F}(\mathcal{C};k) \arrow[l, shift right=2ex] \arrow[l, shift left=2ex, "\mathcal{R}"] \arrow[r, "\mathcal{R}" description] & \mathcal{F}(\mathcal{D}';k). \arrow[l, shift right=2ex] \arrow[l, shift left=2ex, "\mathcal{P}"] \end{tikzcd}$$

De plus, dans chacun de ces deux cas, le prolongement intermédiaire d'un objet de $\mathcal{F}(\mathcal{D}';k)$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ coïncide avec son prolongement par zéro.

Nous présentons maintenant un exemple typique d'application de ce corollaire.

Notation 9.5. Nous noterons $\mathcal{E}^f_{surj}(k)$ la sous-catégorie de $\mathcal{E}^f_k$ ayant les mêmes objets que $\mathcal{E}^f_k$ et dont les morphismes sont les surjections de $\mathcal{E}^f_k$. Pour tout entier n, nous désignerons par $\mathcal{E}^{\leq n}_{surj}(k)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}^f_{surj}(k)$ des espaces de dimension au plus n.

On pose enfin $\mathcal{F}_{surj}(k) = \mathcal{F}(\mathcal{E}^f_{surj}(k);k)$ et $\mathcal{F}^{\leq n}_{surj}(k) = \mathcal{F}(\mathcal{E}^{\leq n}_{surj}(k);k)$.

On remarque que $\mathcal{E}^{\leq n-1}_{surj}(k)$ est une sous-catégorie complète à droite de $\mathcal{E}^{\leq n}_{surj}(k)$. Par conséquent :

Proposition 9.6. *Il existe un diagramme de recollement*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}^{\leq n-1}_{surj}(k) \arrow[r, "\mathcal{P}" description] & \mathcal{F}^{\leq n}_{surj}(k) \arrow[l, shift right=2ex] \arrow[l, shift left=2ex, "\mathcal{R}"] \arrow[r, "\mathrm{ev}_n" description] & k[GL_n(k)]-\mathbf{mod} \arrow[l, shift right=2ex] \arrow[l, shift left=2ex, "\mathcal{P}"] \end{tikzcd}$$

où ev_n *désigne le foncteur d'évaluation.*

Corollaire 9.7. *Les objets simples $\mathcal{F}_{surj}(k)$ sont les prolongements par zéro des $k[GL_n(k)]$-modules simples lorsque n décrit $\mathbb{N}$; de plus, deux tels foncteurs simples sont isomorphes si et seulement s'ils correspondent à une même valeur de n et que les $k[GL_n(k)]$-modules simples associés sont isomorphes.*

La vérification du corollaire à partir de ce qui précède nécessite la seule observation suivante : si $S \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}_{surj}(k)$ est simple, alors $S(k^n)$ est nul pour n assez grand. On utilise les projectifs standard pour le voir.

10 Deuxième situation de recollement : idempotents des monoïdes

Kuhn a observé dans [Kuh94b] qu'une situation de recollement entre catégories de modules déjà connue s'appliquait avec succès dans le cadre des catégories de foncteurs.

Proposition 10.1. *Soient R un anneau et e un idempotent de R. Il existe un diagramme de recollement*

$$R/ReR - \mathbf{mod} \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{i}}} R - \mathbf{mod} \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{e}}} eRe - \mathbf{mod}$$

où i est le foncteur de restriction des scalaires relative à la projection $R \twoheadrightarrow R/ReR$, e le foncteur envoyant un R-module M sur eM.

Si M est un monoïde et e un idempotent de M, on peut appliquer cette propriété à l'algèbre $k[M]$, en notant que $ek[M]e \simeq k[eMe]$ et $k[M]ek[M] \simeq k[MeM]$.

Le cas qui nous intéresse est celui où $M = \mathcal{M}_n(k)$ et e est l'idempotent correspondant à la matrice $diag(1, \ldots, 1, 0)$ de rang $n-1$. On a alors $eMe \simeq \mathcal{M}_{n-1}(k)$ et $M/MeM \simeq GL_n(k)$ (MeM est constitué des matrices non inversibles). Ainsi :

Corollaire 10.2 (Kuhn)**.** *Pour tout entier n, il existe un diagramme de recollement*

$$k[GL_n(k)] - \mathbf{mod} \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} k[\mathcal{M}_n(k)] - \mathbf{mod} \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} k[\mathcal{M}_{n-1}(k)] - \mathbf{mod}$$

Cela permet de décrire les $k[\mathcal{M}_n(k)]$-modules simples à partir des $k[GL_i(k)]$-modules simples pour $i \leq n$.

Pour passer aux objets simples de $\mathcal{F}(k)$, Kuhn utilise un autre diagramme de recollement :

Proposition 10.3 (Kuhn)**.** *Notons $\mathcal{F}^i(k)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(k)$ des foncteurs F tels que $F(k^{i-1}) = 0$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un diagramme de recollement

$$\mathcal{F}^{n+1}(k) \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{i}}} \mathcal{F}(k) \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{e}}} k[\mathcal{M}_n(k)] - \mathbf{mod}$$

où i est le foncteur d'inclusion et e le foncteur d'évaluation sur k^n.

On peut ensuite obtenir les objets simples de $\mathcal{F}(k)$ de la façon suivante :

Théorème 10.4 (Kuhn)**.** *Soient $S \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}(k)$ un foncteur simple et $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Le $k[GL_n(k)]$-module $S(k^n)$ est nul ou simple.*
2. *Si n est le plus petit entier tel que le $k[GL_n(k)]$-module $M = S(k^n)$ soit non nul, alors S est l'image de la flèche canonique $P_{k^n} \underset{k[\mathcal{M}_n(k)]}{\otimes} M \to \hom_{k[\mathcal{M}_n(k)]}(k[\hom_{\mathcal{E}_k^f}(-, k^n)], M)$, où l'action de $\mathcal{M}_n(k)$ sur M s'obtient en faisant opérer trivialement les matrices non inversibles.*
3. *Réciproquement, les images obtenues comme précédemment forment un système complet de représentants des objets simples de $\mathcal{F}$ lorsque n parcourt $\mathbb{N}$ et M un système complet de représentants des $k[GL_n(k)]$-modules simples.*

La flèche canonique dont il est question est l'adjointe au morphisme identité

$$M \to \hom_{\mathcal{F}(k)}(P_{k^n}, \hom_{k[\mathcal{M}_n(k)]}(k[\hom_{\mathcal{E}_k^f}(-,k^n)], M)) \simeq \hom_{k[\mathcal{M}_n(k)]}(k[\hom_{\mathcal{E}_k^f}(k^n,k^n)], M)) \simeq M$$

i.e. le prolongement intermédiaire du diagramme de recollement correspondant à la proposition 10.3.

