Résultats de connectivité pour la stabilité homologique des groupes linéaires (d'après van der Kallen)

Notes d'exposés du groupe de travail en topologie algébrique

Nantes/Angers

Aurélien DJAMENT

mai-juin 2010

Résumé

Dans cet exposé, on se propose essentiellement d'expliquer les résultats du § 2 de l'article [vdK80] de van der Kallen. Ils donnent une minoration de la connectivité d'un ensemble simplicial muni d'une action du groupe linéaire (sur un anneau quelconque) qui s'avère incontournable (à des variantes près, notamment dues à Charney — cf. [Cha80] —, mais qui reposent toujours sur le même principe) dans toutes les démonstrations de la stabilité homologique pour les groupes linéaires sur un anneau dont le rang stable de Bass est fini.

Table des matières

1 Préliminaires

Rappelons quelques façons fondamentales de construire des ensembles simpliciaux ou quasi-simpliciaux.

- *Les complexes simpliciaux* : soient X un ensemble et $\mathcal{X}$ un ensemble de parties non vides de X qui est stable par sous-ensemble non vide (on parle parfois de complexe simplicial). On peut associer à $\mathcal{X}$ un ensemble quasi-simplicial $C(\mathcal{X})$ dont les i-simplexes sont les suites ordonnées $(a_0, \dots, a_i)$ de $i+1$ éléments deux à deux distincts de X tels que $\{a_0, \dots, a_i\} \in \mathcal{X}$, les faces étant données comme d'habitude par l'oubli d'une des composantes.
- *Les ensembles ordonnés* : c'est un cas particulier du nerf d'une petite catégorie. Les i-simplexes non dégénérés du nerf d'un ensemble ordonné s'identifient à ses parties totalement ordonnées à $i+1$ éléments.
  On rappelle que tout foncteur (resp. transformation naturelle) entre petites catégories induit un morphisme simplicial (resp. une homotopie) entre les nerfs correspondants.
- *La subdivision barycentrique* : à tout ensemble simplicial ou quasi-simplicial on associe l'ensemble de ses simplexes non dégénérés [1], muni de la relation d'ordre engendrée par la relation R définie par $x\,R\,y$ si x est une face de y. Cet ensemble ordonné a le même type d'homotopie que l'ensemble (quasi-)simplicial dont on est parti.
  En particulier, on s'intéressera à la subdivision barycentrique de $C(\mathcal{X})$, ensemble ordonné que nous noterons $O(\mathcal{X})$. C'est souvent un moyen efficace de traiter de la connectivité de complexes simpliciaux.

La construction fondamentale pour obtenir des minorations de connectivité dans le contexte qui est le nôtre est celle du *joint* (on pourra consulter le survol [FG04] à ce sujet, par exemple). Topologiquement, le joint d'une famille d'espaces (X_i) est la colimite homotopique du diagramme formé des X_i, de leur produit et des différentes projections. Le cas de deux espaces sera le plus souvent suffisant, on note $X * Y$ le joint de deux espaces X et Y. Dès lors que X et Y sont pointés et ont une topologie raisonnable, leur joint a le type d'homotopie de la suspension de leur produit contracté.

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux catégories, on définit le joint de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ comme la catégorie $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ dont la classe d'objets est la somme des classes d'objets de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et dont les ensembles de morphismes sont définis de sorte que l'inclusion $\mathcal{A} \to \mathcal{A} * \mathcal{B}$ sur les objets définisse un foncteur pleinement fidèle, de même pour $\mathcal{B} \to \mathcal{A} * \mathcal{B}$, que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}*\mathcal{B}}(A, B)$ soit réduit à un élément et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}*\mathcal{B}}(B, A)$ vide pour $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ et $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ (cela ne laisse pas le choix pour la composition ; noter que cette construction n'est pas symétrique en $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$). Noter que cette construction induit un joint sur les ensembles ordonnés (vus comme petites catégories).

