Introduction à la stabilité en homologie des groupes discrets

Notes d'exposé du groupe de travail en topologie algébrique Nantes/Angers *

Aurélien DJAMENT

Avril/mai 2010 (révision : mai 2023)

Résumé

On se propose de présenter le problème de la stabilité homologique pour les groupes discrets, à travers quelques motivations et exemples fondamentaux.

L'un des cas les plus importants (et aussi les plus difficiles, dès lors qu'on impose une certaine généralité sur l'anneau de base) connu est celui des groupes linéaires. La référence essentielle est [vdK80]. Ces problèmes sont étroitement reliés à ceux de la stabilisation en K-théorie algébrique.

Un cas beaucoup plus simple, mais qu'on peut aborder par une approche algébrique dont le plan est utilisé pour tous les cas connus de stabilité pour l'homologie des groupes discrets, est celui des groupes symétriques. On le traite dans la deuxième partie de cet exposé introductif.

Dans ce cas, la stabilité est un résultat de 1960 dû à Nakaoka ([Nak60]), obtenu d'abord par des méthodes topologiques. En fait, ce cas est assez exceptionnel en un sens, car on peut calculer complètement l'homologie, stablement comme instablement. On pourra se référer à [AM04] pour une approche algébrique de l'homologie des groupes symétriques.

Table des matières

*L'auteur remercie Jean Lannes de lui signalé une erreur de borne dans les versions antérieures de ces notes, à la remarque 2.5.

1 Présentation du problème, motivations

Pour une part, l'homologie stable des familles adéquates de groupes discrets est à l'homologie instable (ordinaire) ce que l'homotopie stable est à l'homotopie ordinaire. Néanmoins, signalons tout de suite que, contrairement à l'homotopie stable où un cadre axiomatique tout à fait général et adapté existe (la catégorie des spectres), ce n'est pas tout à fait le cas pour les groupes : si, dans des cas simples comme celui de la suite des groupes symétriques ou des groupes linéaires sur un anneau donné, il existe une et une seule façcon de former une homologie stable raisonnable, le type de familles de groupes pour lesquelles on peut mener utilement des constructions analogues n'est pas tout à fait clair ; il semble tout à fait illusoire de penser trouver une catégorie munie d'un foncteur depuis les groupes qui serait analogue à la catégorie des spectres munie du foncteur « spectre en suspensions » depuis les espaces topologiques pointés.

Avant de préciser les choses, rappelons quelques motivations de base pour s'intéresser à l'homotopie stable : un certain nombre d'outils fondamentaux en topologie algébrique comme l'homologie singulière sont « naturellement » des invariants homotopiques stables ; le théorème de Freudenthal montre l'existence d'un domaine de stabilisation pour l'homotopie d'espaces raisonnables avec de bonnes propriétés de finitude ; surtout, la catégorie homotopique des spectres bénéficie de *plus de structure* que la catégorie homotopiques des espaces, ne serait-ce que parce que c'est une catégorie additive (même triangulée). Si l'homotopie stable est extrêmement difficile d'accès, calculer les groupes d'homotopie du spectre des sphères demeurant un Graal de la topologie, la situation est encore pire en homotopie instable, en raison de la structure moins riche : des outils conceptuels majeurs comme la suite spectrale d'Adams ou les résultats globaux sur les catégories de spectres tels que le théorème de nilpotence (Devinatz, Hopkins, Smith, Ravenel) ne possèdent pas d'analogues aussi aboutis en homotopie instable.

Revenons aux groupes discrets (nous parlerons rapidement, plus loin, de situations plus générales).