11 Troisième situation de recollement : foncteurs polynomiaux

Nous avons déjà introduit le *foncteur différence* $\Delta : \mathcal{F}(k) \to \mathcal{F}(k)$; on rappelle que ce foncteur est exact.

Définition 11.1. Un objet F de $\mathcal{F}(k)$ est dit *polynomial* s'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^i(F) = 0$. Le *degré* de F est alors défini comme le plus petit entier $\deg F$ tel que $\Delta^{\deg F} \neq 0$ si $F \neq 0$, tandis qu'on pose $\deg 0 = -\infty$.

Une variante de cette définition consiste à introduire les *effets croisés*, i.e. à considérer des multi-foncteurs $(V_1, \dots, V_n) \mapsto F(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n)$.

Notation 11.2. Pour tout entier n, on note $\mathcal{F}_n(k)$ la sous-catégorie pleine des foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}(k)$ de degré au plus n.

Ainsi, $\mathcal{F}_0(k)$ est la catégorie des foncteurs *constants* ; elle s'identifie à $\mathcal{E}_k$.

Remarque 11.3. Supposons que le foncteur F prend des valeurs de dimension finie. Alors F est un foncteur polynomial si et seulement si la fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad n \mapsto \dim_k F(k^n)$ est polynomiale ; leurs degrés coïncident alors.

On en déduit en particulier, lorsque k est fini, que le seul foncteur projectif (resp. injectif) standard polynomial est le foncteur constant $k = P_0$ (resp. $k = I_0$).

Proposition 11.4.
1. *La sous-catégorie $\mathcal{F}_n(k)$ de $\mathcal{F}(k)$ est épaisse.*
2. *Si F et G sont deux foncteurs polynomiaux, alors $F \otimes G$ est également polynomial et $\deg(F \otimes G) = \deg F + \deg G$.*
3. *Le dual d'un foncteur polynomial est polynomial de même degré.*
4. *Les foncteurs T^n, S^n, Γ^n et Λ^n sont polynomiaux de degré n.*

Démonstration. Le premier point découle de l'exactitude du foncteur différence. Le second provient de l'isomorphisme naturel

$$\Delta(F \otimes G) \simeq \Delta(F) \otimes G \oplus F \otimes \Delta(G) \oplus \Delta(F) \otimes \Delta(G)$$

déduit de la commutation des foncteurs de décalage au produit tensoriel.

Le troisième point provient de la commutation du foncteur différence au foncteur de dualité.

Le dernier point s'établit par récurrence sur n pour T^n à partir du second ; pour les autres foncteurs, ils découlent de la propriété exponentielle. □

Nous introduisons maintenant la notion simple et efficace de foncteur exponentiel gradué, que nous retrouverons dans la dernière partie de cet exposé.

Définition 11.5. Un foncteur gradué $(E^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dit *exponentiel* si :
1. il est à valeurs de dimension finie ;
2. $E^0 = k$;
3. il existe des isomorphismes naturels

$$E^n(U \oplus V) \simeq \bigoplus_{i+j=n} E^i(U) \otimes E^j(V).$$

Exemple 11.6. Les foncteurs gradués $(S^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\Gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont exponentiels (ce n'est pas le cas de $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Proposition 11.7. *Si (E^n) est un foncteur exponentiel gradué, alors $\Delta E^n \simeq \bigoplus_{i=0}^{n-1} E^{n-i}(k)\otimes E^i$. Par conséquent, E^n est polynomial et $\deg E^n \leq n$, avec égalité si $E^1(k)\neq 0$.*

L'étude des catégories $\mathcal{F}_n(k)$ repose sur des propriétés des foncteurs puissances tensorielles.

Proposition 11.8. *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un isomorphisme de k-algèbres $\mathrm{End}_{\mathcal{F}(k)}(T^n)\simeq k[\Sigma_n]$.*

Démonstration. L'action de Σ_n sur T^n par permutation des facteurs procure un morphisme de k-algèbres $k[\Sigma_n]\to \mathrm{End}_{\mathcal{F}(k)}(T^n)$. Nous allons maintenant définir un morphisme $\mathrm{End}_{\mathcal{F}(k)}(T^n)\to k[\Sigma_n]$ dont on laissera au lecteur le soin de vérifier qu'il est inverse du précédent.

Soient V un espace vectoriel de dimension n, $(e_1,\dots,e_n)$ une base de V et x l'élément $e_1\otimes\dots\otimes e_n$ de $T^n(V)$. On munit V, puis $T^n(V)$ par fonctorialité, de la structure de $k[\Sigma_n]$-module à droite induite par l'action des endomorphismes de permutation (dans la base considérée) : le sous-$k[\Sigma_n]$-module M de $T^n(V)$ engendré par x, qui est *libre*, a pour espace vectoriel sous-jacent l'intersection des noyaux des endomorphismes de $T^n(V)$ induits par les endomorphismes diagonaux non inversibles de V. On en déduit que pour tout morphisme $f : T^n\to T^n$ de $\mathcal{F}(k)$, $f(V) : T^n(V)\to T^n(V)$ préserve M. Comme $f(V)$ est $k[\Sigma_n]$-linéaire, on en déduit bien un morphisme d'anneaux $\mathrm{End}_{\mathcal{F}(k)}(T^n)\to \mathrm{End}_{k[\Sigma_n]}(M)\simeq k[\Sigma_n]$. □

Convention 11.9. Dans la suite de cette section, on suppose que k est un corps *premier*.