Le joint de deux ensembles totalement ordonné reste totalement ordonnés ; on a en fait $[n] * [m] \simeq [n+m+1]$ (où, pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $[n]$ l'ensemble ordonné usuel des entiers compris entre 0 et n). Du point de vue simplicial, la construction usuelle du joint est l'extension de Kan à gauche du foncteur joint

$$* : \mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta} \to \mathbf{\Delta}$$

[1] qu'il faut voir, pour en avoir une présentation fonctorielle, comme le quotient de l'ensemble de tous les simplexes par la relation d'équivalence identifiant un sommet et ses dégénérescences.

(composée avec le foncteur canonique des couples d'ensembles simpliciaux vers les ensembles bisimpliciaux) obtenu par restriction du joint des ensembles ordonnés. Explicitement, on a

$$(X * Y)_n = X_n \sqcup Y_n \sqcup \bigsqcup_{i+j=n-1} X_i \times Y_j$$

(on laisse en exercice la description des faces et dégénérescences).

Rappelons la signification de la n-connexité d'un espace (ce qui peut ici signifier espace topologique, suffisamment raisonnable s'il y a lieu, ou ensemble (quasi-)simplicial) X : pour $n < -1$, on convient que cette condition est vide ; un espace (-1)-connexe est un espace non vide, un espace 0-connexe est un espace non vide connexe par arcs, un espace n-connexe, pour $n > 0$, est un espace non vide connexe par arcs tel que $\pi_i(X, a)$ soit trivial pour un (ou pour tout) point de base a dans X et $i \leq n$. Par exemple, la sphère $\mathbb{S}^n$ est $(n-1)$-connexe. On définit de même la notion de morphisme n-connexe : c'est un morphisme bijectif entre les π_i pour $i < n$ et surjectif entre les π_n (en faisant attention aux points de base...) ; on a des notions analogues d'acyclicité. Le but d'un morphisme d-connexe dont la source est d-connexe est d-connexe.

Le joint d'un espace n-connexe est d'un espace et d'un espace m-connexe est $(n+m+2)$-connexe. Un énoncé analogue est vrai en remplaçant la connectivité par l'acyclicité ; sa démonstration directe dans le cadre simplicial est un avatar de la formule de Künneth.

Dans la suite, nous traiterons principalement d'ensembles ordonnés. On introduit dans ce cadre les notations suivantes. Ici, X est un ensemble ordonné, x un élément de X et A un sous-ensemble de X.

$$Pt_A^+(x) := \{y \in A \,|\, y > x\} \;;$$

$$Pt_A^-(x) := \{y \in A \,|\, y < x\} \;;$$

$$A^+(x) := \{y \in A \,|\, y \geq x\} \;;$$

$$A^-(x) := \{y \in A \,|\, y \leq x\} \;;$$

$$Pt_A(x) := Pt_A^+(x) \sqcup Pt_A^-(x).$$

On appelle $Pt_A(x)$ le *pont* (*link* en anglais) de A au-dessus de x, il s'identifie au joint de $Pt_A^+(x)$ et $Pt_A^-(x)$.

L'intérêt des ponts provient du lemme suivant :

Lemme 1.1. *Soient E un ensemble ordonné, F un sous-ensemble de E et d un entier. On suppose que $E \setminus F$ est un ensemble ordonné discret et que, pour tout $a \in E \setminus F$, le classifiant de l'ensemble ordonné $Pt_E(a)$ est $(d-1)$-acyclique (resp. $(d-1)$-connexe). Alors l'inclusion $F \hookrightarrow E$ induit un morphisme d-acyclique (resp. d-connexe) entre les classifiants.*

Démonstration. Le classifiant BE de E est la réunion du classifiant de F et des classifiants des $Pt_E(a) \cup \{a\}$ pour $a \in E \setminus F$. Du fait que $E \setminus F$ est discret, on a $(Pt_E(a) \cup \{a\}) \cap F = Pt_E(a)$ pour $a \in E \setminus F$. Par conséquent, on dispose d'une suite cofibre

$$\bigsqcup_{a \in E \setminus F} BPt_E(a) \to BF \sqcup \bigsqcup_{a \in E \setminus F} B(Pt_E(a) \cup \{a\}) \to BE$$

et la suite exacte longue d'homologie associée donne la conclusion, puisque $B(Pt_E(a) \cup \{a\})$ est contractile. (Dit topologiquement, BE s'obtient à partir de BF en attachant un cône à $BPt_E(a)$ pour tout $a \in E \setminus F$.)