Considérons une suite de groupes $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ munis de morphismes $i_n : G_n \to G_{n+1}$ (qui seront injectifs dans les exemples considérés). On dit que l'homologie de cette famille de groupes stabilise si pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(i_n)_* : H_i(G_n) \to H_i(G_{n+1})$ (ici les coefficients sont dans $\mathbb{Z}$, où à valeurs dans n'importe quel groupe abélien fixé sur lequel les groupes agissent trivialement — nous discuterons brièvement le cas des coefficients tordus au paragraphe 1.3) soit un isomorphisme pour $n \geq N$. On a donc, sous cette hypothèse,

$$H_i^{st}((G_k)) := H_i(\operatorname*{colim}_k G_k) \simeq \operatorname*{colim}_k H_i(G_k) \simeq H_i(G_n).$$

Il n'y a pas de raison à priori de se limiter à des suites de groupes : tout foncteur depuis un ensemble ordonné filtrant vers les groupes donne lieu à une notion analogue. Néanmoins, tous les cas usuels entrent dans ce cadre ou s'y ramènent aussitôt.

Afin de disposer de résultats de stabilité sous des hypothèses raisonnables, il convient bien sûr de restreindre largement la classe des suites de groupes auxquels on s'intéresse. Voici un cadre qui, sans être complètement satisfaisant, contient la plupart des cas intéressants qui ont été étudiés. Considérons une catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$; nous supposerons de surcroît que son unité 0 en est objet initial. Donnons-nous également un objet A de $\mathcal{C}$, et posons $G_n = \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(A^{\oplus n})$ (il est utile parfois de considérer $G_n = \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(M \oplus A^{\oplus n})$, où M est un autre objet fixé de $\mathcal{C}$). Nous choisissons pour $i_n : G_n \to G_{n+1}$ le morphisme $u \mapsto u \oplus (0 \to A)$, où l'on identifie $A^{\oplus n}$ à $A^{\oplus n} \oplus n$ et $A^{\oplus n+1}$ à $A^{\oplus n} \oplus A$. On pourrait choisir d'autres inclusions de facteurs, mais elles induisent toutes les mêmes applications en homologie, puisqu'elles sont conjuguées sous l'action au but du groupe symétrique Σ_{n+1}. Cette observation anodine s'avère essentielle : la possibilité de permuter les facteurs intervient à plusieurs reprises dans les considérations d'homologie stable. On s'intéresse parfois aussi à des suites de sous-groupes des G_n compatibles aux morphismes i_n (groupes alternés, groupes linéaires spéciaux, sous-groupes de congruences des groupes linéaires...).

Dans la plupart des cas usuels de groupes d'automorphismes de « sommes » itérées d'un objet d'une catégorie monoïdale symétrique, il y a stabilisation, si l'on se restreint à des anneaux raisonnables quand on traite de groupes linéaires. On ne peut néanmoins espérer en général la stabilité, même sur les groupes linéaires sur un anneau commutatif.

Signalons qu'on ne traite que d'homologie, mais que des considérations tout à fait analogues s'en déduisent en cohomologie ; on préfère généralement travailler en homologie (sauf lorsqu'on espère obtenir des renseignements sur les produits en cohomologie) afin de pouvoir bénéficier de la commutation gratuite entre colimites filtrantes et homologie. Bien sûr, dès qu'il y a stabilisation de l'homologie (et donc de la cohomologie), il n'y a pas de problème de $\lim^1$.

Parmi les exemples dont nous ne reparlerons plus dans cet exposé, signalons que plusieurs travaux se sont intéressés à la stabilité pour les groupes de difféomorphismes modulo isotopie de variétés différentiables convenables, relativement à la somme connexe. Le premier est sans doute dû à Harer ([Har85]) ; parmi les plus récents, citons [HW], qui contient comme cas particuliers plusieurs cas antérieurement connus, et qui englobe aussi les automorphismes des groupes libres (voir aussi la bibliographie de cet article).