Pour simplifier, nous supposerons aussi k fini [4].

Pour des raisons formelles, tout foncteur F de $\mathcal{F}(k)$ possède un plus grand sous-foncteur $p_n(F)$ (resp. un plus grand quotient $q_n(F)$) qui est polynomial de degré au plus n. Le foncteur p_n (resp. q_n) est adjoint à droite (resp. à gauche) au foncteur d'inclusion $\mathcal{F}_n(k)\to\mathcal{F}(k)$.

Explicitement, soient $\bar{P}$ et $\bar{I}$ les foncteurs définis par les scindements $P_k\simeq k\oplus\bar{P}$ et $I_k\simeq k\oplus\bar{I}$. On a vu que Δ est adjoint à droite à $-\otimes\bar{P}$ et à gauche à $-\otimes\bar{I}$. Pour des raisons formelles, on en déduit $q_n(F) = coker\,(\bar{P}^{\otimes n}\otimes\Delta^n(F)\to F)$ (coünité) et $p_n(F) = ker\,(F\to\bar{I}^{\otimes n}\otimes\Delta^n(F))$ (unité).

L'hypothèse que k est premier intervient dans le lemme suivant.

Lemme 11.10. *On a $p_1(\bar{I})\simeq q_1(\bar{P})\simeq T^1$.*

Indication de démonstration. Le foncteur $q_1(\bar{P})$ est le conoyau d'une flèche explicite $\bar{P}^{\otimes 2}\to\bar{P}$, ou encore d'une flèche explicite $P_{k^2}\to P_k$. Le résultat s'obtient par identification avec la suite exacte $P_{k^2}\to P_k\to T^1\to 0$ déjà rencontrée.

L'autre isomorphisme s'en déduit par dualité. □

Lemme 11.11. *Pour tous F, $G\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{F}(k)$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on a*

$$p_n(F\otimes G) = \sum_{i+j=n} p_i(F)\otimes p_j(G).$$

Indication de démonstration. On a clairement

$$p_n(F\otimes G)\supset \sum_{i+j=n} p_i(F)\otimes p_j(G)$$

par la propriété d'additivité des degrés d'un produit tensoriel.

Pour établir l'autre inclusion, on se ramène à montrer que $p_{n+m}(F\otimes G)=0$ si $p_n(F)=p_m(G)=0$. Dans ce cas, les unités $F\to\bar{I}^{\otimes n}\otimes\Delta^n(F)$ et $G\to\bar{I}^{\otimes m}\otimes\Delta^m(F)$ sont des monomorphismes. On vérifie que le produit tensoriel de ces deux morphismes apparaît comme facteur direct dans l'unité $F\otimes G\to\bar{I}^{n+m}\otimes\Delta^{n+m}(F\otimes G)$ (développer le terme $\Delta^{n+m}(F\otimes G)$), donc que cette unité est injective. □

[4] La conclusion reste vraie pour $k=\mathbb{Q}$, avec essentiellement la même démonstration, mais il faut prendre garde aux petits problèmes techniques posés par les foncteurs prenant des valeurs de dimension infinie, notamment dans le maniement de la dualité.

En combinant les deux lemmes précédents, il vient :

Proposition 11.12. *On a* $q_n(\bar{P}^{\otimes n}) \simeq p_n(\bar{I}^{\otimes n}) \simeq T^n$.

Corollaire 11.13. *Le foncteur* T^n *est projectif et injectif dans la catégorie* $\mathcal{F}_n(k)$. *De plus, le noyau du foncteur* $\hom(T^n, -) : \mathcal{F}_n(k) \to \mathcal{E}_k$ *est égal à* $\mathcal{F}_{n-1}(k)$.

Démonstration. On a

$$\hom_{\mathcal{F}_n(k)}(T^n, F) \simeq \hom_{\mathcal{F}_n(k)}(q_n(\bar{P}^{\otimes n}), F) \simeq \hom_{\mathcal{F}(k)}(\bar{P}^{\otimes n}, F) = \Delta^n(F)(0).$$

Comme Δ^n est exact, cela prouve la projectivité de T^n ; l'injectivité est duale.

Pour $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}_n(k)$, le foncteur $\Delta^n(F)$ est constant, on a donc $\hom(T^n, F) = 0$ si et seulement si $\Delta^n(F) = 0$, i.e. $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}_{n-1}(k)$. □

Nous pouvons donner maintenant le résultat principal de cette section. On rappelle que k est supposé *premier*; pour un corps fini non premier, Kuhn a étendu le résultat dans [Kuh02].

Proposition 11.14. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Il existe un diagramme de recollement*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_{n-1}(k) \arrow[r, "i_n"] & \mathcal{F}_n(k) \arrow[l, bend right, "q_n"'] \arrow[l, bend left, "p_n"] \arrow[r, "s_n"] & \mathbf{mod} - k[\Sigma_n] \arrow[l, bend right] \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

où i_n *désigne le foncteur d'inclusion,* $\mathbf{mod} - k[\Sigma_n]$ *la catégorie des* $k[\Sigma_n]$*-modules à* droite *et* s_n *le foncteur* $\hom_{\mathcal{F}_n(k)}(T^n, -)$.

Indication de démonstration. La proposition précédente et le théorème de Morita montrent que $\mathcal{F}_n(k)/\mathcal{F}_{n-1}(k)$ s'identifie à $\mathbf{mod} - k[\Sigma_n]$ via le foncteur s_n. On en déduit alors la proposition par des arguments formels. □

Corollaire 11.15. *Les objets simples et polynomiaux de la catégorie* $\mathcal{F}(k)$ *sont (à isomorphisme près) en bijection avec la réunion disjointe des classes d'isomorphisme de* $k[\Sigma_n]$*-modules simples lorsque* n *décrit* $\mathbb{N}$.