L'assertion relative à la connectivité s'obtient de façon analogue, en utilisant le théorème de van Kampen. □

2 Lemmes abstraits de connectivité

Van der Kallen fonde son résultat de connectivité pour les groupes linéaires sur des lemmes généraux de nature topologico-combinatoire. Nous en présenterons la version légèrement revisitée par Charney ([Cha84], § 1).

Comme d'habitude, on identifie un ensemble ordonné avec le nerf de la catégorie associée, voire à sa réalisation topologique si on préfère travailler avec de « vrais » espaces.

Le premier lemme est très général et élémentaire.

Lemme 2.1. *Soient X un ensemble ordonné et A un sous-ensemble de X. Supposons que, pour tout $x \in X$, l'ensemble ordonné $A^-(x)$ possède un plus grand élément. Alors A est un rétracte par déformation de X.*

Démonstration. On note $i : A \to X$ l'inclusion et $r : X \to A \quad x \mapsto \sup A^-(x)$. Alors i et r sont deux morphismes d'ensembles ordonnés tels que $ri = id_A$ et $ir \geq id_X$, de sorte que ir est homotope à l'identité (il y a une transformation naturelle entre les deux). □

Les deux lemmes suivants nécessitent un peu plus de travail, fondé sur des arguments de recollement à la Mayer-Vietoris/van Kampen et la notion de joint, et s'appliquent dans le cadre de la subdivision barycentrique de complexes simpliciaux.

Plus précisément, on se donne un ensemble X et un ensemble de parties non vides $\mathcal{X}$ de X stable par sous-parties non vides.

On introduit les notations suivantes :

1. si $v = (v_1, \dots, v_i)$ est une suite d'éléments distincts de X, on note $\mathcal{X}[v]$ l'ensemble des parties non vides de X dont la réunion avec $\{v_1, \dots, v_i\}$ est disjointe et dans $\mathcal{X}$;
2. si Y est une partie de X, on note $\mathcal{X}/Y$ l'intersection de $\mathcal{X}$ et de l'ensemble des parties de Y.

(Ces parties restent des complexes simpliciaux : elles ne contiennent pas l'ensemble vide et sont stables par sous-ensemble non vide.)

On note enfin $Z^iO(\mathcal{X})$, où $z = (z_1, \dots, z_i)$ est une suite d'éléments distincts extérieurs à X, l'ensemble des suites finies non vides d'éléments distincts de $X \sqcup \{z_1, \dots, z_i\}$ strictement supérieures à z et dont la différence avec z appartient à $O(\mathcal{X})$, et

$$\gamma_i : O(\mathcal{X}) \to Z^iO(\mathcal{X}) \qquad (v_1, \dots, v_n) \mapsto (v_1, \dots, v_n, z_1, \dots, z_i)$$

(c'est une fonction croissante).

Si $v = (v_1, \dots, v_n)$ est une suite finie d'éléments de X, on note $|v| = n$ la longueur de v.

Lemme 2.2. *Soient d un entier et $\mathcal{X}$ un complexe simplicial dans X. Supposons que pour tout $v \in O(\mathcal{X})$, l'ensemble ordonné $O(\mathcal{X}[v])$ est $(d - |v|)$-acyclique. Alors l'application*

$$\gamma_n : O(\mathcal{X}) \to Z^n O(\mathcal{X})$$

est d-acyclique pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle de plus d-connexe si $O(\mathcal{X})$ est $\min(1, d-1)$*-connexe.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$ il n'y a rien à faire, on suppose donc $n > 0$. On établit seulement l'assertion relative à l'acyclicité ; celle concernant la connectivité est analogue (via le théorème de van Kampen) et nous n'en aurons pas usage.