1.1 Stabilisation et calcul de l'homologie

Le calcul de l'homologie stable s'avère généralement moins inaccessible que celui de l'homologie instable : mes résultats de stabilisation permettent donc d'obtenir des calculs homologiques instables en petit degré, dans la zone de stabilité. Dans certains cas particulièrement favorables, on peut même espérer mieux. Ainsi, pour calculer la (co)homologie des groupes symétriques, on peut commencer par calculer la cohomologie stable (celle du groupe symétrique infini) en exploitant la structure d'algèbre de Hopf, il est ensuite possible d'obtenir des calculs instables complets (cf. [AM04]). (Cela demeure néanmoins exceptionnel.)

Signalons un autre exemple important : les groupes linéaires sur un corps fini k de caractéristique p. Quillen a démontré (cf. [Qui72]) que l'homologie de $GL_\infty(k) = \operatorname*{colim}_{n \in \mathbb{N}} GL_n(k)$ (qui n'est autre que la colimite des homologies des $GL_n(k)$) à coefficients dans $\mathbb{Z}/p$ est triviale. En revanche, le calcul complet de $H_*(GL_n(k); \mathbb{Z}/p)$ pour n fixé, même assez petit (le problème n'est facile que pour $n \leq 2$) semble hors de portée ; on connaît probablement peu de choses à ce sujet. On peut donc déduire de la stabilité homologique pour les groupes linéaires sur k l'annulation de $H_i(Gl_n(k);\mathbb{Z}/p)$ pour $0 < i < n$ lorsque k a au moins trois éléments (Quillen, non publié ; sur $\mathbb{F}_2$ il faut accoître la borne).

Il convient d'ailleurs de noter que la trivialité de l'homologie stable à coefficients dans $\mathbb{Z}/p$ du groupe linéaire sur k est déduite par Quillen d'une annulation instable, pour tous les groupes linéaires, de leur homologie en degré non nul et assez petit par rapport au cardinal du corps ; l'annulation stable sur un corps fini quelconque provient alors d'un argument de changement de corps (lequel semble malheureusement impuissant à donner des renseignements sur la stabilité, même au prix de raffinements).

À coefficients tordus (cf. 1.3), le calcul de l'homologie est également, souvent, plus accessible stablement qu'instablement ; il bénéficie d'une riche structure et de meilleures propriétés de régularité (par exemple, pour les groupes linéaires ou symplectiques, injectivité des produits externes en cohomologie — observation d'Antoine Touzé). On peut ainsi calculer complètement la (co)homologie stable des groupes linéaires sur un corps fini à coefficients dans une algèbre de polynômes ou dans les endomorphismes linéaires d'une algèbre de polynômes, ce qui est loin d'être le cas instablement.

1.2 Problèmes de stabilité pour l'homologie des groupes linéaires et la K-théorie algébrique

L'homologie stable des groupes linéaires sur un anneau A est reliée à la K-théorie algébrique de A ; les problèmes de stabilité sont très voisins dans chaque cas.

Rappelons la construction plus de Quillen : si X est un espace topologique pointé connexe et E un sous-groupe distingué *parfait* (i.e. égal à son groupe dérivé) de $\pi_1(X)$, il existe un espace pointé X^+ muni d'un morphisme $X \to X^+$ qui induit un isomorphisme en homologie (y compris à coefficients tordus) et qui sur les π_1 s'identifie à la projection $\pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1(X)/E$. La construction plus est souvent prise relativement au plus grand sous-groupe distingué parfait de $\pi_1(X)$. Pour le groupe linéaire infini $GL(A)$, ce sous-groupe est le groupe engendré par les matrices élémentaires, noté $E(A)$, qui est aussi le groupe des commutateurs de $GL(A)$. La K-théorie algébrique de A, introduite par Quillen, est définie pour $n > 0$ par $K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+)$. Pour $n = 1$ et $n = 2$ ces groupes ont une interprétation concrète : $K_1(A)$ est l'abélianisé de $GL(A)$ (i.e. son H_1 intégral) ; $K_2(A)$ est isomorphe au noyau du morphisme canonique du groupe de Steinberg de A vers $GL(A)$, ou encore à $H_2(E(A))$. Il existe plusieurs versions instables de la K-théorie algébrique : on peut utiliser la construction plus sur $BGL_n(A)$, mais il existe d'autres possibilités. à chaque fois, les problèmes de stabilité sont très proches de sont de l'homologie des groupes linéaires. L'un des intérêts de disposer de résultats de stabilité est de disposer, dans certains cas, de résultats de finitude pour la K-théorie algébrique.