On peut décrire ensuite explicitement les objets simples et polynomiaux de la catégorie $\mathcal{F}(k)$ à l'aide de la théorie classique des représentations des groupes symétriques (cf. [Jam78]). En particulier, les foncteurs puissances extérieures sont simples, et tout foncteur simple est isomorphe à un sous-quotient d'un produit tensoriel de puissances extérieures (dans le cas d'un corps fini non premier, il faudrait aussi s'autoriser à tordre par le Frobenius).

12 Comparaison des différentes situations

Dans la section 10, nous avons classifié *tous* les foncteurs simples de $\mathcal{F}(k)$ à l'aide des représentations simples (sur k) des différents groupes $GL_n(k)$. Dans la section précédente, nous avons décrit *certains* foncteurs simples de $\mathcal{F}(k)$ à partir des représentations simples (sur k) des différents groupes symétriques, au moins lorsque k est premier.

Nous allons voir tout d'abord que si k est *fini*, alors nous avons en fait obtenu aussi tous les foncteurs simples par cette deuxième approche.

Lemme 12.1. *Si* k *est un corps fini, alors tout injectif standard* I_V *de* $\mathcal{F}(k)$ *est colimite de sous-foncteurs polynomiaux.*

Démonstration. Comme le produit tensoriel de $\mathcal{F}(k)$ préserve les foncteurs polynomiaux et les colimites, et que $I_{V \oplus W} \simeq I_V \otimes I_W$, il suffit de voir que I_k est colimite de sous-foncteurs polynomiaux. Dans ce cas, la conclusion s'obtient en considérant l'épimorphisme $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S^n \twoheadrightarrow I_k$ rencontré dans la deuxième partie de cet exposé et en utilisant le caractère polynomial des puissances symétriques. □

Remarque 12.2. En revanche, un foncteur *projectif* de $\mathcal{F}(k)$ ne contient jamais de sous-foncteur polynomial non constant.

Théorème 12.3. *Si k est un corps fini, alors tous les foncteurs simples de $\mathcal{F}(k)$ sont polynomiaux.*

Démonstration. Soit $S \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}(k)$ simple et $n \in \mathbb{N}$ tel que $S(k^n) \neq 0$. On en déduit un morphisme non nul, donc injectif, de S vers I_{k^n}. Comme S est simple et I_{k^n} colimite de sous-foncteurs polynomiaux, on en déduit que S est polynomial. □

Connaissant une représentation simple d'un groupe symétrique, on en déduit un objet simple de $\mathcal{F}(k)$ par la section 11. Les évaluations de ce foncteur fournissent alors des représentations (nulles ou) simples des différents groupes linéaires sur k par la section 10 : ce sont les *représentations polynomiales* des groupes linéaires. On retrouve ainsi une théorie classique, connue avant l'étude de la catégorie $\mathcal{F}(k)$ (cf. [Gre80], ou [Mac95] en caractéristique 0). L'approche fonctorielle est sans doute la plus naturelle pour exprimer les résultats classiques (ceux de [Mac95] sont d'ailleurs essentiellement exprimés en termes fonctoriels).

Expliquons maintenant rapidement le lien entre les objets simples de la catégorie $\mathcal{F}(k)$ et ceux de la catégorie $\mathcal{F}_{surj}(k)$ étudiés dans la section 9 à l'aide d'autres diagrammes de recollement. Le foncteur d'inclusion $\mathcal{E}^f_{surj}(k) \to \mathcal{E}^f_k$ fournit par précomposition un foncteur de restriction $o : \mathcal{F}(k) \to \mathcal{F}_{surj}(k)$. Il possède un adjoint à gauche exact $\varpi : \mathcal{F}_{surj}(k) \to \mathcal{F}(k)$, tel que

$$\varpi(X)(V) = \bigoplus_{W \subset V} X(W).$$

L'image par le foncteur ϖ d'un foncteur simple de $\mathcal{F}_{surj}(k)$ est un foncteur indécomposable (mais en général infini) de $\mathcal{F}(k)$ appelé *foncteur de Powell* — cet auteur a introduit les duaux de ces foncteurs sous le nom de *foncteurs co-Weyl* dans [Pow98], article où il a montré comment utiliser ces foncteurs pour établir des propriétés profondes sur la structure de la catégorie $\mathcal{F}(k)$ (lorsque k est un corps fini), à partir de propriétés déduites élémentairement des diagrammes de recollements présentés. Ces considérations dépassent largement le cadre de cet exposé introductif.

Quatrième partie

Introduction aux méthodes de cohomologie fonctorielle

Le but de la dernière partie de cet exposé est de donner un bref panorama sur les méthodes puissantes de cohomologie fonctorielle qui ont abouti à des succès spectaculaires comme les calculs de [FLS94], [FFSS99] ou le résultat de finitude [FS97]. Ces articles traitent de calculs cohomologiques sur des foncteurs *finis* et d'applications, mais la considération de foncteurs de très grande taille peut aussi se révéler très utile (cf. l'appendice de [FFSS99]).

Deux très bonnes références pour un survol du domaine sont [Pir02] et les chapitres homologiques de [FFPS03].

La plupart des arguments, qui ont été déclinés sous de nombreuses formes, sont dus initialement à Pirashvili. Nous nous limiterons ici à la catégorie $\mathcal{F}(k)$, dans le cas où k est un corps *fini*.

Convention 12.4. Dans toute la suite de cet exposé, on suppose que k est fini.

13 Arguments formels : adjonctions

La proposition formelle suivante s'avère d'un usage particulièrement utile dans les catégories de foncteurs.

Proposition 13.1. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des catégories abéliennes avec assez de projectifs et d'injectifs, $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ et $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ deux foncteurs* exacts *tels que F est adjoint à gauche à G. Il existe un isomorphisme naturel gradué*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{A}}(F(B), A) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{B}}(B, G(A)).$$

Exemple 13.2 (Dualité). Il existe un isomorphisme naturel $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(F, DG) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(G, DF)$.