Notons

$$\delta : O(\mathcal{X}) \to Z^n O(\mathcal{X}) \qquad (v_1, \dots, v_i) \mapsto (z_1, \dots, z_n, v_1, \dots, v_i),$$

$$P = \{(v_1, \dots, v_i) \in Z^n O(\mathcal{X}) \mid v_i = z_n\} \quad \text{et}$$

$$P' = Z^n O(\mathcal{X}) \setminus \delta(O(\mathcal{X})).$$

Grâce au lemme 2.1, P est un rétracte par déformation de P', de sorte que l'inclusion $P \hookrightarrow P'$ est une équivalence d'homotopie. Par ailleurs, l'ensemble ordonné P est isomorphe à $Z^{n-1}O(\mathcal{X})$ via

$$h : Z^{n-1}O(\mathcal{X}) \to P \quad (v_1, \dots, v_i) \mapsto (v_1, \dots, v_i, z_n).$$

Comme γ_n coïncide avec la composition suivante :

$$O(\mathcal{X}) \xrightarrow{\gamma_{n-1}} Z^{n-1}O(\mathcal{X}) \xrightarrow{h} P \hookrightarrow P' \hookrightarrow Z^n O(\mathcal{X}),$$

il suffit, compte-tenu de l'hypothèse de récurrence et de ce qui précède, d'établir que l'inclusion de P' dans $Z^n O(\mathcal{X})$ est d-acyclique. On utilise à cet effet la filtration

$$P' = Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset \bigcup_r Q_r = Z^n O(\mathcal{X})$$

dans laquelle Q_r est la réunion de Q_{r-1} et de l'image par δ des suites de $Z^n O(\mathcal{X})$ de longueur r de $O(\mathcal{X})$: il suffit de montrer que chaque inclusion $Q_{r-1} \hookrightarrow Q_r$ est d-acyclique, ou encore, d'après le lemme 1.1, que $Pt_{Q_r}(\delta(v))$ est $(d-1)$-acyclique pour $v \in O(\mathcal{X})$ de longueur r.

Pour v de longueur r, $Pt^-_{Q_r}(\delta(v))$ a le type d'homotopie d'une sphère $\mathbb{S}^{r-2}$, car ses i-simplexes sont les parties strictes à $i+1$ éléments d'un ensemble à r éléments (on obtient ainsi la subdivision barycentrique de la frontière du $(r-1)$-simplexe standard). On a donc

$$Pt_{Q_r}(\delta(v)) \simeq \Sigma^{r-1} Pt^+_{Q_r}(\delta(v)),$$

de sorte qu'il suffit de vérifier que $Pt^+_{Q_r}(\delta(v))$ est $(d-r)$-acyclique. On constate à cet effet que l'application

$$Z^{n-1}O(\mathcal{X}[v]) \to Pt^+_{Q_r}(\delta(v)) \quad (s_1, \dots, s_k) \mapsto (s_1, \dots, s_k, z_n, v_1, \dots, v_r)$$

est une équivalence d'homotopie d'inverse

$$(t_1, \dots, t_k) \mapsto (t_1, \dots, t_j) \ \text{ où } \ t_{j+1} = z_n$$

(cf. lemme 2.1).

L'hypothèse de récurrence sur n assure que l'inclusion $O(\mathcal{X}[v]) \hookrightarrow Z^{n-1}O(\mathcal{X}[v])$ est $(d-r)$-acyclique (utiliser les égalités $\mathcal{X}[v][v'] = \mathcal{X}[v,v']$). Mais $O(\mathcal{X}[v])$ est $(d-r)$-acyclique par hypothèse, donc $Z^{n-1}O(\mathcal{X}[v])$ puis $Pt^{+}_{Q_r}(\delta(v))$ sont bien $(d-r)$-acycliques, ce qui achève la démonstration. □