On ne peut pas espérer de stabilité pour l'homologie des groupes linéaires sur un anneau quelconque. La bonne notion pour disposer d'une telle stabilisation, introduite par Bass (cf. [Bas64] et [Bas68]), est celle de *rang stable* d'un anneau. Un anneau qui possède un rang stable fini a des groupes linéaires dont l'homologie se stabilise (les bornes de stabilisation connues dépendant de ce rang) ; toute algèbre finie sur une anneau commutatif de dimension de Krull finie a un rang stable fini. Dans [Bas64], une des applications des notions de stabilité (présentées dans le cadre de la K-théorie algébrique classique, i.e. sans artillerie homologique) est le caractère de type fini du K_0 et du K_1 d'une $\mathbb{Z}$-algèbre finie. (Il existe bien sûr d'autres résultats de finitude bien plus forts qu'on peut déduire de la stabilité en K-théorie algébrique.)

Dans l'article [vdK80], van der Kallen a démontré la stabilité homologique pour les groupes linéaires sur un anneau arbitraire de rang stable de Bass fini. La borne obtenue a été améliorée par Suslin dans [Sus82], en utilisant la construction de Volodin pour la K-théorie algébrique et — cela semble un argument tout à fait incontournable (et probablement l'un des plus délicats) — une variante des résultats de connectivité de complexes simpliciaux explicites de van der Kallen. Dans [Sus84], Suslin donne une borne encore meilleure pour les *anneaux à nombreuses unités*.

Un survol du problème de la stabilité homologique pour les groupes linéaires se trouve dans le chapitre 2 de [Knu01].

Signalons que les résultats de stabilité connus pour les sous-groupes remarquables du groupe linéaire : sous-groupes de congruence (cf. [Cha84] — il faut ici des hypothèses supplémentaires, notamment en raison de l'absence de matrices de permutations), groupes orthogonaux et symplectiques (cf. [Vog79], [Vog81], [Cha87], [MvdK02], [Col]...) etc. procèdent de méthodes assez analogues, la détermination de la haute connectivité d'un ensemble simplicial idoine pouvant évidemment s'avérer très délicate.

1.3 Stabilisation à coefficients

Toutes les considérations précédentes mettaient en jeu des coefficients triviaux dans l'homologie. On peut évidemment se poser la question pour des suites de coefficients compatibles : si (G_n) est une suite de groupes avant des morphismes $i_n : G_n \to G_{n+1}$ et qu'on se donne, pour tout n, un G_n-module M_n ainsi que des morphismes G_n-équivariants $M_n \to \mathrm{Res}_{i_n}(M_{n+1})$, on peut se demander si les morphismes $H_k(G_n; M_n) \to H_k(G_{n+1}; M_{n+1})$ induits par i_n sont des isomorphismes pour n assez grand (dépendant de k). Dans le cas où les G_n proviennent d'une catégorie monoïdale symétrique comme spécifié plus haut, une manière très naturelle de construire de tels systèmes de coefficients consiste à évaluer sur $A^{\oplus n}$ un foncteur de notre catégorie vers les groupes abéliens.