Les conséquences de cette proposition en situation de recollement sont parfois très utiles ; dans le cadre de celle présentée dans la section 10, Powell a exploité efficacement les conséquences homologiques du recollement de Kuhn dans [Pow98].

Les adjonctions mettant en jeu le foncteur différence sont souvent utilisées par l'intermédiaire la proposition suivante, simple mais très efficace.

Proposition 13.3. *Soient G et $F_1, \dots, F_n$ des foncteurs de $\mathcal{F}(k)$ tels que :*

1. *$F_1(0) = \cdots = F_n(0) = 0$;*
2. *H est polynomial de degré strictement inférieur à n.*

Alors les groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(F_1 \otimes \cdots \otimes F_n, G)$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(G, F_1 \otimes \cdots \otimes F_n)$ sont nuls.

Démonstration. Si F est un foncteur tel que $F(0) = 0$, alors F possède une résolution projective dont les termes sont du type $\bar{P} \otimes F'_*$. Par conséquent, le foncteur $F_1 \otimes \cdots \otimes F_n$ possède une résolution projective dont les termes sont du type $\bar{P}^{\otimes n} \otimes A_*$. Comme $\hom_{\mathcal{F}(k)}(\bar{P}^{\otimes n} \otimes A_*, G) \simeq \hom_{\mathcal{F}(k)}(A_*, \Delta^n(G))$ et que $\Delta^n(G)$ est nul par hypothèse, on en déduit la nullité de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(F_1 \otimes \cdots \otimes F_n, G)$. L'autre cas est dual. $\square$

Signalons enfin que des variantes fécondes des arguments présentés ici s'énoncent en termes de *bifoncteurs* ; Scorichenko en a fait une utilisation remarquable pour étendre à un anneau quelconque l'identification de la K-théorie stable à un groupe d'homologie fonctorielle (cf. le dernier chapitre de [FFPS03]).

14 Utilisation de foncteurs exponentiels

Les méthodes décrites dans la section précédente sont efficaces pour traiter de très nombreux cas d'*annulation* cohomologique, mais on a besoin aussi de méthodes pour produire des classes d'extensions non triviales ! Les foncteurs exponentiels gradués constituent un outil de choix à ce sujet.

Proposition 14.1 ([Fra96],[FFSS99])**.** *Soient $E^\bullet$ un foncteur exponentiel gradué et F, G des objets de $\mathcal{F}(k)$. Il existe des isomorphismes naturels* bigradués

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(E^\bullet, F \otimes G) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(E^\bullet, F) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(E^\bullet, G).$$

Si de plus F et G prennent des valeurs de dimension finie, alors

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(F \otimes G, E^\bullet) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(F, E^\bullet) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(G, E^\bullet).$$

Méthode de démonstration. On utilise la catégorie de bifoncteurs $bi - \mathcal{F}(k) = \mathcal{F}(\mathcal{E}^f_k \times \mathcal{E}^f_k; k)$ et l'adjonction entre les foncteurs *diagonale* $\delta : \mathcal{E}^f_k \to \mathcal{E}^f_k \times \mathcal{E}^f_k$ et *somme directe* $\oplus : \mathcal{E}^f_k \times \mathcal{E}^f_k \to \mathcal{E}^f_k$, qui induit une nouvelle adjonction par précomposition. De fait, la condition exponentielle se lit $\oplus_* E^\bullet \simeq E^\bullet \boxtimes E^\bullet$, où le produit tensoriel extérieur $\boxtimes : \mathcal{F}(k) \times \mathcal{F}(k) \to bi - \mathcal{F}(k)$ est défini par $(F \boxtimes G)(U, V) = F(U) \otimes G(V)$. On remarque aussi que $F \otimes G = \delta_*(F \boxtimes G)$. La proposition 13.1 donne donc

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(E^\bullet, F \otimes G) \simeq \mathrm{Ext}^*_{bi-\mathcal{F}(k)}(\oplus_* E^\bullet, F \boxtimes G) \simeq \mathrm{Ext}^*_{bi-\mathcal{F}(k)}(E^\bullet \boxtimes E^\bullet, F \boxtimes G).$$

La proposition se déduit alors de la formule de Künneth

$$\mathrm{Ext}^*_{bi-\mathcal{F}(k)}(A \boxtimes B, F \boxtimes G) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(A, F) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(B, G)$$

valable sous des hypothèses de finitude raisonnables sur A et B, qui sont vérifiées ici car les composantes d'un foncteur exponentiel gradué sont *polynomiales* et à valeurs de dimension finie. Cette formule s'établit en commençant par le degré cohomologique 0 et le cas où A et B sont des projectifs standard, à partir de l'isomorphisme canonique

$$P_U \boxtimes P_V \simeq P^{\mathcal{E}^f_k \times \mathcal{E}^f_k}_{(U,V)}.$$

□

Exemple 14.2. En appliquant itérativement cette proposition, on retrouve la proposition 13.3 dans le cas où F est une composante d'un foncteur exponentiel gradué.

À partir de cette proposition permettant de manipuler commodément des groupes d'extensions mettant en jeu des foncteurs exponentiels et des produits tensoriels, on peut simplifier grand nombre de calculs.

Une autre manière fondamentale d'utiliser les foncteurs exponentiels gradués *classiques* (puissances extérieures, symétriques, divisées) consiste à s'appuyer sur la détermination de l'homologie de complexes explicites. Avant de donner les plus importants d'entre eux, mentionnons quelques structures valables pour un foncteur exponentiel gradué quelconque $E^\bullet$ (cf. [Kuh95], § 5).

Pour tous entiers positifs i, j, on dispose d'un morphisme $E^i \otimes E^j \to E^{i+j}$ appelé *produit*, obtenu sur un objet V par

$$E^i(V) \otimes E^j(V) \hookrightarrow E^{i+j}(V \oplus V) \twoheadrightarrow E^{i+j}(V)$$

où la première flèche est l'inclusion scindée déduite de la structure exponentielle et la seconde est induite par la somme $V \oplus V \twoheadrightarrow V$. Dualement, on dispose d'un *coproduit* $E^{i+j} \to E^i \otimes E^j$.