Lemme 2.3. *Soient Y une partie de X, $\mathcal{X}$ un complexe simplicial de X et d un entier. Supposons que $O(\mathcal{X}[v]/Y)$ est $(d-|v|)$-connexe pour tout $v \in O(\mathcal{X}) \setminus O(\mathcal{X}/Y)$.*

1. *Si $O(\mathcal{X}/Y)$ est $(d-1)$-connexe, alors l'inclusion $O(\mathcal{X}/Y) \hookrightarrow O(\mathcal{X})$ est d-connexe.*
2. *Si $O(\mathcal{X}/Y)$ est d-connexe, alors $O(\mathcal{X})$ est d-connexe.*

Démonstration. La seconde assertion est une conséquence directe de la première, que l'on établit en filtrant $O(\mathcal{X})$ de façon assez analogue à la démonstration précédente : on note P_0 le sous-ensemble de $O(\mathcal{X})$ formé des suites dont l'un des termes appartient à Y, et P_i est la réunion de P_0 et de l'ensemble des suites de $O(\mathcal{X})$ dont la longueur est au plus i.

L'ensemble ordonné $O(\mathcal{X}/Y)$ est un rétracte par déformation de P_0 par le lemme 2.1, donc il suffit de démontrer que chaque inclusion $P_{i-1} \hookrightarrow P_i$ est d-connexe. On le fait encore en utilisant le lemme 1.1, grâce auquel il suffit d'établir que pour toute suite v de longueur i de P_i à valeurs dans $X \setminus Y$, $Pt_{P_i}(v) \simeq \Sigma^{i-1}Pt^{+}_{P_i}(v)$ est $(d-1)$-connexe.

Or [2] $Pt^{+}_{P_i}(v) \simeq Z^i(P_i[v]) = Z^i(P_0[v]) \simeq Z^iO(\mathcal{X}[v]/Y)$ (toujours par le lemme 2.1), qui est $(d-i)$-connexe par hypothèse. En utilisant les égalités $(\mathcal{X}[v]/Y)[w] = \mathcal{X}[v,w]/Y$, on voit qu'on peut appliquer le lemme 2.2 pour en déduire que $Pt^{+}_{P_i}(v)$ est $(d-i)$-connexe, puis que $Pt_{P_i}(v)$ est $(d-1)$-connexe, d'où la conclusion. □

Lemme 2.4. *Soient Y un sous-ensemble de X, $\mathcal{X}$ un complexe simplicial de X et d un entier. On suppose que, pour tout $v \in O(\mathcal{X}) \setminus O(\mathcal{X}/Y)$ de longueur k, l'ensemble ordonné $O(\mathcal{X}[v]/Y)$ est $(d-k+1)$-connexe et qu'il existe $y \in O(\mathcal{X})$ de longueur 1 tel que $\mathcal{X}/Y \subset \mathcal{X}[y]$. Alors $O(\mathcal{X})$ est $(d+1)$-connexe.*

Démonstration. On considère la même filtration (P_i) de $O(\mathcal{X})$ que dans la démonstration du lemme 2.3. Celui-ci montre que les inclusions $P_i \hookrightarrow P_{i+1}$ sont $(d+1)$-connexes ($O(\mathcal{X}/Y) = O(\mathcal{X}[y]/Y)$ est d-connexe). Il suffit donc de montrer que P_1 est $(d+1)$-connexe, ou encore que $P_0 \cup \{y\}$ l'est, car on établit que l'inclusion $P_0 \cup \{y\} \hookrightarrow P_1$ est $(d+1)$-connexe de la même façon que $P_0 \hookrightarrow P_1$.