Le premier travail substantiel sur la stabilité à coefficients tordus est dû à Dwyer (cf. [Dwy80]) et concerne les groupes linéaires sur un anneau principal A. Il donne des hypothèses techniques sur les systèmes de coefficients associés assurant la stabilité, dont la principale utilisation concerne les foncteurs polynomiaux depuis les A-modules projectifs de type fini vers les groupes abéliens. (La borne obtenue est la même qu'à coefficients constants, augmentée du degré du foncteur.) La technique de démonstration est essentiellement la même que pour les coefficients constants : on utilise toujours de façcon cruciale des ensembles simpliciaux appropriés sur lesquels les groupes linéaires agissent. Depuis le travail de Dwyer, de nombreux résultats de stabilité ([vdK80], [Cha87]...) ont traité également des coefficients tordus (sous hypothèse de type polynomial) en raffinant les méthodes employées à coefficients constants.

Comme dans le cas des coefficients constants, l'homologie stable à coefficients tordus est souvent beaucoup moins inaccessible (cf. 1.1). Mais, à l'inverse des problèmes de stabilité, les méthodes employées pour mener à bien des calculs stables à coefficients tordus s'avèrent « orthogonales » à celles permettant le calcul à coefficients constants (dans les rares cas où on sait le faire !). Ainsi, pour les groupes linéaires sur un corps fini, le calcul stable à coefficients tordus par un bifoncteur polynomial sans terme constant repose sur un théorème profond de Betley et Suslin (cf. l'appendice de [FFSS99]) et les méthodes de calcul spécifiques à l'homologie des foncteurs (cf. le même article, par exemple).

Noter que la *K-théorie stable* (homologie de la fibre homotopique du morphisme canonique $BGL_\infty \to BGL_\infty^+$) permet de bien « distinguer » les problèmes de coefficients constants et tordus. Un analogue pour les groupes symétriques, permettant d'aborder leur homologie stable à coefficients tordus, est étudié par Beltey dans [Bet02] (qui déduit également la stabilité à coefficients tordus de la stabilité à coefficients constants pour les groupes symétriques).

1.4 Relations avec la (co)homologie des groupes de Lie et des groupes algébriques

Il n'y a pas de raison à priori de se limiter aux groupes discrets pour poser des problèmes de stabilité (co)homologique. Pour les groupes topologiques classiques, ces problèmes sont souvent nettement plus aisés. Par exemple, pour tout entier $n > 0$, la fibration usuelle $SO(n) \to SO(n+1) \to \mathbb{S}^n$ montre que l'homologie des groupes topologiques $SO(n)$, c'est-à-dire l'homologie singulière de leurs classifiants, vérifie la propriété de stabilité suivante : $H_i(BSO(n)) \to H_i(BSO(n+1))$ est surjectif $i \leq n$ pour et bijectif pour $i < n$. Cet exemple est classiquement cité comme une intuition pour nous guider dans le cas des groupes discrets, qui est beaucoup plus compliqué (la fibration précédente est une trivialité, tandis que les complexes dont la haute connectivité joue un rôle crucial dans les démonstrations de stabilité pour les groupes discrets, qui en constituent l'analogue, sont beaucoup plus délicats à étudier).

Une autre situation où il est naturel de s'intéresser à de la stabilité cohomologique est donnée par les groupes algébriques. On passe ici à la cohomologie, car les catégories de représentations des groupes algébriques n'ont généralement pas assez d'objets projectifs.

Il existe dans ce cadre plusieurs problèmes intéressants de stabilité cohomologique : on peut bien sûr s'intéresser à la stabilité cohomologique pour les familles infinies de groupes algébriques classiques, de la même façcon que pour les groupes discrets. En fait, ce problème est relié au problème de stabilité analogue sur les groupes discrets de points, d'après le résultat de comparaison suivant, établi dans [CPSvdK77] :

Théorème 1.1 (Cline-Parshall-Scott-van der Kallen)**.** *Soient p un nombre premier, G un groupe algébrique semi-simple déployé sur $\mathbb{F}_p$ et M un G-module de dimension finie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers r et l tels que les morphismes naturels*

$$H^n(G; M^{(e)}) \to H^n(G(\mathbb{F}_{p^m}); M)$$

soient des isomorphismes pour tous $m \geq l$ et $e \geq r$, où $M^{(e)}$ désigne le G-module déduit de M par application de e itérations de la torsion de Frobenius.