À l'aide de ces morphismes, on peut munir les groupes trigradués $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(\Lambda^*, \Lambda^*)$, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(\Gamma^*, \Gamma^*)$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(S^*, S^*)$ de structures d'*algèbres de Hopf*. C'est grâce à ces structures que l'on dispose d'une description « raisonnable » de ces groupes, déterminés dans [FFSS99].

Complexe de Koszul En partant de l'observation que $\Lambda^1 = S^1$, on obtient à l'aide du coproduit sur Λ^* et du produit sur S^* des morphismes

$$S^i \otimes \Lambda^j \to S^i \otimes (\Lambda^1 \otimes \Lambda^{j-1}) \simeq (S^i \otimes S^1) \otimes \Lambda^{j-1} \to S^{i+1} \otimes \Lambda^{j-1}.$$

Proposition et définition 14.3. *Pour tout entier $n \geq 0$, la suite*

$$0 \to \Lambda^n \to S^1 \otimes \Lambda^{n-1} \to \cdots \to S^{n-1} \otimes \Lambda^1 \to S^n \to 0$$

obtenue à partir des morphismes précédents est exacte. On l'appelle complexe de Koszul.

Principe de démonstration. Un calcul direct montre que cette suite est un complexe. Son homologie est le n-ième terme d'un foncteur exponentiel *bi*gradué (en un sens convenable), grâce à la propriété exponentielle de S^* et Λ^*. La formule de Künneth montre alors qu'il suffit de vérifier la nullité de cette homologie sur les espaces vectoriels 0 et k, qui est claire. □

Une variante de la construction classique précédente consiste à utiliser d'abord le coproduit sur S^* puis le produit sur Λ^*, on obtient non plus une suite exacte mais un complexe, appelé *complexe de De Rham*, dont on connaît l'homologie.

Le lemme d'annulation de Kuhn Il s'agit d'un outil issu de la comparaison entre la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$ et l'algèbre de Steenrod modulo p.

Proposition 14.4 ([Kuh95])**.** *Supposons que k est un corps fini premier $\mathbb{F}_p$ et que F est un foncteurs polynomial de $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$ à valeurs de dimension finie. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la colimite du système*

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)}(F, S^{p^h i}) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)}(F, S^{p^{h+1} i}) \to \dots$$

dont les flèches sont induites par les morphismes de Frobenius $S^n \to S^{np}$ $\quad x \mapsto x^p$ est nulle.

15 Exemples de calculs explicites

Nous nous proposons de donner une démonstration élémentaire complète du résultat suivant, démontré au début de l'article [Fra96], avant d'indiquer comment obtenir des calculs plus sophistiqués.

Proposition 15.1. *Soient i et j deux entiers naturels. Le groupe d'extensions $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^i, \Lambda^j)$ est nul sauf si $i > 0$, $j > 0$ et $|i - j| = 1$, auquel cas il est isomorphe à $\mathbb{F}_2$.*

Démonstration. On va démontrer dans un premier temps ce résultat en excluant les cas les moins faciles, à savoir $i = j$ et $|i - j| = 1$, sauf pour les petites valeurs de i ou j.

On remarque d'abord que $\hom_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^i, \Lambda^n)$ est nul pour $n \neq i$ (car Λ^i et Λ^n sont alors deux objets simples non isomorphes — utiliser une récurrence et $\Delta(\Lambda^n) \simeq \Lambda^{n-1}$) et isomorphe à $\mathbb{F}_2$ si $i = n$ (car $\Lambda^n({\mathbb{F}_2}^n)$ est de dimension 1, par exemple).

Une autre observation est que par auto-dualité des puissances extérieures $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^i, \Lambda^j) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^j, \Lambda^i)$.

Le coproduit $\Lambda^n \to \Lambda^1 \otimes \Lambda^{n-1}$ est injectif pour tout entier $n \geq 1$ (cela découle de la simplicité de Λ^n ou d'un examen direct — le dual de ce morphisme, le produit, est clairement surjectif). Notons C_n son conoyau. Pour tout entier $i \geq 0$, on a une suite exacte

$$0 \to \hom_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^i, \Lambda^n) \to \hom_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^i, \Lambda^1 \otimes \Lambda^{n-1}) \to \hom_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^i, C_n) \to$$

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^i, \Lambda^n) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^i, \Lambda^1 \otimes \Lambda^{n-1}) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^{i-n+1}, \Lambda^1) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^{i-1}, \Lambda^{n-1})$$

où la dernière égalité est déduite de la proposition 14.1) et où l'on convient que $\Lambda^j = 0$ si $j < 0$. La proposition 14.1 montre également que $\hom_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^i, \Lambda^1 \otimes \Lambda^{n-1})$ est nul si $i \neq n$ et isomorphe à $\mathbb{F}_2$ si $i = n$.

On calcul maintenant les groupes $\mathrm{Ext}^1(\Lambda^1, \Lambda^n)$ (les groupes $\mathrm{Ext}^1(\Lambda^0, \Lambda^n)$ sont nuls puisque le foncteur $\Lambda^0 = \mathbb{F}_2$ est projectif). le cas $n = 1$ se traite différemment des autres : pour celui-ci, on remarque qu'une extension entre deux foncteurs de degré 1 est un foncteur de degré 1, et que la catégorie des foncteurs de degré au plus 1 est semi-simple.

Pour $n > 1$, la suite exacte précédente donne un isomorphisme $\hom(\Lambda^1, C_n) \simeq \mathrm{Ext}^1(\Lambda^1, \Lambda^n)$. La conclusion est alors donnée par le lemme 15.2 ci-après.