Remarquons que l'ensemble ordonné $Pt_{P_0}(y)$ est d-connexe (cf. démonstration du lemme 2.3). De plus, l'inclusion $O(\mathcal{X}/Y) \hookrightarrow P_0$, qui est une équivalence d'homotopie (cf. démonstration précédente), se factorise à travers l'inclusion $i : Pt_{P_0}(y) \hookrightarrow P_0$, via le morphisme

$$O(\mathcal{X}/Y) \hookrightarrow Pt_{P_0}(y) \qquad (v_1, \ldots, v_k) \mapsto (v_1, \ldots, v_k, y)$$

(qui est bien défini en raison de l'hypothèse $\mathcal{X}/Y \subset \mathcal{X}[y]$) ; i induit donc un épimorphisme en homologie. La suite exacte longue associée à la cofibration

$$Pt_{P_0}(y) \to P_0 \to P_0 \cup \{y\}$$

[2] On commet un abus transparent sur la notation Z^i dans l'égalité qui suit.

(cf. démonstration du lemme 1.1) permet d'en déduire que $P_0 \cup \{y\}$ est $(d+1)$-acyclique (la connectivité s'obtient de même par van Kampen), ce qui achève la démonstration.

□

3 Les conditions de Bass-Vaserstein

Pour plus de clarté, nous nous plaçons dans la situation générale suivante. On considère une catégorie additive $\mathcal{A}$, et l'on note $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie des monomorphismes scindés de $\mathcal{A}$.

Étant donné deux objets A, B et M de $\mathcal{A}$, on considère la condition suivante :

(BV)(A,M) Pour tout $u \in \mathbf{M}(\mathcal{A})(A, A \oplus M)$, il existe $f \in \mathcal{A}(A \oplus M, M)$ et $v \in \mathbf{M}(\mathcal{A})(A, M)$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "v"'] & A \oplus M \arrow[d, "f"] & M \arrow[l] \arrow[dl, "id"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

où la flèche supérieure droite est l'inclusion canonique.

Si cette condition est vérifiée, on dira que M est *gros par rapport à* A (cette notion est due à Vaserstein).

Par définition, on dit qu'un anneau A est de rang stable de Bass fini (à gauche) s'il existe un A-module à gauche libre de rang fini qui est gros par rapport à A. Le rang stable de Bass[3] de A est alors, par définition, le rang minimal de ce module libre, augmenté d'un entier relatif c de petite valeur absolue dont la valeur varie selon les auteurs.

Si U et V sont deux objets de $\mathcal{A}$, on note $E(U, V)$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(U \oplus V)$ engendré par les deux sous-groupes triangulaires stricts (isomorphes à $\mathcal{A}(U, V)$ et $\mathcal{A}(V, U)$). Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n(U, V)$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(U^{\oplus n} \oplus V)$ engendré par les automorphismes élémentaires relativement à la décomposition en somme directe indiquée.

Proposition 3.1 (Bass, Vaserstein...). *Soient A, M et V des objets de $\mathcal{A}$. On suppose que M est gros par rapport à A. Alors :*

1. *$V \oplus M$ est gros par rapport à A ;*
2. *le groupe $E(A, M)$ opère transitivement sur $\mathbf{M}(\mathcal{A})(A, A \oplus M)$;*
3. *plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le groupe $E_n(A, M)$ opère transitivement sur $\mathbf{M}(\mathcal{A})(A^{\oplus n}, A^{\oplus n} \oplus M)$;*
4. *soient $0 \leq k \leq n$ des entiers et $f \in \mathbf{M}(\mathcal{A})(A^{\oplus k}, A^{\oplus n} \oplus M)$. Il existe $u \in E_n(A, M)$ tel que $u.f$ ait pour composantes $A \to A$, où la source est l'un des k facteurs de $A^{\oplus k}$ et le but le premier facteur de $A^{\oplus n} \oplus M$, l'identité (autrement dit, matriciellement, la première ligne est composée d'identités) ; on peut en outre supposer que u stabilise le sous-module $A^{\oplus k}$ des k premiers facteurs de $A^{\oplus n} \oplus M$ et induit l'identité de $A^{\oplus n-k} \oplus M$ (où l'on prend cette fois-ci les derniers facteurs A) ;*

[3] On ne parle ici que de la variante de rang stable définie par Bass la plus courante, qui seule intervient pour les questions de stabilité. Pour différentes notions analogues, on pourra consulter [Bas68].