(Ce théorème procure donc également deux résultats de stabilité cohomologique de nature differente de ceux discutés dans cet exposé : l'un relativement à la torsion de Frobenius en cohomologie des groupes algébriques, l'autre relativement à la taille du corps en cohomologie des groupes discrets de points associés au groupe algébrique.)

2 Démonstration de la stabilité homologique pour les groupes symétriques

Théorème 2.1 (Nakaoka). *Soient M un groupe abélien, que l'on munit de l'action triviale des groupes symétriques, n et i deux entiers naturels.*

1. *Le morphisme $H_i(\Sigma_n; M) \to H_i(\Sigma_{n+1}; M)$ est une inclusion directe ;*
2. *c'est un isomorphisme si $n \geq 2i$.*

Nous montrerons seulement le deuxième point ici (le premier, spécifique aux groupes symétriques, n'a guère de rapport avec la stabilité), en fait sous la forme légèrement affaiblie suivante :

Proposition 2.2. *Pour tout groupe abélien M et tous entiers naturels n et i, l'application $\alpha_i(n) : H_i(\Sigma_n; M) \to H_i(\Sigma_{n+1}; M)$ est surjective pour $n \geq 2i$ et injective pour $n > 2i$.*

À cet effet, on introduit les ensembles quasi-simpliciaux (i.e. avec des faces mais pas de dégénérescences ; plus précisément ce sont des foncteurs contravariants de la sous-catégorie des injections de la catégorie simpliciale $\mathbf{\Delta}$ vers les Σ_n-ensembles) $X(E)$, où E est un ensemble, donnés par

$$X(E)_i = \{(a_0, \dots, a_i) \in E^{i+1} \mid a_k \neq a_l \text{ pour } k \neq l\}.$$

(Les faces sont données comme d'habitude par l'oubli d'une coordonnée.)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X(n) = X(\{1, \dots, n\})$. Comme X définit un foncteur des ensembles vers les ensembles quasi-simpliciaux, $X(n)$ est un Σ_n-ensemble.

La proposition 2.2 sera une conséquence des deux résultats suivants :

Proposition 2.3. *Pour tous entiers n et i tels que $0 \leq i \leq n-1$, on a $X(n)_i \simeq \Sigma_n / \Sigma_{n-i-1}$ comme Σ_n-ensembles.*

Cette propriété est immédiate.

Proposition 2.4. *L'homologie réduite de l'ensemble quasi-simplicial $X(n)$ est nulle en degrés inférieurs à $n-2$.*

Démonstration. On considère les ensembles quasi-simpliciaux suivants. Si (E, x) est un ensemble pointé, on note $X(E, x)$ le sous-ensemble quasi-simplicial de $X(E)$ formé des simplexes $(a_0, \dots, a_i)$ tels que $a_i \neq x$ pour $i \geq 1$. On fait alors les observations suivantes :

1. l'ensemble quasi-simplicial $X(E, x)$ est un cône de $X(E \setminus \{x\})$, il est en particulier contractile ;
2. $X(E)$ est la réunion des $X(E, a)$ pour $a \in E$;
3. pour toute partie finie non vide F de E, l'intersection des $X(E, a)$ pour $a \in F$ est égale à la réunion des $X((E \setminus F) \cup \{a\}, a)$ pour $a \in F$, et l'intersection de deux sous-ensembles quasi-simpliciaux distincts de ce type est égale à $X(E \setminus F)$.

On en déduit alors la conclusion par récurrence sur n par un argument à la Mayer-Vietoris. $\square$

Démonstration de la proposition 2.2. Considérons le complexe simplicial augmenté associé à $X(n)$: on dispose de deux suites spectrales de même aboutissement, l'une obtenue en prenant d'abord l'homologie simpliciale puis l'homologie de groupe relativement à l'action de Σ_n, l'autre obtenue en considérant d'abord l'homologie de groupe.