On calcule ensuite les groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^i, \Lambda^n)$ en distinguant trois cas :

1. $i > n + 1$ (auquel se ramène $i < n - 1$ par dualité). Alors $\mathrm{Ext}^1(\Lambda^{i-n+1}, \Lambda^1) = 0$ par ce qui précède. D'autre part, C_n est comme $\Lambda^1 \otimes \Lambda^{n-1}$ de degré au plus n, il ne peut donc existe de monomorphisme $\Lambda^i \hookrightarrow C_n$ puisque $i > n$; comme Λ^i est simple on en déduit $\hom(\Lambda^i, C_n) = 0$. La suite exacte ci-dessus montre donc que $\mathrm{Ext}^1(\Lambda^i, \Lambda^n)$ s'injecte dans $\mathrm{Ext}^1(\Lambda^{i-1}, \Lambda^{n-1})$; un argument de récurrence fournit alors la nullité recherchée.
2. $i = n$. Ce cas est traité ultérieurement.
3. $i = n + 1$ (auquel se ramène $i = n - 1$) : ce cas n'est pas traité ici (mais se démontre de manière analogue au précédent).

□

Lemme 15.2. *On a* $\hom(\Lambda^1, C_n) = 0$ *pour* $n > 2$ *et* $\hom(\Lambda^1, C_2) = \mathbb{F}_2$.

Démonstration. Comme Λ^1 est un quotient de $P_{\mathbb{F}_2}$, $\hom(\Lambda^1, C_n)$ s'injecte dans $\hom(P_{\mathbb{F}_2}, C_n) \simeq C_n(\mathbb{F}_2)$, qui est un quotient de $(\Lambda^1 \otimes \Lambda^{n-1})(\mathbb{F}_2)$. Cet espace vectoriel est nul pour $n > 2$ et égal à $\mathbb{F}_2$ si $n = 2$. Il suffit donc d'exhiber un monomorphisme $\Lambda^1 \hookrightarrow C_2$ pour conclure. En effet, $C_2 = T^2/\Lambda^2 \simeq S^2$, et le morphisme de Frobenius donne le monomorphisme recherché. □

Suite spectrale d'hypercohomologie. Considérons un complexe

$$C^0 \to C^1 \to \cdots \to C^n \to \cdots$$

dans la catégorie $\mathcal{F}(k)$ (ou dans une catégorie abélienne avec assez d'injectifs) et un objet F de $\mathcal{F}(k)$. On peut alors former deux suites spectrales du premier quadrant $E_r^{i,j}$ et $E_r'^{i,j}$, de même aboutissement (appelé *hypercohomologie* du complexe C^* à coefficients dans F) telles que

$$E_1^{i,j} = \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{F}(k)}(F, C^i)$$

et

$$E_2'^{i,j} = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(k)}(F, H^j(C^*)).$$

Concrètement, cela signifie que l'on a des suites d'objets $E_r^{i,j}$ paramétrisés par trois entiers i, j, $r \geq 0$ avec $E_r^{i,j} = 0$ si $i < 0$ ou $j < 0$ (premier quadrant), pour tout r une différentielle $d^r : E_r^{i,j} \to E_r^{i+r,j+1-r}$ qui fait de $(E_r^{i,j})_{i,j}$ un complexe (bigradué) et tel que $E_{r+1}^{i,j} \simeq H^{i,j}(E_r^{*,\bullet})$; on a les mêmes propriétés pour E'.

À i et j fixés, pour r assez grand, on a $E_{r+1}^{i,j} \simeq E_r^{i,j}$, qui est noté $E_\infty^{i,j}$; les $E_\infty^{i,n-i}$ peuvent se voir comme les sous-quotients d'une filtration finie d'un objet H^n, où H^* est un objet gradué appelé *aboutissement* de la suite spectrale.

Si le complexe C^* est exact, alors $E_2' = 0$, de sorte que l'on a $E_\infty = 0$.

Proposition 15.3. *Pour tout entier* $n \geq 0$, *on a* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}(k)}(\Lambda^n, \Lambda^n) = 0$.

Démonstration. Le cas $n = 0$ est évident ; le cas $n = 1$ s'obtient à partir de l'observation qu'une extension de Λ^1 par lui-même est un foncteur polynomial de degré au plus 1 et que la catégorie de ces foncteurs est semi-simple.

On se place maintenant dans le cas $n > 1$; par récurrence, on peut supposer démontré que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}(k)}(\Lambda^{n-1}, \Lambda^{n-1}) = 0$.

On considère les suites spectrales d'hypercohomologie associées au complexe de Koszul

$$\Lambda^n \to S^1 \otimes \Lambda^{n-1} \to \cdots \to S^{n-1} \otimes \Lambda^1 \to S^n \to 0$$

à coefficients dans Λ^n (il est conseillé de s'aider d'un dessin pour voir les différentielles).

Comme ce complexe est exact, la seconde est nulle au terme E_2', dont la première converge vers 0 ; son terme E_1 est donné par $E_1^{i,j} = \mathrm{Ext}^j(\Lambda^n, S^i \otimes \Lambda^{n-i})$. On veut montrer que $E_1^{0,1}$ est nul ; on sait que $E_1^{1,1} \simeq \mathrm{Ext}^1(\Lambda^1, \Lambda^1) \oplus \mathrm{Ext}^1(\Lambda^{n-1}, \Lambda^{n-1})$ (par la proposition 14.1) est nul. En particulier, $E_2^{0,1} \simeq E_1^{0,1}$.

On a d'autre part $E_1^{2,0} \simeq \hom(\Lambda^2, S^2) = 0$ (toujours par la proposition 14.1), comme on le voit par exemple en considérant la composition $\bar{P}^{\otimes 2} \twoheadrightarrow \Lambda^2 \to S^2$ (on a $\hom(\bar{P}^{\otimes 2}, S^2) \neq 0$; les morphismes non nuls ne se factorisent pas par Λ^2). Par suite, $E_2^{2,0} = 0$.