5. *étant donné* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $v \in \mathbf{M}(\mathcal{A})(A^{\oplus n}, A^{\oplus n} \oplus M)$*, il existe* $a \in \mathbf{M}(\mathcal{A})(A, A^{\oplus n} \oplus M)$ *dont la première composante* $A \to A$ *est l'identité et tel que le morphisme* $(v, a) : A^{\oplus n+1} \to A^{\oplus n} \oplus M$ *appartienne à* $\mathbf{M}(\mathcal{A})$.

4 Application aux suites de vecteurs unimodulaires

La situation est la même que celle de la section précédente.

On note considère l'ensemble $X(A, M) := \mathbf{M}(\mathcal{A})(A, M)$ et le complexe simplicial $\mathcal{X}(A, M)$ qui consiste des parties finies non vides E de $X(A, M)$ telles que le morphisme de $A^{\oplus E} \to M$ de $\mathcal{A}$ défini par les éléments de E appartienne à $\mathbf{M}(\mathcal{A})$. (Dans la situation usuelle des modules sur un anneau, que l'on prend évidemment comme objet A, cela revient à considérer les ensembles de *vecteurs unimodulaires* de M, i.e. formant une base d'un facteur direct de M.)

Théorème 4.1 (van der Kallen). *Supposons que* M *est gros par rapport à* A*. Alors le complexe simplicial* $\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)$ *est* $(n-1)$*-connexe pour tout entier naturel* n*.*

Ce théorème est un cas particulier du résultat suivant, pour lequel nous avons besoin de quelques notations supplémentaires. Si $n > 0$ est un entier et $\delta = 0$ ou 1, on note $Y_\delta(A, M, n)$ le sous-ensemble de $X(A, A^{\oplus n} \oplus M)$ formé des morphismes $u : A \to A^{\oplus n} \oplus M$ dont la première composante $A \to A$ égale δid_A. On note par ailleurs, si $n > 1$, $Z_\delta(A, M, n)$ le sous-ensemble de $X(A, A^{\oplus n} \oplus M)$ formé des morphismes $u : A \to A^{\oplus n} \oplus M$ dont la première composante $A \to A$ égale δid_A et dont la deuxième composante $A \to A$ est l'identité ou zéro.

Théorème 4.2. *Supposons* M *gros par rapport à* A *et donnons-nous* $\delta \in \{0, 1\}$*. Alors :*

1. $\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)/Y_\delta(A, M, n)$ *est* $(n-2)$*-connexe ;*
2. *pour tout* $v = (v_1, \dots, v_k) \in O(\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M))$,
$$\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)[v]/Y_\delta(A, M, n)$$
est $(n-k-2)$*-connexe ;*
3. $\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)/Z_\delta(A, M, n)$ *est* $(n-2)$*-connexe ;*
4. *pour tout* $v = (v_1, \dots, v_k) \in O(\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M))$,
$$\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)[v]/Z_\delta(A, M, n)$$
est $(n-k-2)$*-connexe.*

Démonstration. On établit le théorème par récurrence sur la « taille » du complexe simplicial en jeu, taille définie (pour les seuls besoins de cette démonstration) comme valant $2n$ dans le premier cas, $2n-k$ dans le deuxième, $2n-1$ dans le troisième et $2n-k-1$ dans le dernier.

1. On suppose $n > 1$ (le cas $n = 1$ est évident, puisque $\mathbf{M}(A)(A, M)$ est non vide, M étant gros par rapport à A) et on applique le lemme 2.3 au sous-ensemble $Z_\delta(A, M, n)$ de $Y_\delta(A, M, n)$. Par l'hypothèse de récurrence, on sait que $\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)/Z_\delta(A, M, n)$ est $(n-2)$-connexe et que

$\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)[v]/Z_\delta(A, M, n)$ est $(n-2-|v|)$-connexe pour tout v, de sorte que le lemme 2.3 montre bien que $\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)/Y_\delta(A, M, n)$ est $(n-2)$-connexe.