D'après la proposition 2.4, l'aboutissement commun est nul en degré inférieur à $n-2$.

D'après la proposition 2.3, la deuxième prend la forme

$$E^1_{i,j}(n) = H_j(\Sigma_n; \mathbb{Z}[\Sigma_n/\Sigma_{n-i}]) \simeq H_j(\Sigma_{n-i})$$

(la suite spectrale est indexée de telle sorte que la différentielle d_r soit de degré $(-r, r-1)$; on convient que ce terme est nul pour $n-i<0$ — on a regradué en changeant i en $i-1$ pour que la suite spectrale soit du premier quadrant).

On peut de surcroît facilement calculer la différentielle d^1, en utilisant que les automorphismes intérieurs agissent trivialement en homologie : on obtient que $d^1_{i,j} : E^1_{i+1,j} \to E^1_{i,j}$ est égal au morphisme $\alpha_j(n-i-1) : H_j(\Sigma_{n-i-1}) \to H_j(\Sigma_{n-i})$ si $0 \le i < n$ est pair et est nul sinon. Par conséquent, on a $E^2_{i,j} \simeq \mathit{ker}\, \alpha_j(n-i)$ si i est impair et $E^2_{i,j} \simeq \mathit{coker}\, \alpha_j(n-i-1)$ si i est pair. On établit alors le résultat d'annulation souhaité par récurrence sur le degré homologique, en examinant les termes qui doivent survivre dans la suite spectrale. $\square$

Remarque 2.5. Pour les groupes alternés A_n, on peut procéder de la même manière, obtenant une borne de stabilité légèrement moins bonne (qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter et démontrer) : tout fonctionne pareillement (avec le même ensemble quasi-simplicial), à l'exception du fait que la proposition 2.3 prend la forme d'un isomorphisme de A_n-ensembles $X(n)_i \simeq A_n/A_{n-i-1}$ pour $0 \le i \le n-3$ seulement.

Une meilleure borne en caractéristique impaire Si on est à coefficients dans un $\mathbb{Z}[1/2]$-module (sur lequel les groupes symétriques opèrent trivialement), on peut améliorer la borne de stabilité par un argument de comparaison qui assure que la suite spectrale considérée s'arrête à la deuxième page.

Pour cela on définit un morphisme de suites spectrales $E_{i,j}(n) \to E_{i+2,j}(n+2)$ comme suit. Pour tout ensemble E, si l'on considère deux ensembles a et b distincts et n'appartenant par à E, on dispose pour tout i d'une application linéaire

$$\mathbb{Z}[1/2][X(E)_i] \to \mathbb{Z}[1/2][X(E \sqcup \{a,b\})_{i+2}]$$

envoyant $[x_0, \dots, x_i]$ sur $\frac{1}{2}([x_0, \dots, x_i, a, b] + [x_0, \dots, x_i, b, a])$. Ces applications sont compatibles à la différentielle de Moore, et définissent donc un morphisme de complexes

$$\mathbb{Z}[1/2][X(E)] \to \Sigma^{-2}\mathbb{Z}[1/2][X(E \sqcup \{a,b\})]$$

(où Σ désigne la suspension). Comme celui-ci est $\mathfrak{S}(E)$-équivariant, il induit un morphisme de suites spectrales $E^r_{i,j}(E) \to E^r_{i+2,j}(E \sqcup \{a,b\})$, ou encore

$$E^r_{i,j}(n) \to E^r_{i+2,j}(n+2).$$

Examinons-le à la page 2. D'après ce qui précède, $E^2_{i,j}(n)$ ne dépend que de j, $n-i$ et de la parité de i, lorsque i est positif ; on a donc un isomorphisme canonique $E^2_{i+2,j}(n+2) \simeq E^2_{i,j}(n)$ pour $i \geq 0$. Le morphisme $E^2_{i+2,j}(n+2) \to E^2_{i,j}(n)$ précédent n'est autre que cet isomorphisme. Comme toute différentielle d'une page E^r, $r \geq 2$, partant d'une des deux premières colonnes ($i = 0$ ou 1) est nulle puisque toutes les suites spectrales sont du premier quadrant, on en déduit par récurrence sur n l'effondrement à la deuxième page.