Comme $E_3^{0,1}$ est le noyau de $d_2 : E_2^{0,1} \to E_2^{2,0}$, on en déduit $E_3^{0,1} \simeq E_2^{0,1} \simeq E_1^{0,1}$. Mais $E_3^{0,1} = E_\infty^{0,1}$ (il n'y a plus de différentielles qui partent ou arrivent sur $E_i^{0,1}$ pour $i > 2$ puisque $E_i^{i,2-i}$ et $E_i^{-i,i}$ sont nuls), qui est nul (la suite spectrale converge vers 0). Ainsi, $E_1^{0,1}$ est bien nul, comme souhaité. □

En fait, on peut montrer, par des méthodes différentes (qui s'appuient sur une analyse fine du recollement par le degré polynomial), le résultat suivant (cf. [PS98]) :

Théorème 15.4 (Piriou, Schwartz). *Supposons que* k *est un corps fini premier* $\mathbb{F}_p$. *Pour tout foncteur simple* S *de* $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$, *on a* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)}(S, S) = 0$.

Terminons ce survol en indiquant le résultat principal obtenu dans [FLS94], qui constitue le calcul le plus spectaculaire qui s'énonce facilement.

Théorème 15.5 (Franjou, Lannes, Schwartz). *Soient p un nombre premier et $i, n \geq 0$ des entiers. On a $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)}(S^1, S^{p^i}) \simeq \mathbb{F}_p$ si $2p^i$ divise n, 0 sinon.*

La démonstration utilise non seulement les suites spectrales d'hypercohomologie associées au complexe de De Rham, mais aussi le lemme de Kuhn.

Avertissement : la bibliographie ci-après ne mentionne que les références citées dans le texte ; très incomplète, elle occulte des références importantes dans le domaine ou qui ont été utilisées pour réaliser ces notes.

La bibliographie complète de ce mini-cours est diponible sur le site suivant.

http ://www.math.univ-paris13.fr/˜djament/Biblio.html

Références

[Bet99] S. Betley – « Stable K-theory of finite fields », *K-Theory* **17** (1999), no. 2, p. 103–111.

[Bor94] F. Borceux – *Handbook of categorical algebra. 1*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 50, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Basic category theory.

[Dwy80] W. G. Dwyer – « Twisted homological stability for general linear groups », *Ann. of Math. (2)* **111** (1980), no. 2, p. 239–251.

[FFPS03] V. Franjou, E. M. Friedlander, T. Pirashvili & L. Schwartz – *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 16, Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[FFSS99] V. Franjou, E. M. Friedlander, A. Scorichenko & A. Suslin – « General linear and functor cohomology over finite fields », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 2, p. 663–728.

[FLS94] V. Franjou, J. Lannes & L. Schwartz – « Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 513–538.

[Fra96] V. Franjou – « Extensions entre puissances extérieures et entre puissances symétriques », *J. Algebra* **179** (1996), no. 2, p. 501–522.

[FS97] E. M. Friedlander & A. Suslin – « Cohomology of finite group schemes over a field », *Invent. Math.* **127** (1997), no. 2, p. 209–270.

[Gab62] P. Gabriel – « Des catégories abéliennes », *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), p. 323–448.

[Gre80] J. A. Green – *Polynomial representations of* GL_n, Lecture Notes in Mathematics, vol. 830, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[Gro57] A. Grothendieck – « Sur quelques points d'algèbre homologique », *Tôhoku Math. J. (2)* **9** (1957), p. 119–221.

[HLS93] H.-W. Henn, J. Lannes & L. Schwartz – « The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects », *Amer. J. Math.* **115** (1993), no. 5, p. 1053–1106.

[Jam78] G. D. James – *The representation theory of the symmetric groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 682, Springer, Berlin, 1978.

[JP91] M. Jibladze & T. Pirashvili – « Cohomology of algebraic theories », *J. Algebra* **137** (1991), no. 2, p. 253–296.

[Kuh94a] N. J. KUHN – « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I », *Amer. J. Math.* **116** (1994), no. 2, p. 327–360.

[Kuh94b] — , « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II », *K-Theory* **8** (1994), no. 4, p. 395–428.

[Kuh95] — , « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. III », *K-Theory* **9** (1995), no. 3, p. 273–303.

[Kuh02] — , « A stratification of generic representation theory and generalized Schur algebras », *K-Theory* **26** (2002), no. 1, p. 15–49.

[Lan92] J. LANNES – « Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1992), no. 75, p. 135–244, avec un appendice de Michel Zisman.

[Mac95] I. G. MACDONALD – *Symmetric functions and Hall polynomials*, second éd., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995, With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.

[Mit72] B. MITCHELL – « Rings with several objects », *Advances in Math.* **8** (1972), p. 1–161.

[ML57] S. MAC LANE – « Homologie des anneaux et des modules », in *Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956*, Georges Thone, Liège, 1957, p. 55–80.

[ML71] — , *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.

[Pir02] T. PIRASHVILI – « Polynomial functors over finite fields (after Franjou, Friedlander, Henn, Lannes, Schwartz, Suslin) », *Astérisque* (2002), no. 276, p. 369–388, Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000.

[Pir03] — , « André-Quillen homology via functor homology », *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), no. 6, p. 1687–1694 (electronic).

[Pop73] N. POPESCU – *Abelian categories with applications to rings and modules*, Academic Press, London, 1973, London Mathematical Society Monographs, No. 3.

[Pow98] G. M. L. POWELL – « The structure of indecomposable injectives in generic representation theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 10, p. 4167–4193.

[Pow05] — , « Unstable modules over the Steenrod algebra revisited », disponible sur http ://www.math.univ-paris13.fr/~powell/home/preprints.html, 2005.

[PR02] T. PIRASHVILI & B. RICHTER – « Hochschild and cyclic homology via functor homology », *K-Theory* **25** (2002), no. 1, p. 39–49.

[PS98] L. PIRIOU & L. SCHWARTZ – « Extensions de foncteurs simples », *K-Theory* **15** (1998), no. 3, p. 269–291.

[PW92] T. PIRASHVILI & F. WALDHAUSEN – « Mac Lane homology and topological Hochschild homology », *J. Pure Appl. Algebra* **82** (1992), no. 1, p. 81–98.