Représentations génériques des groupes linéaires : catégories de foncteurs en grassmanniennes, avec applications à la conjecture artinienne

Soient $\mathcal{E}$ la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_2$, $\mathcal{E}^f$ la sous-catégorie pleine des espaces de dimension finie et $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{E}^f$ vers $\mathcal{E}$. Cette catégorie intervient dans certaines branches de l'algèbre et de la topologie.

Le but de ce travail est d'étudier la structure globale de la catégorie $\mathcal{F}$, notamment la *conjecture artinienne*, qui équivaut au caractère localement noethérien de cette catégorie. Nous démontrons que le produit tensoriel entre un foncteur fini et le foncteur projectif standard $P^{\otimes 2}$ associé à un espace vectoriel de dimension 2 est noethérien.

Nous introduisons à cet effet d'autres catégories de foncteurs, nommées *catégories de foncteurs en grassmanniennes*. La principale d'entre elles, notée $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, est définie comme suit. On note $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}$ la catégorie dont les objets sont les couples (V,W), où V est un objet de $\mathcal{E}^f$ et W un sous-espace de V. La catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ est la catégorie des foncteurs de $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}$ vers $\mathcal{E}$. L'outil principal pour relier les catégories $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ est le foncteur d'*intégrale* $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F}$, donné sur les objets par

$$\omega(X)(V) = \bigoplus_{W \subset V} X(V,W).$$

Le foncteur ω permet d'énoncer une forme très forte de la conjecture artinienne, décrivant la filtration de Krull de la catégorie $\mathcal{F}$. Notre *théorème de simplicité généralisé* établit une version faible de cette conjecture. C'est grâce à lui que l'on démontre le résultat précédemment évoqué sur la structure de $P^{\otimes 2} \otimes F$ (avec F fini), que nous avons également obtenu par l'usage conjoint de foncteurs hom internes et de considérations issues de la théorie des représentations modulaires.

Nous décrivons la riche structure algébrique des catégories de foncteurs en grassmanniennes, équivalentes à des catégories de comodules dans $\mathcal{F}$. La structure de base de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ peut se traiter de façon analogue à celle de $\mathcal{F}$, à l'aide d'un *foncteur différence* : nous établissons que les foncteurs finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ sont polynomiaux, ce qui nous permet de classifier les objets simples de cette catégorie. Nous démontrons par ailleurs un théorème d'annulation cohomologique fondamental relatif au foncteur ω, qui étend un grand nombre de résultats antérieurs en cohomologie des foncteurs. Il permet également de généraliser une étape essentielle de la démonstration de Suslin de l'isomorphisme entre K-théorie stable et homologie de Mac Lane pour des systèmes de coefficients polynomiaux.