En conséquence, on a $E^2_{i,j}(n) = 0$ pour $i + j < n - 2$, d'où l'on déduit que $\alpha_i(n)$ est surjective pour $i \leq n-1$ et injective pour $i < n-1$.

Références

[AM04] A. Adem & R. J. Milgram – *Cohomology of finite groups*, second éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 309, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Bas64] H. Bass – « K-theory and stable algebra », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1964), no. 22, p. 5–60.

[Bas68] H. Bass – *Algebraic K-theory*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968.

[Bet02] S. Betley – « Twisted homology of symmetric groups », *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), no. 12, p. 3439–3445 (electronic).

[Cha84] R. Charney – « On the problem of homology stability for congruence subgroups », *Comm. Algebra* **12** (1984), no. 17-18, p. 2081–2123.

[Cha87] — , « A generalization of a theorem of Vogtmann », in *Proceedings of the Northwestern conference on cohomology of groups (Evanston, Ill., 1985)*, vol. 44, 1987, p. 107–125.

[Col] G. Collinet – « Stabilité homologique pour certains groupes orthogonaux », prépublication.

[CPSvdK77] E. Cline, B. Parshall, L. Scott & W. van der Kallen – « Rational and generic cohomology », *Invent. Math.* **39** (1977), no. 2, p. 143–163.

[Dwy80] W. G. Dwyer – « Twisted homological stability for general linear groups », *Ann. of Math. (2)* **111** (1980), no. 2, p. 239–251.

[FFSS99] V. Franjou, E. M. Friedlander, A. Scorichenko & A. Suslin – « General linear and functor cohomology over finite fields », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 2, p. 663–728.

[Har85] J. L. Harer – « Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces », *Ann. of Math. (2)* **121** (1985), no. 2, p. 215–249.

[HW] A. Hatcher & N. Wahl – « Stabilization for mapping class groups of 3-manifolds », à paraître au *Duke Math. J.*

[Knu01] K. P. Knudson – *Homology of linear groups*, Progress in Mathematics, vol. 193, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

[MvdK02] B. Mirzaii & W. van der Kallen – « Homology stability for unitary groups », *Doc. Math.* **7** (2002), p. 143–166 (electronic).

[Nak60] M. Nakaoka – « Decomposition theorem for homology groups of symmetric groups », *Ann. of Math. (2)* **71** (1960), p. 16–42.

[Qui72] D. Quillen – « On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field », *Ann. of Math. (2)* **96** (1972), p. 552–586.

[Sus82] A. A. Suslin – « Stability in algebraic K-theory », in *Algebraic K-theory, Part I (Oberwolfach, 1980)*, Lecture Notes in Math., vol. 966, Springer, Berlin, 1982, p. 304–333.

[Sus84] — , « Homology of GL_n, characteristic classes and Milnor K-theory », in *Algebraic K-theory, number theory, geometry and analysis (Bielefeld, 1982)*, Lecture Notes in Math., vol. 1046, Springer, Berlin, 1984, p. 357–375.

[vdK80] W. van der Kallen – « Homology stability for linear groups », *Invent. Math.* **60** (1980), no. 3, p. 269–295.

[Vog79] K. Vogtmann – « Homology stability for $\mathrm{O}_{n,n}$ », *Comm. Algebra* **7** (1979), no. 1, p. 9–38.

[Vog81] — , « Spherical posets and homology stability for $\mathrm{O}_{n,n}$ », *Topology* **20** (1981), no. 2, p. 119–132.