2. Raisonnement analogue.

3. Considérons le sous-ensemble de $Z_\delta(A, M, n)$ formé des morphismes dont la deuxième composante $A \to A$ est nulle, qui s'identifie à $Y_\delta(A, M, n-1)$ via l'inclusion $A^{\oplus n-1} \oplus M \hookrightarrow A^{\oplus n} \oplus M$ consistant à « insérer un facteur A en deuxième position ». On note y l'élément de $X(A, A^{\oplus n} \oplus M)$ dont la première composante $A \to A$ est $\delta.id$, la seconde id et dont les suivantes sont nulles. On a donc $\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)/Y_\delta(A, M, n-1) \subset \mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)[y]$.

   Soit $v = (v_1, \ldots, v_k)$ un élément de $O(\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)) \setminus O(\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)/Y_\delta(A, M, n-1))$: quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que $v_1 \notin Y_\delta(A, M, n-1)$, i.e. que la deuxième composante $A \to A$ de v_1 est l'identité. Notons a_i, pour $i \in \{2, \ldots, k\}$, la deuxième composante $A \to A$ de v_i et posons $v'_i = v_i - v_1 a_i$ et $v' = (v_1, v'_2, \ldots, v'_k)$. Alors $v' \in O(\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)) \setminus O(\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)/Y_\delta(A, M, n-1))$ et $\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)[v'] = \mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)[v]$ (on a effectué des opérations élémentaires sur les colonnes !). De plus, $(\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)/Y_\delta(A, M, n-1)) \cap \mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)[v] = (\mathcal{X}(A, A^{\oplus (n-1)} \oplus M)/Y_\delta(A, M, n-1))[(v'_2, \ldots, v'_k)]$, qui est $((n-1)-(k-1)-2)$-connexe par l'hypothèse de récurrence. Le lemme 2.4 entraîne donc que $\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)/Z_\delta(A, M, n)$ est $(n-2)$-connexe.

4. Pour $k \geq n$, il n'y a rien à montrer, et pour $k = n-1$ l'assertion se réduit à la non-vacuité du complexe simplicial considéré, qui provient de la proposition 3.1 4. On suppose donc $k < n-1$ (donc en particulier $n \geq 3$), et l'on applique encore la proposition 3.1 4, qui nous garantit, quitte à appliquer un automorphisme de $A^{\oplus n} \oplus M$, qu'on peut supposer que la troisième composante $A \to A$ de v_1 est égale à *id*.

   On applique ensuite le lemme 2.3 en considérant le sous-ensemble de $Z_\delta(A, M, n)$ formé des morphismes dont la troisième composante $A \to A$ est nulle, qui s'identifie (modulo une renumérotation des facteurs) à $Z_\delta(A, M, n-1)$. Alors

$$\mathcal{X}(A, A^{\oplus n} \oplus M)[v]/Z_\delta(A, M, n) \simeq \mathcal{X}(A, A^{\oplus (n-1)} \oplus M)[(v'_2, \ldots, v'_k)]/Z_\delta(A, M, n-1)$$

   où v'_i s'obtient à partir de v_i en ôtant la troisième coordonnée $A \to A$, qui est $((n-1)-(k-1)-2)$-connexe par hypothèse de récurrence. L'autre hypothèse du lemme 2.3 s'établit de façon similaire. Cela achève la démonstration.

□

Références

[Bas68] H. Bass – *Algebraic K-theory*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968.

[Cha80] R. M. Charney – « Homology stability for GL_n of a Dedekind domain », *Invent. Math.* **56** (1980), no. 1, p. 1–17.

[Cha84] R. Charney – « On the problem of homology stability for congruence subgroups », *Comm. Algebra* **12** (1984), no. 17-18, p. 2081–2123.

[FG04] R. Fritsch & M. Golasiński – « Topological, simplicial and categorical joins », *Arch. Math. (Basel)* **82** (2004), no. 5, p. 468–480.

[vdK80] W. van der Kallen – « Homology stability for linear groups », *Invent. Math.* **60** (1980), no. 3, p. 269–295.